EXERCICE 1 (3 *points*) *Commun à tous les élèves*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{\frac{1}{x}} \geqslant e$.
2. a) En utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle, simplifier l'expression $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$.

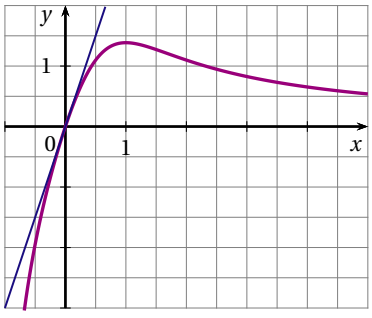
EXERCICE 2 (7 *points*)

PARTIE A *Partie commune à tous les élèves*

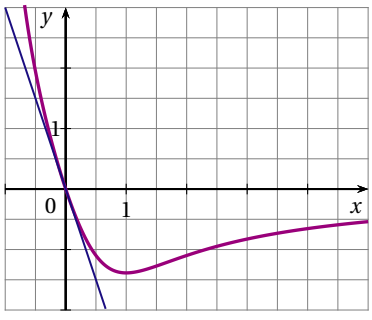
La courbe C_f tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $]-1;+\infty[$.

1. La tangente à la courbe C_f au point $A(1;0)$ passe par le point $B(0;1{,}5)$. En déduire $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f. Déterminer la courbe associée à la fonction F. (*Justifier*)

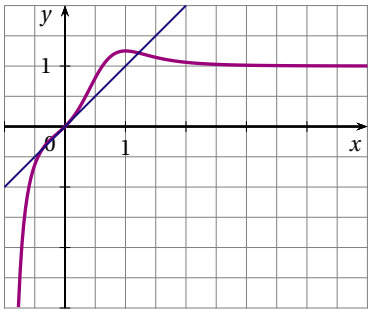
COURBE 1



COURBE 2



COURBE 3



La **PARTIE B** de cet exercice, sur la page suivante, ne concerne que les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES

PARTIE B *Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3-3x}{x^3+1}$.

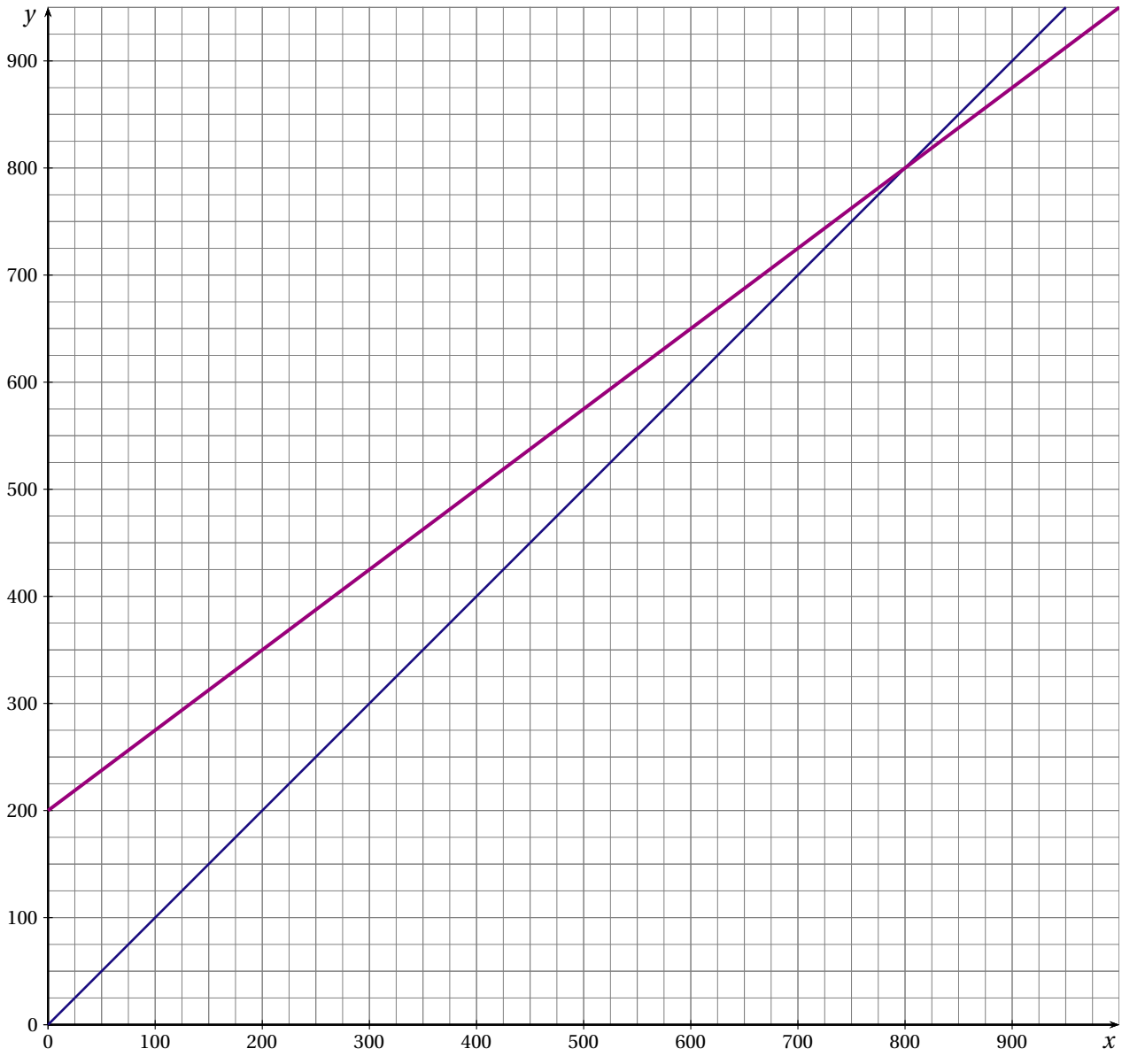
1. Déterminer les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{ax+b}{x^2-x+1}$.
3. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(1)=2\ln 2$.
   a) Déterminer une équation de la tangente d à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1.
   b) Calculer $F(x)$.
   c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES*

