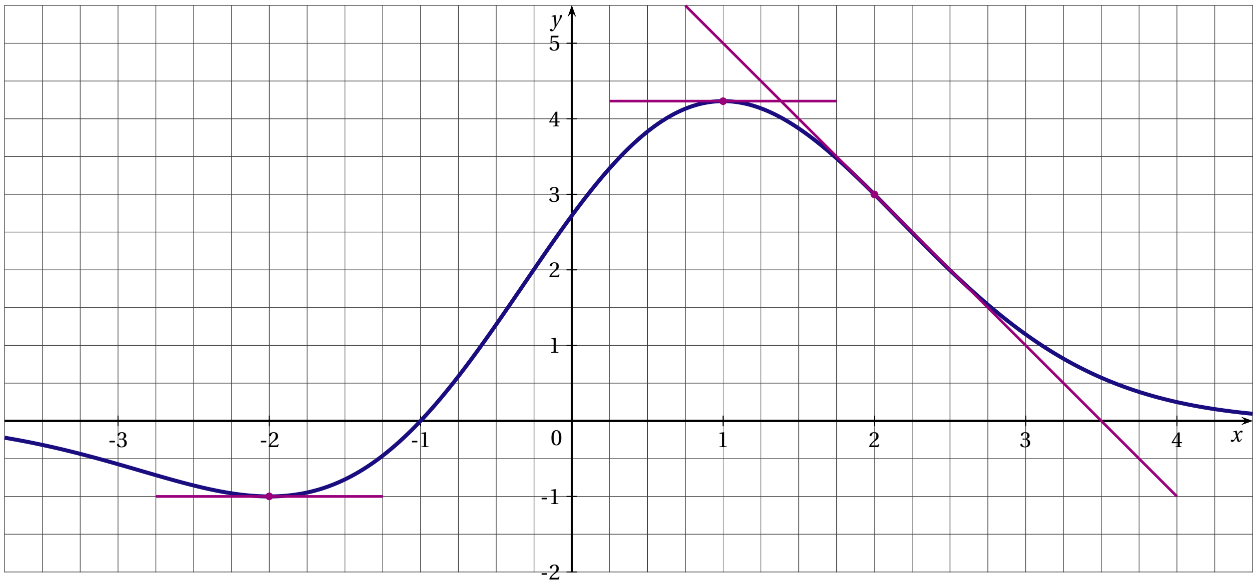
CONTRÔLE N° 9

EXERCICE 1 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

Pour chaque question, une et une seule des trois propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.
Barème : *Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse enlève 0,5 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous, sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) $f'(-1) = 0$.
   b) $f'(-2) < f'(1)$.
   c) $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[-2;1]$.
2. Soit F une primitive sur de la fonction f.
   a) F est décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   b) F présente un maximum en $x = 1$.
   c) F présente un minimum en $x = -1$.
3. a) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} f(x)\mathrm{d}x < 0$.
   b) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x < 8$.
   c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x > \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.
4. g' est la fonction dérivée de la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$.
   a) $g(x) \geqslant 0$ sur $]-1;+\infty[$.
   b) $g'(0) \leqslant g'(1)$.
   c) $g'(2) = -\dfrac{2}{3}$.
5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$. On note Γ sa courbe représentative
   a) L'axe des abscisses est asymptote à la courbe Γ en $-\infty$
   b) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe Γ en $+\infty$.
   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

D'après une étude réalisée par le CNC (centre national de la cinématographie) :

— les films récents sortis dans l'année représentent 92,5 % des entrées de l'ensemble des films exploités;

— les films recommandés « Art et Essai »totalisent 21,3 % des entrées;

— 80,7 % des entrées des films « Art et Essai »sont des films sortis dans l'année.

On choisit au hasard un spectateur à la sortie d'un cinéma et on note :
A : l'évènement « le spectateur a vu un film Art et Essai »;
R : l'évènement « le spectateur a vu un film récent sorti dans l'année ».

Les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondis au millième.

1. Montrer que la probabilité que le spectateur choisi a vu un film « Art et Essai » sorti dans l'année est égale à 0,172.
2. Le spectateur choisi n'a pas vu un film « Art et Essai », quelle est la probabilité que ce soit un film récent sorti dans l'année?
3. Le spectateur choisi a vu un film récent sorti dans l'année, quelle est la probabilité que ce soit un film recommandé « Art et Essai »?
4. On interroge au hasard et de façon indépendante n spectateurs à la sortie de différentes salles de cinéma.
   Calculer le nombre minimal de spectateurs qu'il faut interroger pour que la probabilité qu'au moins un d'entre n'a pas vu un film récent sorti dans l'année soit supérieure à 0,5.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur du textile en France, entre 2000 et 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i du l'année	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de milliers d'emplois salariés y_i	118	113	106	98	89	81	75

1. Calculer le pourcentage d'évolution annuel moyen du nombre d'emplois salariés entre les années 2003 et 2006. *Ce taux sera exprimé en pourcentage et arrondi au centième.*
2. On pose $z = \ln y$.

   a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	4,771						

   b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis au millième*).

   c) En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$, A étant arrondi l'unité et B au millième.
3. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2008.
4. En réalité, le nombre d'emplois salariés dans le secteur du textile a diminué en moyenne de 6,47 % par an entre 2006 et 2008. Calculer le nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2008.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.
Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84 % des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76 % pour le conditionnement B.
Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n-ième mois après l'étude et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b) Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $\begin{pmatrix} 0{,}564 & 0{,}436 \end{pmatrix}$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$.
   Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - 0{,}6$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0{,}1 \times 0{,}6^n + 0{,}6$.
   c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à 0,595 ?

EXERCICE 4 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-0,5x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Étudier le signe de f.
2. a) Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (2-2X)\mathrm{e}^{X}$ avec $X = 1-0,5x$.
   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (1-0,5x)\mathrm{e}^{1-0,5x}$.

   b) Dresser le tableau complet des variations de la fonction f.
4. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{1-0,5x}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   a) Déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

   b) Déterminer la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.