Afin d'augmenter sa rentabilité, une entreprise décide d'investir dans deux secteurs notés *A* et *B*. Le taux du pourcentage d'augmentation de la rentabilité est modélisé par la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ;6] par :

$$f(x;y)=\frac{30x+30y}{2x^2-2xy+y^2+5}$$

- x est le nombre de milliers d'unités monétaires investies dans le secteur *A*.
- y est le nombre de milliers d'unités monétaires investies dans le secteur *B*.
- $f(x;y)=t$ signifie que la rentabilité a augmenté de t %.

PARTIE A

La figure 1 de l'annexe est la représentation de la surface *S* d'équation $z=f(x;y)$ dans l'espace muni d'un repère orthogonal.
Sur la figure 2 de l'annexe sont représentées les projections orthogonales dans le plan (xOy) des lignes de niveau de cote constante $z = k$.
On admet que la cote maximale est réduite à un point *T*.

1. Lire les coordonnées du point *A* de la surface *S*, le placer sur la figure 2.
2. Placer le point *T* sur la figure 1. Est-il possible pour cette entreprise d'espérer obtenir un pourcentage d'augmentation de la rentabilité de 16 % ?
3. Par lecture graphique, avec un investissement de 0,5 milliers d'unités monétaires dans le secteur *A* :
   a. quel semble être le pourcentage maximal d'augmentation de rentabilité que la direction peut espérer obtenir ?
   b. quel est alors le montant total de l'investissement qui permet d'obtenir ce pourcentage d'augmentation de la rentabilité ?
4. Graphiquement, est-il préférable d'investir un millier d'unités monétaires dans le secteur *A* et 1,5 milliers d'unités monétaires dans le secteur *B* ou 3 milliers d'unités monétaires dans le secteur *A* et 2 milliers d'unités monétaires dans le secteur *B* ?
5. Le budget global que l'entreprise peut investir ne doit pas dépasser 6 milliers d'unités monétaires. Graphiquement, sous la contrainte $x+y=b$ avec $b\leq 6$ quelle stratégie d'investissement permet d'obtenir le meilleur taux d'augmentation de la rentabilité ?

PARTIE B

Le budget total que l'entreprise investit est de 5 milliers d'unités monétaires.

1. Vérifier que le taux du pourcentage d'augmentation de la rentabilité sous cette contrainte est modélisé par la fonction *g* définie sur l'intervalle [0 ;6] par $g(x)=\dfrac{30}{x^2-4x+6}$.
2. Calculer $g'(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction *g*.
4. En déduire le pourcentage maximum d'augmentation de la rentabilité que la direction peut espérer obtenir avec un investissement de 5 milliers d'unités monétaires. Quels sont alors les montants investi le secteur *A* et dans le secteur *B* ?

ANNEXE

FIGURE 1 : Surface S d'équation $z = f(x; y)$

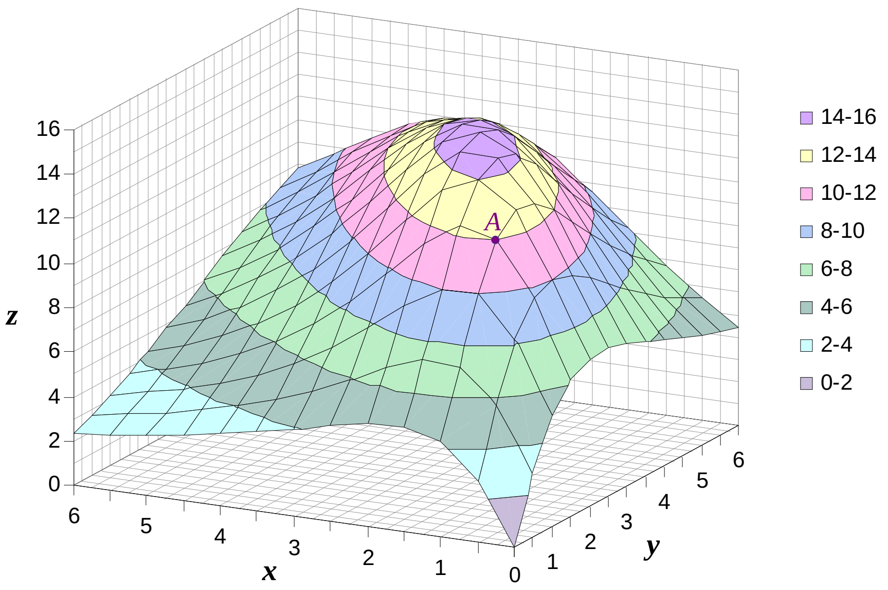

FIGURE 2 : Lignes de niveau z = k