EXERCICE 1 (6 *points*) *Commun à tous les élèves*

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité.
Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

Dans cet exercice, toutes les valeurs approchées des résultats demandés seront arrondies au millième.
Les trois parties sont indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE

On prélève au hasard trois articles et on considère ces trois prélèvements comme étant indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'un seul des trois articles soit sans défaut.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des trois articles soit sans défaut.

DEUXIÈME PARTIE

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b.
On note :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b » ;

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires respectifs de A et B.

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0{,}05$; $p(B) = 0{,}06$.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
2. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
3. On prélève au hasard un article parmi ceux qui présentent le défaut a. Calculer la probabilité que cet article présente également le défaut b.
4. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
5. Un article sans défaut est vendu à 150€. Un article qui présente seulement le défaut a est vendu avec une remise de 30%, un article qui présente seulement le défaut b est vendu avec une remise de 40% et un article qui a les deux défauts n'est pas vendu.
   a) Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X, d'un article.
   b) Quel chiffre d'affaires l'entreprise peut-elle espérer réaliser sur la vente de 1000 articles ?

EXERCICE 2 (5 *points*) *Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Chaque question de cet exercice admet une seule réponse exacte : a, b ou c.
Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Barème :
Une mauvaise réponse enlève la moitié des points attribués à la question. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

PARTIE A

1. Avec un taux d'accroissement annuel moyen de 0,45%. Dans 40 ans, la population française aura augmenté de :

   a) moins de 18% b) 18% c) plus de 18%

2. La primitive H de la fonction h définie pour tout réel x par $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ telle que $H(0)=-1$ est la fonction H définie pour tout réel x par :

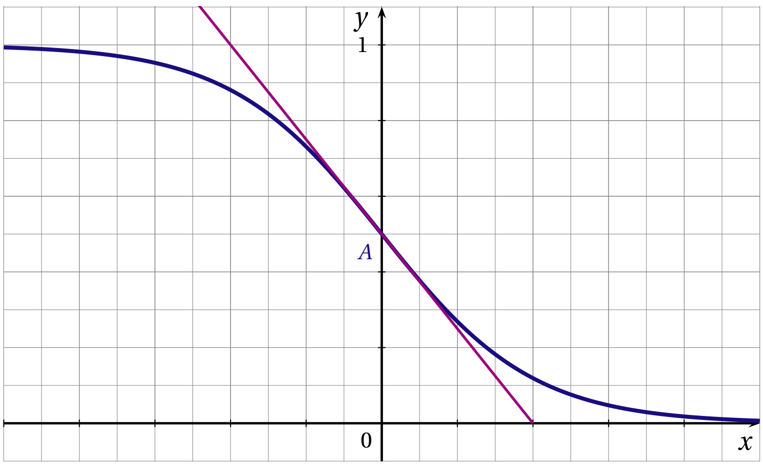
   a) $H(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-2$ b) $H(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}}\right)$ c) $H(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\mathrm{e}\right)$

PARTIE B

Dans cette partie, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative C_f est représentée ci-dessous dans un repère orthogonal. On sait que :

— la courbe C_f passe par le point $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ et la tangente en A à la courbe C_f passe par le point $B(2;0)$;

— la courbe C_f admet pour asymptotes la droite d'équation $y=1$ et l'axe des abscisses.

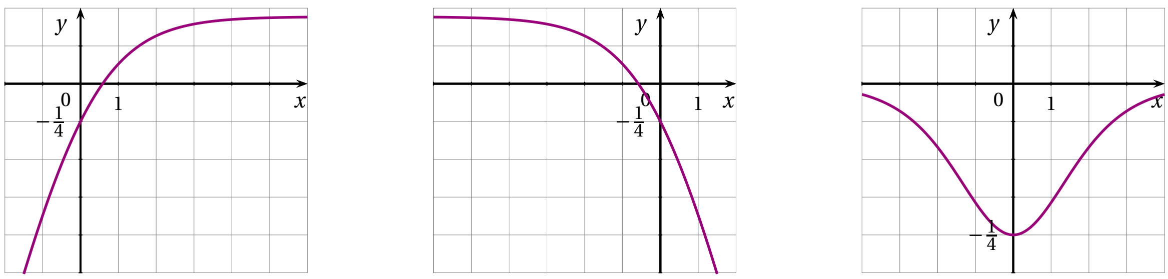


3. On note f' la dérivée de la fonction f

   a) $f'(0)=-\dfrac{5}{4}$ b) $f'(0)=-\dfrac{1}{4}$ c) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Courbe C_1 Courbe C_2 Courbe C_3



