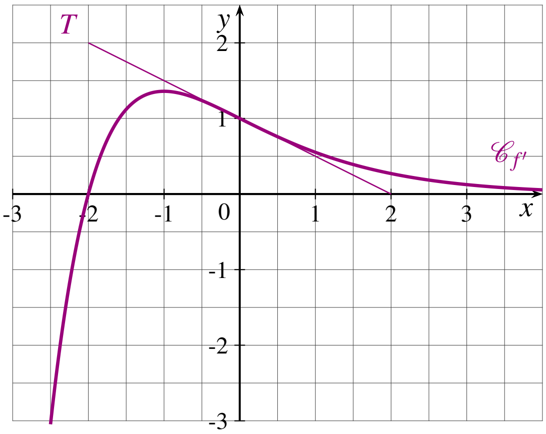
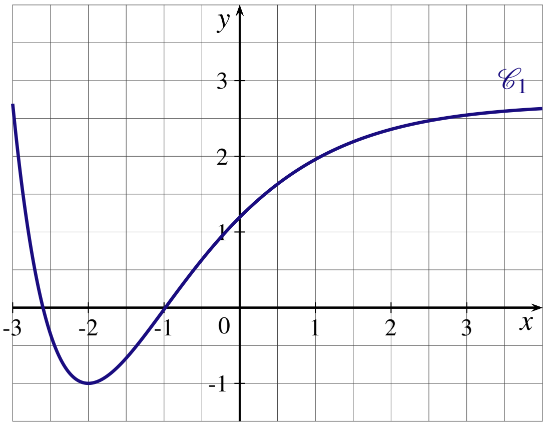
EXERCICE 1

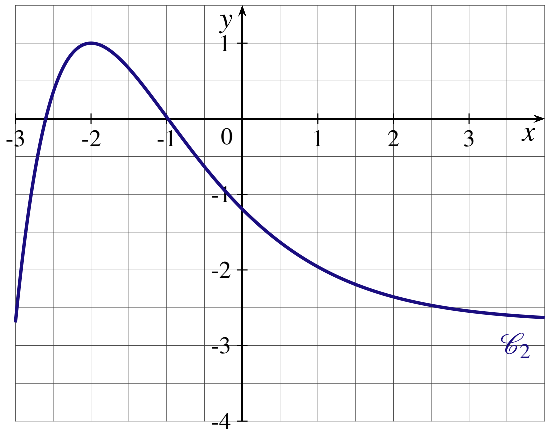
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathscr{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.

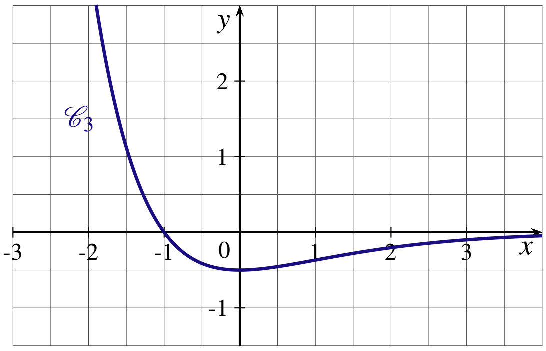


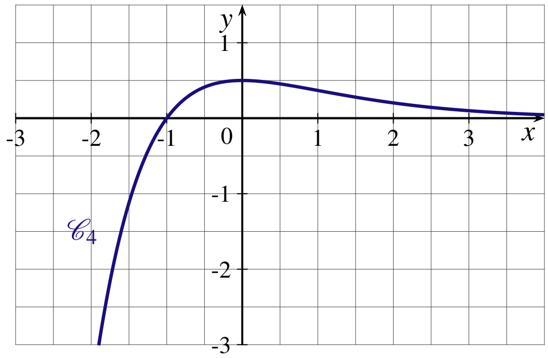
1. Par lecture graphique :
   a) Résoudre $f'(x) = 0$.
   b) Résoudre $f''(x) = 0$.
   c) Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.









   a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.
   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   c) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

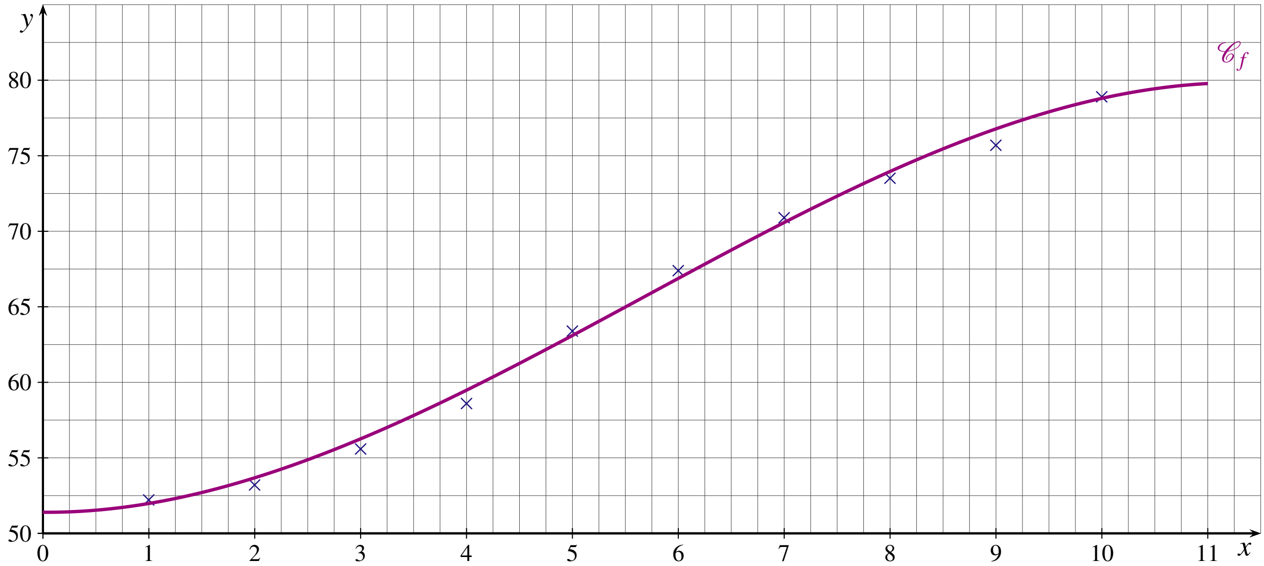
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

