Lycée Camille SEE
Samedi 12 Mai 2007

CONTRÔLE N° 9

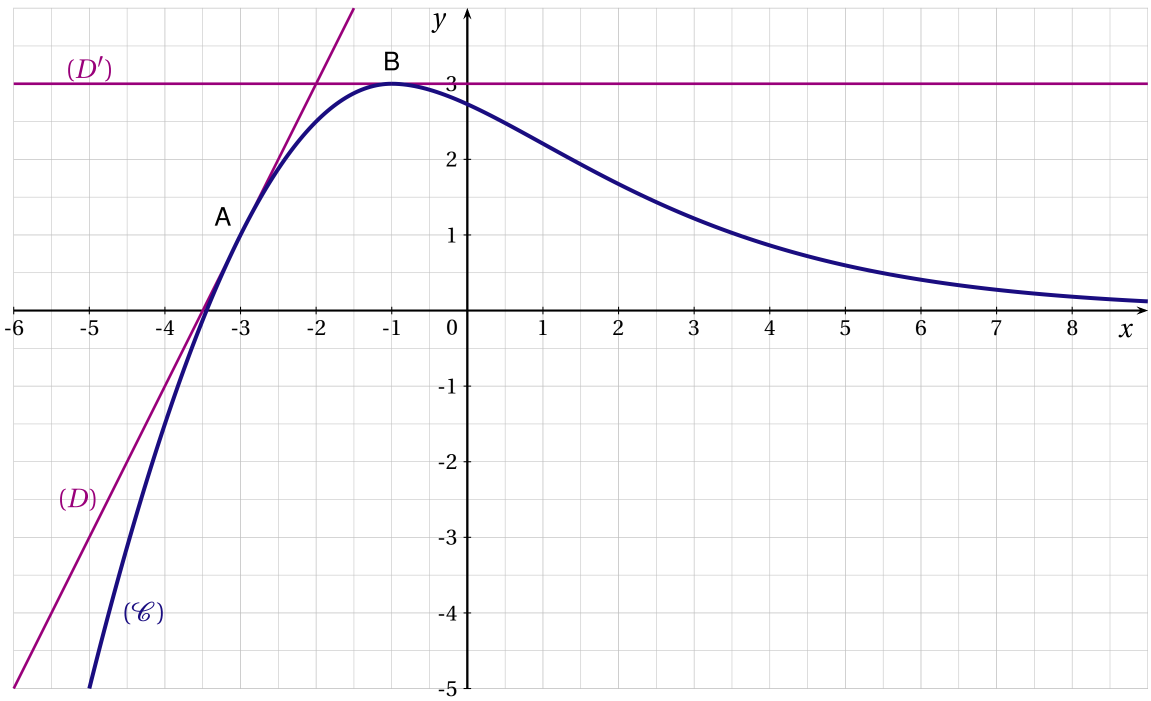
T$^{\text{le}}$ ES
Durée 3 heures

EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les élèves*

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0

La courbe (C) donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan.
Cette courbe passe par les points $A(-3;1)$ et $B(-1;3)$.
Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.

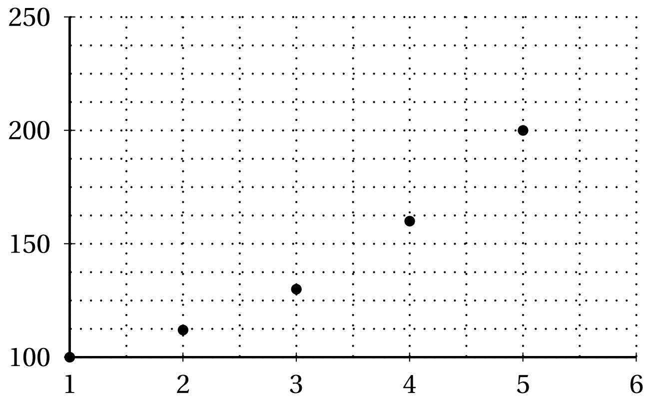


1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.
   On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-3,1;+\infty[$ par $h(x) = \ln\left[f(x)\right]$.
   On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]-3,1;+\infty[$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ (on justifiera le résultat).
   b) Calculer $h'(-3)$.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un fournisseur d'accès à Internet, souhaite faire une prévision du nombre de ses abonnés pour l'année 2005, il établit un relevé du nombre des abonnés des années 2000 à 2004.
Il affecte l'indice 100 à l'année 2000 pour établir la statistique des abonnés et consigne les données dans le tableau et le graphique ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	20003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200



Partie A

1. Le nombre d'abonnés était de 2040 pour l'année 2000, de combien est-il pour l'année 2004 ?
2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 ?
3. Quelle est l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés ?
4. Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour les années 2005 et 2010 ?
   On arrondira à l'entier le plus proche.

Partie B

Le fournisseur décide d'utiliser un changement de variable pour obtenir un autre ajustement, il crée un nouveau tableau en posant $Y = \ln(y)$.

