CONTRÔLE N° 2

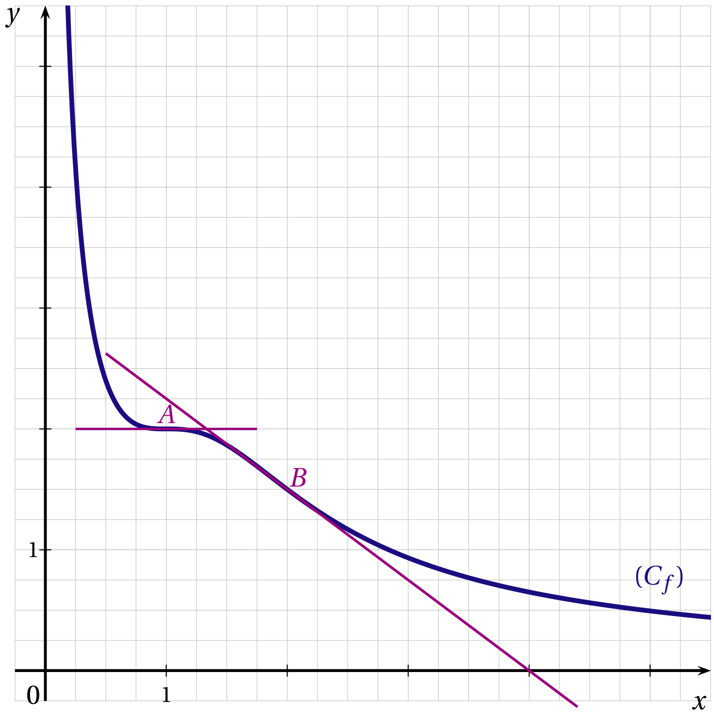
EXERCICE 1

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

— Les droites d'équation $x=0$ et $y=0$ sont asymptotes à la courbe C_f ;

— la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A d'abscisse 1 ;

— la tangente à la courbe C_f au point $B\left(2;\frac{3}{2}\right)$ passe par le point de coordonnées $(4;0)$



1. À partir du graphique et des renseignements fournis :

   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $f(1)$, $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction f. C'est-à-dire la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

   a) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$?

   b) Déterminer les valeurs de $g'(1)$ et $g'(2)$.

   c) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^3$

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition. En donner une interprétation graphique.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 3

PARTIE A

1. Vérifier que pour tout réel x, $x^3+3x^2-54=(x-3)(x^2+6x+18)$.
2. En déduire le signe du polynôme $P(x)=x^3+3x^2-54$.

PARTIE B

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $]0;5]$. Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression :

$$f(q)=\frac{q^3+6q^2+12q+108}{12q}$$

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4200 pièces ?
2. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(q)$.
   b) En vous aidant de la partie A, étudiez les variations de la fonction f.
   c) En déduire le nombre d'unités à fabriquer pour que le prix de revient d'une pièce soit minimal. Quel est alors le montant en euros du coût total de production ?