$$f(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}68x^2 - 0{,}06x + 51{,}4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.
Ainsi, le taux d'endettement des ménages en % à la fin du premier semestre 2003 est estimé par $f(2{,}5)$.



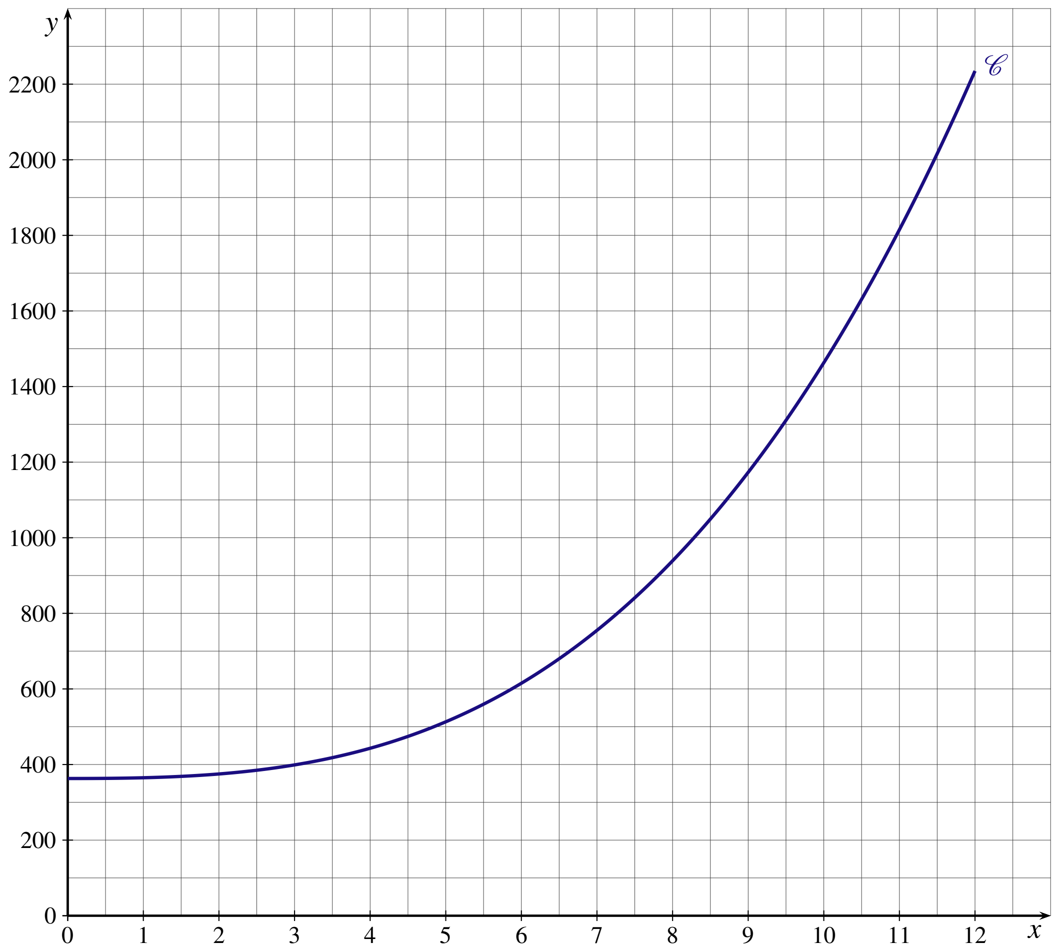
1. a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
   b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   c) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?
3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.
   Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

EXERCICE 3

Une entreprise produit et commercialise un article A. Sa capacité de production mensuelle est limitée à 12 milliers d'articles.
Soit C_T la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[0;12]$ par :

$$C_T(x) = x^3 + x^2 + 363$$

La fonction C_T modélise sur l'intervalle $[0;12]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
La courbe représentative de la fonction coût total, notée $\mathscr{C}$, est donnée ci-dessous :



PARTIE A

1. Justifier que la fonction C_T est strictement croissante.
2. Montrer que l'équation $C_T(x) = 2000$ admet une unique solution.
3. L'entreprise souhaite limiter son coût de production mensuel à 2000 milliers d'euros.
   Quel est, arrondi à la centaine d'articles près, le nombre maximal d'articles qu'elle peut produire chaque mois ?

PARTIE B

On note $C_M(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ avec $x \in]0 ~;~ 12]$.

1. a) Placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_T$. On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Conjecturer graphiquement les variations de C_M sur l'intervalle $]0;12]$.
2. Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
3. On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $]0 ~;~ 12]$ et on appelle C'_M sa fonction dérivée.
   Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \dfrac{(2x-11)(x^2+6x+33)}{x^2}$ pour tout x de l'intervalle $]0 ~;~ 12]$.
4. Étudier les variations de la fonction C_M sur $]0 ~;~ 12]$.
5. Le coût marginal C_m est assimilé à la dérivée du coût total.
   Vérifier que, lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal est égal au coût moyen.