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n + 200$.

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}75x + 200$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) . (*Cette construction est à faire sur le graphique de l'annexe 1 ci-dessous*)
   Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 800$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 800 - 500 \times 0{,}75^n$.
   c) La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2010, il y avait 300 abonnés.
   On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement.
   On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$; on a donc $u_0 = 300$ et $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n + 200$.
   a) Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 790 ?
   b) Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

ANNEXE 1



EXERCICE 3 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

Dans cet exercice, les résultats seront éventuellement arrondis à 10^{-3} près.
Une étude sur la fréquentation d'une salle de spectacle a permis d'établir les résultats suivants :

— 60 % des spectateurs possèdent un abonnement ;

— parmi les spectateurs ne possédant pas d'abonnement, 75 % ont été influencé par une critique ;

— 24 % des spectateurs, possèdent un abonnement et ont été influencé par une critique.

À la sortie d'un spectacle, on choisit un spectateur au hasard et on note :

— A l'évènement : « le spectateur possède un abonnement » ;

— C l'évènement : « le spectateur a été influencé par une critique ».

1. a) Grâce aux données de l'énoncé, donner les probabilités suivantes $p(A)$, $p(A \cap C)$ et $p_{\overline{A}}(C)$.
   b) Calculer $p_A(C)$.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement C est 0,54.
3. Le spectateur choisi n'a pas été influencé par une critique, quelle est la probabilité que ce soit un spectateur possédant un abonnement ?
4. On choisit successivement au hasard et de manière indépendante trois spectateurs.
   Quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un abonnement ?

EXERCICE 4 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

La production mensuelle d'une certaine catégorie d'articles par une entreprise est comprise entre 0 et 8000. Le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $C_T(x) = \dfrac{x^2}{2} + x\mathrm{e}^{2-x}$ où x représente le nombre de milliers d'articles fabriqués.

PARTIE A

La fonction coût moyen, notée C est la fonction définie sur $]0;8]$ par $C(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

1. Donner une expression du coût moyen $C(x)$, en fonction de x.
2. Déterminer $C'(x)$ où C' désigne la fonction dérivée de la fonction coût moyen C.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{2-x} = 0$.