4. La dérivée f' de la fonction f est représentée par :

   a) La courbe C_1 b) La courbe C_2 c) La courbe C_3

5. Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est représentée par :

   a) La courbe C_1 b) La courbe C_2 c) La courbe C_3

6. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

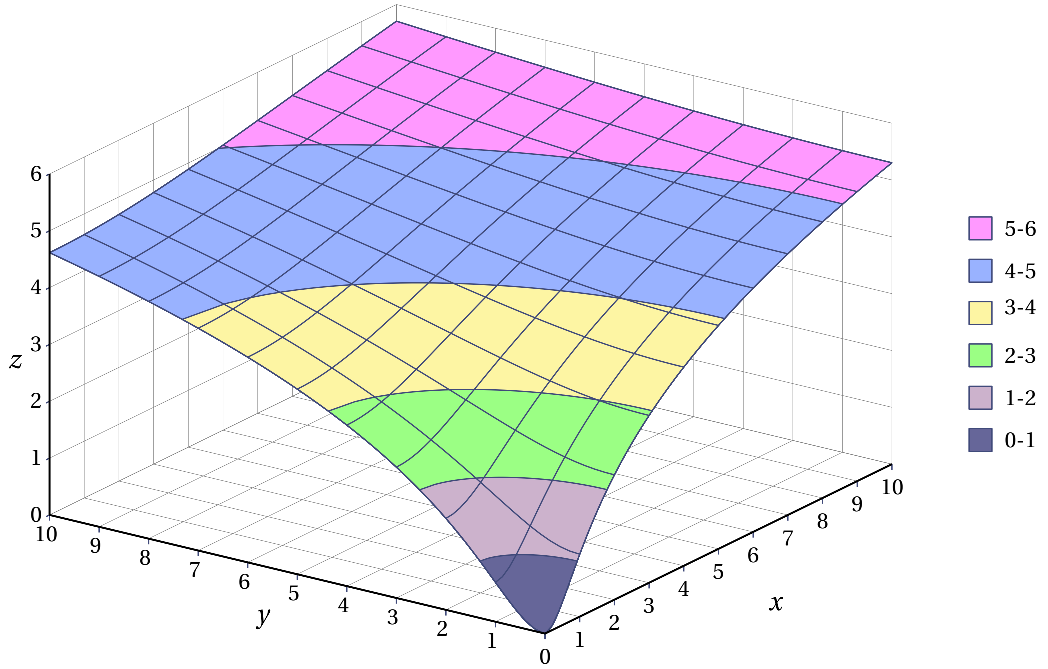
7. Pour tout réel x,

   a) $g(x) \geqslant 0$ b) $g'(x) \geqslant 0$ c) $g'(x) \leqslant 0$

EXERCICE 2 (5 *points*) *Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une entreprise dispose de deux unités de fabrication A et B pour un même produit. Le coût total de production exprimé en milliers d'euros de cet article pour x milliers d'articles produits dans l'unité A et de y milliers d'articles produits dans l'unité B est donné par $f(x;y)=\ln\left(2x^2+y^2+1\right)$.
La figure ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la surface (S) d'équation $z=f(x;y)$ pour $0\leqslant x\leqslant 10$ et $0\leqslant y\leqslant 10$.

FIGURE 1



PARTIE A

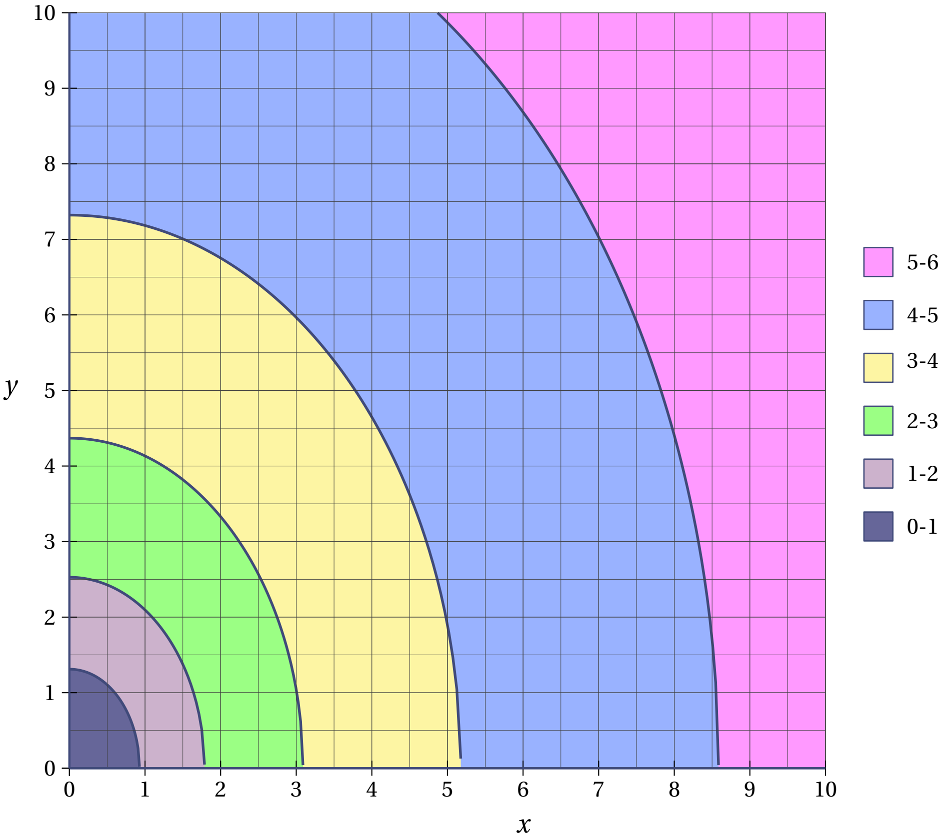
1. Le point $B(2;4;2\ln 5)$ appartient-il à la surface (S) ?
2. Placer sur la surface le point A, d'abscisse 6 et d'ordonnée 3. Calculer la valeur arrondie au dixième de sa cote.

