CONTRÔLE N° 2

EXERCICE 1 (2 *points*)

Calculer les limites suivantes :

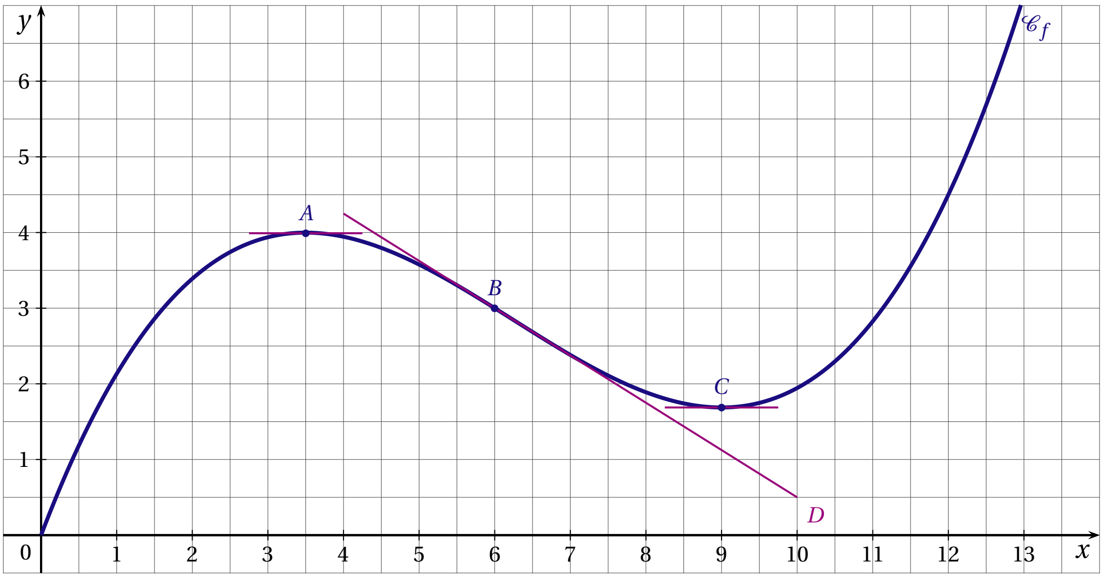
a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{x-1}{(1-2x)^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x+2-\frac{5}{x^2-5}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+1}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{(x-1)^2}$

EXERCICE 2 (6 *points*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère.

Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A et C d'abscisses respectives 3,5 et 9 sont parallèles à l'axe des abscisses.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $B\,(6;3)$ passe par le point $D\left(10;\dfrac{1}{2}\right)$.



1. On note f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$. À l'aide des informations précédentes et de la figure ci-dessus, préciser :
   a) les valeurs de $f'(3{,}5)$ et $f'(6)$;
   b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. On note C_g sa courbe représentative.
   a) Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b) Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son intervalle de définition.
   Interpréter graphiquement ces résultats.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_g au point d'abscisse 6.

EXERCICE 3 (12 *points*)

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=x^3-6x^2-10$.

1. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) Donner le tableau complet des variations de f.

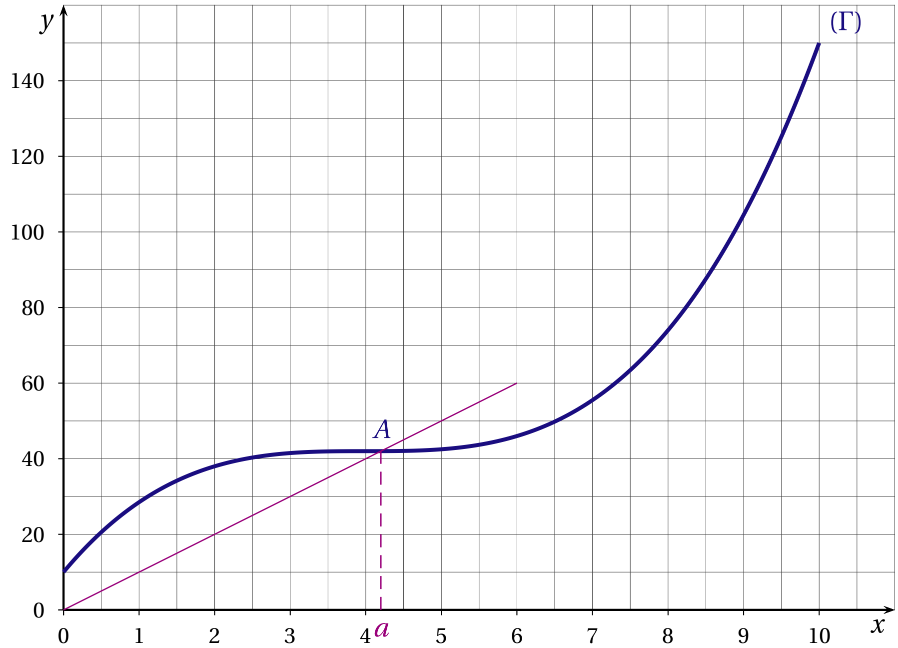
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de α arrondie au centième près.

PARTIE B : Étude d'un coût moyen

Soit C_T la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;10]$ par :

$$C_T(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 24x + 10$$

La fonction C_T modélise sur l'intervalle $]0;10]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque jour.
La courbe représentative de la fonction coût total, notée (Γ), est donnée ci-dessous :



On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$. La fonction C_M mesure le coût moyen de production, exprimé en euros, par article fabriqué.

1. Dans le cas où la production est de 4200 articles par jour, calculer le coût moyen arrondi à l'euro près, d'un article.
2. Soit A le point d'abscisse a de la courbe (Γ).
   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C_M(a)$
   b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C_M
3. On désigne par C' la dérivée de la fonction C_M.
   a) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;10]$ on a $C'(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 - 10}{x^2}$.
   b) En vous aidant de la partie A, étudiez les variations de la fonction C_M.
   c) En déduire la production, arrondie à la dizaine d'articles près, pour que le coût moyen soit minimal. Quel doit être alors le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?