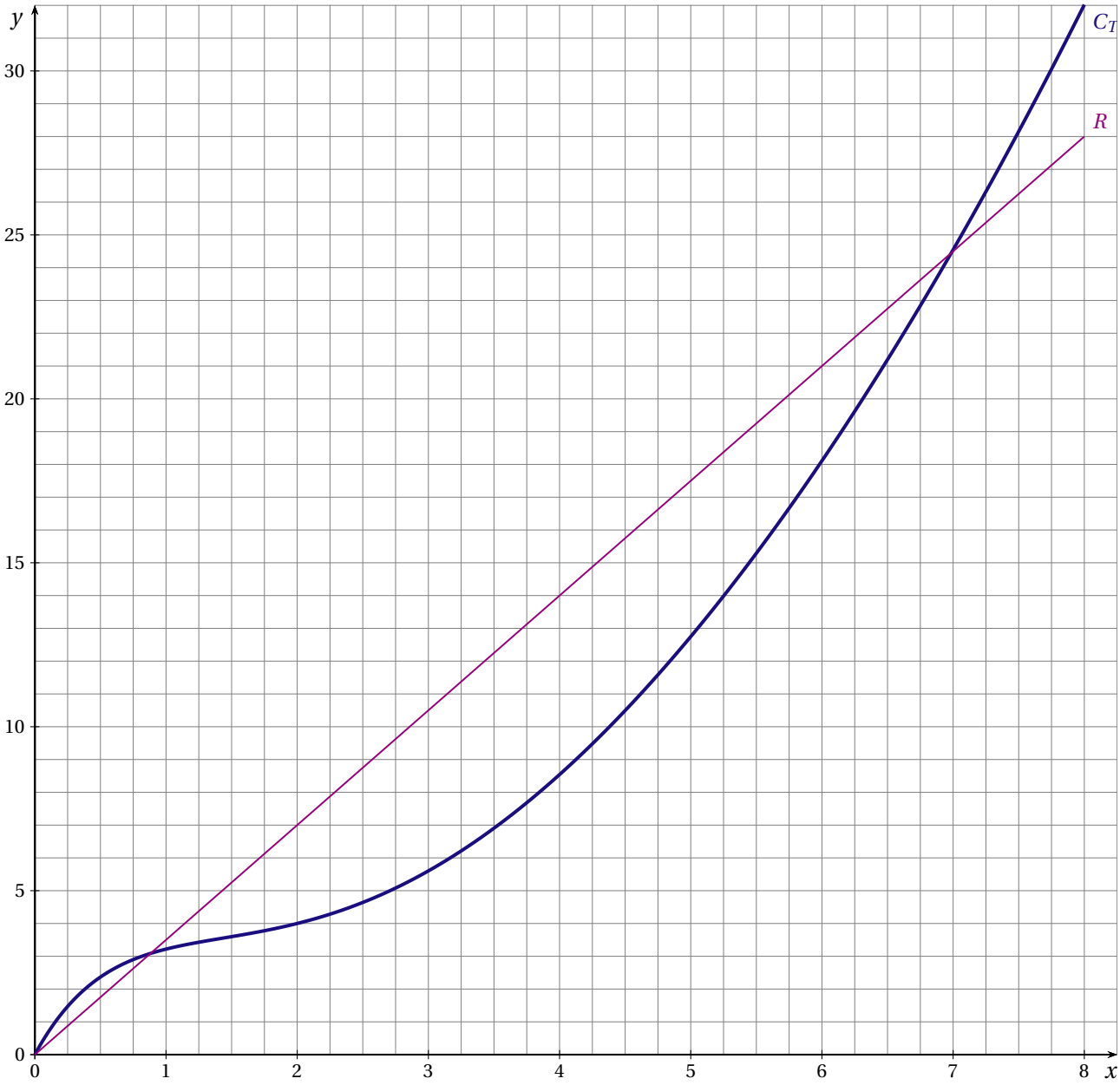
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{2-x} > 0$.

   c) En déduire le sens de variations de la fonction coût moyen C sur $]0\,;8]$.
4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?

PARTIE B

Chaque millier d'articles est vendue 3500 €. La recette totale pour x milliers d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R(x) = 3{,}5x$ en milliers d'euros.
Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R(x) - C_T(x)$.
En annexe 2, sont représentées les fonctions C_T et R.

1. Par lecture graphique déterminer :
   a) le coût moyen minimal ;
   b) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise ;
   c) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

   On fera apparaître les constructions nécessaires.
2. À l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise.

ANNEXE 2