1. Recopier et compléter le tableau. *On donnera des valeurs approchées à* 10^{-2}.

x_i	1	2	3	4	5
$Y_i = \ln y_i$					

2. Dans le plan muni d'un repère, construire le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,Y_i)$ et la droite de régression de Y en x donnée par l'équation $Y = 0{,}17x + 4{,}39$.
3. Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i de l'année.
4. En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour les années 2005 et 2010.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES*

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 4{,}8$ pour tout entier naturel n.

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}4x + 4{,}8$ tracées ci-dessous, pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 8$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4.
   b) Exprimer alors v_n, en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Une revue spécialisée est diffusée à 12 000 exemplaires soit par abonnement soit par vente en librairie. Au 1er janvier 2007, 2 000 personnes sont abonnées à cette revue. Une étude statistique a permis de constater que d'une année sur l'autre, 80% des abonnés renouvellent leur abonnement et 40% des acheteurs non abonnés de la revue souscrivent un abonnement.
   Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la revue, exprimé en milliers, n années après le 1er janvier 2007. On a donc $u_0 = 2$.
   On suppose que le nombre d'abonnés à la revue évolue de la même façon les années suivantes.
   a) À partir de quelle année le nombre d'abonnés sera supérieur à 7 900.
   b) Est-il possible pour la direction de la revue d'envisager un nombre d'abonnés supérieur à 8 000 ?

EXERCICE 3 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut D_A et le défaut D_B, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28% ont le défaut D_A, 37% ont le défaut D_B et 10% ont les deux défauts.
   On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse?

2. **Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.**
   On admet que 40% de ces pièces ont seulement le défaut D_A, et que 60% de ces pièces ont seulement le défaut D_B.
   On a constaté que 40% des pièces qui ont le défaut D_A sont réparables, et que 30% des pièces qui ont le défaut D_B sont réparables.
   On choisit une pièce au hasard.
   On note :
   A l'évènement : « La pièce a le défaut D_A »,
   B l'évènement : « La pièce a le défaut D_B »,
   R l'évènement : « La pièce est réparable ».

   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie a le défaut D_A et est réparable ».
   c) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie est réparable ».
   d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut D_A (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).
   e) À trois moments différents, on choisit au hasard une pièce parmi les pièces défectueuses qui ont un seul défaut. On suppose que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.
      Calculer la probabilité pour que, sur les 3 pièces choisies, exactement 2 pièces aient le défaut D_A.

EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les élèves*

PARTIE A

1. X est un réel appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

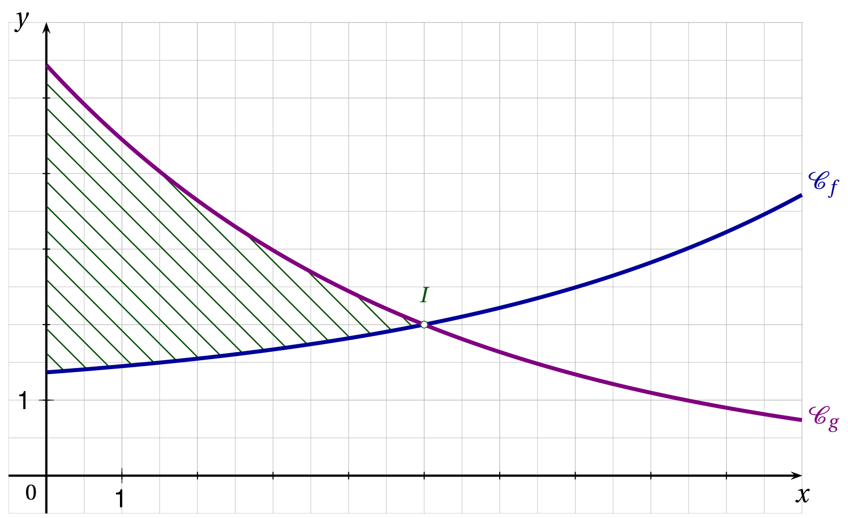
   a) Résoudre l'équation $X+1=\dfrac{2}{X}$

   b) Résoudre l'inéquation $X+1\leqslant\dfrac{2}{X}$

2. En déduire que le réel $\alpha=5$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^{0,2x-1}+1=2\mathrm{e}^{1-0,2x}$.

PARTIE B

f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{0,2x-1}+1$ et $g(x)=2\mathrm{e}^{1-0,2x}$.
Leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.



1. Étudier les limites en $+\infty$ des fonctions f et g. Préciser les asymptotes éventuelles aux courbes.
2. Étudier les de variations des fonctions f et g.
3. En utilisant les résultats de la PARTIE A, calculer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et montrer que $f(x)\leqslant g(x)$ sur l'intervalle $]0;5]$.
4. Montrer par un calcul de primitive, qu'une primitive de la fonction g est la fonction G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $G(x)=-10\mathrm{e}^{1-0,2x}$.
5. Calculer la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=5$.