PARTIE B

La demande est de 9000 articles par jour. x et y sont donc liés par la relation $x+y=9$.

1. La figure 2 ci-dessous, représente la projection orthogonale de la surface (S) sur le plan (xOy), les courbes de niveau de cette surface étant représentées pour z variant de 1 à 6.
   a) Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x;y;z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient $x+y=9$?
   b) Représenter l'ensemble $(\mathscr{E})$ sur la figure 2 ci-dessous.
   c) En déduire graphiquement le coût total minimal pour une production de 9000 articles.

FIGURE 2



2. a) Vérifier que, sous la contrainte $x+y=9$, le coût total peut s'écrire sous la forme d'une fonction g définie sur $[0;9]$ par $g(x)=\ln\left(3x^2-18x+82\right)$.

   b) Démontrer que la fonction g admet un minimum sur l'intervalle $[0;9]$.

   c) En déduire le nombre de milliers d'articles produits dans l'unité A et le nombre de milliers d'articles produits dans l'unité B pour obtenir un coût total minimum. Quel est alors le montant arrondi au millier d'euros près du coût total ?

EXERCICE 3 (9 *points*) *Commun à tous les élèves*

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Sa décision dépendra des résultats de plusieurs études.

— Étude de la demande pour ce produit : c'est l'objet de la partie A.

— Étude du coût moyen de production : c'est l'objet de la partie B.

PARTIE A

Une étude a permis d'établir le tableau suivant où x_i désigne le nombre d'articles exprimé en milliers, que la clientèle est disposée à acheter à un prix unitaire donné y_i, exprimé en euros :

Nombre d'articles x_i en milliers	1	3	5	8	10	12
Prix de vente y_i en euros	140	120	110	90	80	70

1. Représenter le nuage de points $M(x_i\,;y_i)$ dans le repère donné en annexe (unités 1 cm pour un millier d'articles sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 euros sur l'axe des ordonnées).
2. a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au dixième.

   b) Tracer la droite d'ajustement dans le repère donné en annexe.
3. On admet que le prix de vente P en euro d'un article est fonction de la demande x en milliers d'articles et qu'il est modélisé par l'ajustement affine précédent pour $x \in [1\,;15]$.

   a) À combien faut-il fixer le prix de vente d'un article arrondi à l'euro près, si l'on veut pouvoir vendre au minimum 6500 articles ?

   b) Justifier que la recette $R(x)$, exprimée en milliers d'euros, vérifie $R(x) = -6{,}2x^2 + 142x$.
   Quelle est la recette maximale arrondie au millier d'euros près, que l'entreprise peut espérer obtenir ?

PARTIE B

Une étude a permis d'établir que le coût moyen de production d'un article est $C_M(x) = \dfrac{40x - 20\ln(x) + 280}{x}$ où x est exprimé en milliers et $x \in [1\,;15]$.
La courbe représentative de la fonction C_M est tracée en annexe.

1. On note C' la dérivée de la fonction C_M.

   a) Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = \dfrac{20\,(\ln(x) - 15)}{x^2}$.

   b) Étudier le signe de $C'(x)$.

   c) En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $[1\,;15]$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction C_M au point d'abscisse 6,5 et la tracer sur le graphique. (Les coefficients seront arrondis au dixième).

PARTIE C

À l'aide du graphique :

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'entreprise peut faire un bénéfice. On donnera la réponse sous la forme d'un intervalle dont les bornes sont des entiers.
2. Quelle quantité faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum ?

ANNEXE DE L'EXERCICE 3

(À rendre avec votre copie)