CONTRÔLE N$^{\text{o}}$ 8

EXERCICE 1 (4 *points*)

Commun à tous les élèves

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à* 0.

1. F est la primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui prend la valeur 3 en -1, si $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ alors :

   A. $F(1) = -2$ B. $F(1) = 2$ C. $F(1) = 4$

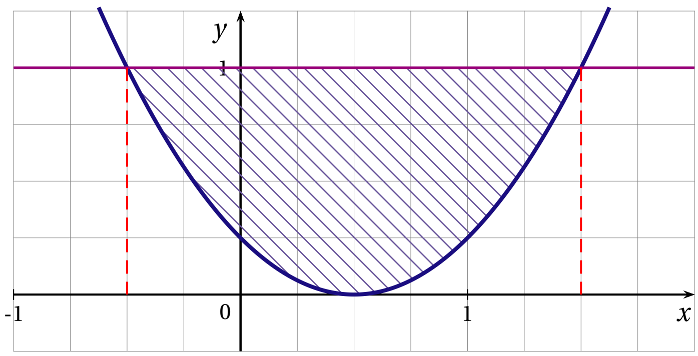
2. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

   On peut affirmer que :

   A. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ B. $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ C. $\displaystyle\int_{5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

3. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$.



   L'aire exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré est égale à :

   A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{4}{3}$

4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ alors :

   A. $1 < \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x < \mathrm{e}$ B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x < \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ C. $\mathrm{e} < \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x < \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$

EXERCICE 2 (5 *points*) *Commun à tous les élèves*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'Indice du PIB par habitant en Turquie, (base pays membres de l'OCDE 100 en 2000) :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Production y_i	35,8	33,2	34,8	36	38,8	41,9	44,2	45,6

Source : OCDE

1. Une première estimation du taux de croissance :
   a) Calculer le pourcentage d'augmentation de l'indice du PIB par habitant entre 2000 et 2007.
   b) En déduire le pourcentage d'augmentation annuel moyen de l'indice du PIB par habitant entre 2000 et 2007.
2. Une deuxième estimation du taux de croissance. On pose $z = \ln y$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis au centième.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	3,58							

   b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice.
   c) Montrer que $y = 32{,}95 \times 1{,}046^x$ (*résultats arrondis au centième*).
   d) En déduire une estimation du taux de croissance annuel moyen de l'indice du PIB par habitant en Turquie.
3. Á l'aide de l'ajustement obtenu à la question 2c, déterminer l'année à partir de laquelle, l'indice du PIB par habitant en Turquie sera supérieur à 100.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une entreprise fabrique un composant pour ordinateur en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 5 composants sur mille sortant de son usine sont défectueux.
L'entreprise décide de mettre en place un test de fiabilité de ces articles avant leur mise en vente.
Parmi les composants en parfait état, 94% réussissent le test et parmi ceux défectueux, seulement 2% réussissent le test.
On choisit un composant au hasard et on considère les événements suivants :

D « le composant est défectueux » ;

T « le composant passe le test avec succès » ;

Dans cet exercice, les résultats seront éventuellement arrondis à 10^{-4} près.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant soit défectueux et qu'il ne réussisse pas le test ?
2. Montrer que la probabilité qu'un composant ne réussisse pas le test est égale à 0,0646.
3. Quelle est la probabilité qu'un composant n'ayant pas passé le test avec succès soit défectueux ?
4. On prélève au hasard trois composants qui n'ont pas passé le test avec succès, on suppose que le nombre de composants est suffisamment grand pour considérer ces trois prélèvements comme étant indépendants.
   Quelle est la probabilité qu'un composant au moins ne soit pas défectueux ?

EXERCICE 3 (5 *points*) *Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.
Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs.
On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

— 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative;

— Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif;

— 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F, N et R.
2. On note M la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter $M = \begin{pmatrix} \dots & 0{,}28 & 0{,}1 \\ 0{,}32 & \dots & 0{,}1 \\ \dots & \dots & 0{,}7 \end{pmatrix}$.
3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.
   Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n, b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n.
   La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}58 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
   b) Déterminer l'état probabiliste P_3. Interpréter ce résultat.
   c) Soit $P = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}25 \end{pmatrix}$, la matrice ligne de l'état probabiliste stable du système. Déterminer a et b.
   d) En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire?

EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les élèves*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
Dans le repère orthogonal de l'annexe ci-dessous, la courbe C_f tracée représente la fonction f.

PARTIE A

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.

PARTIE B

1. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$
2. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = \ln 2$. Exprimer $F(x)$ en fonction de x.
3. Sur l'annexe ci-dessous, le domaine grisé est délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.
   Calculer l'aire, en cm^2, de ce domaine.

ANNEXE