BACCALAURÉAT BLANC

Lycée JANSON DE SAILLY

MATHÉMATIQUES

Série ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

L'utilisation de la calculatrice est autorisé

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 *points*)

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.
En 2010, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2010+n$; on a donc $a_0 = 40$ et $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 12$ pour tout entier naturel n.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et S sont des entiers naturels
	A est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de S
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à A la valeur 40
Traitement :	Tant_que $A \leqslant S$:
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Affecter à A la valeur $0{,}85 \times A + 12$
	Fin Tant_que
Sortie :	Afficher n

   Lorsque l'utilisateur entre la valeur $S = 70$, l'affichage en sortie est $n = 9$. Interpréter ce résultat.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geqslant 0$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85^n$.
   c) Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires ?

EXERCICE 2 (5 *points*)

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice $B = AP$.
2. Déterminer la matrice P^{-1}.
3. On pose $D = P^{-1}AP = P^{-1}B$. Calculer D.
4. a) Exprimer A en fonction de D.
   b) Exprimer alors A^2 puis A^3 en fonction de P, D^2, D^3 et P^{-1}.
5. On admettra que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ et } D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les coefficients de A^n en fonction de n.

EXERCICE 3 (5 *points*) **COMMUN À TOUS LES CANDIDATS**

D'après sujet Polynésie 2006

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.
Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.
En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raisons touristiques voyagent en première classe.
On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.
On note :

– A l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
– T l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
– D l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
– V l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

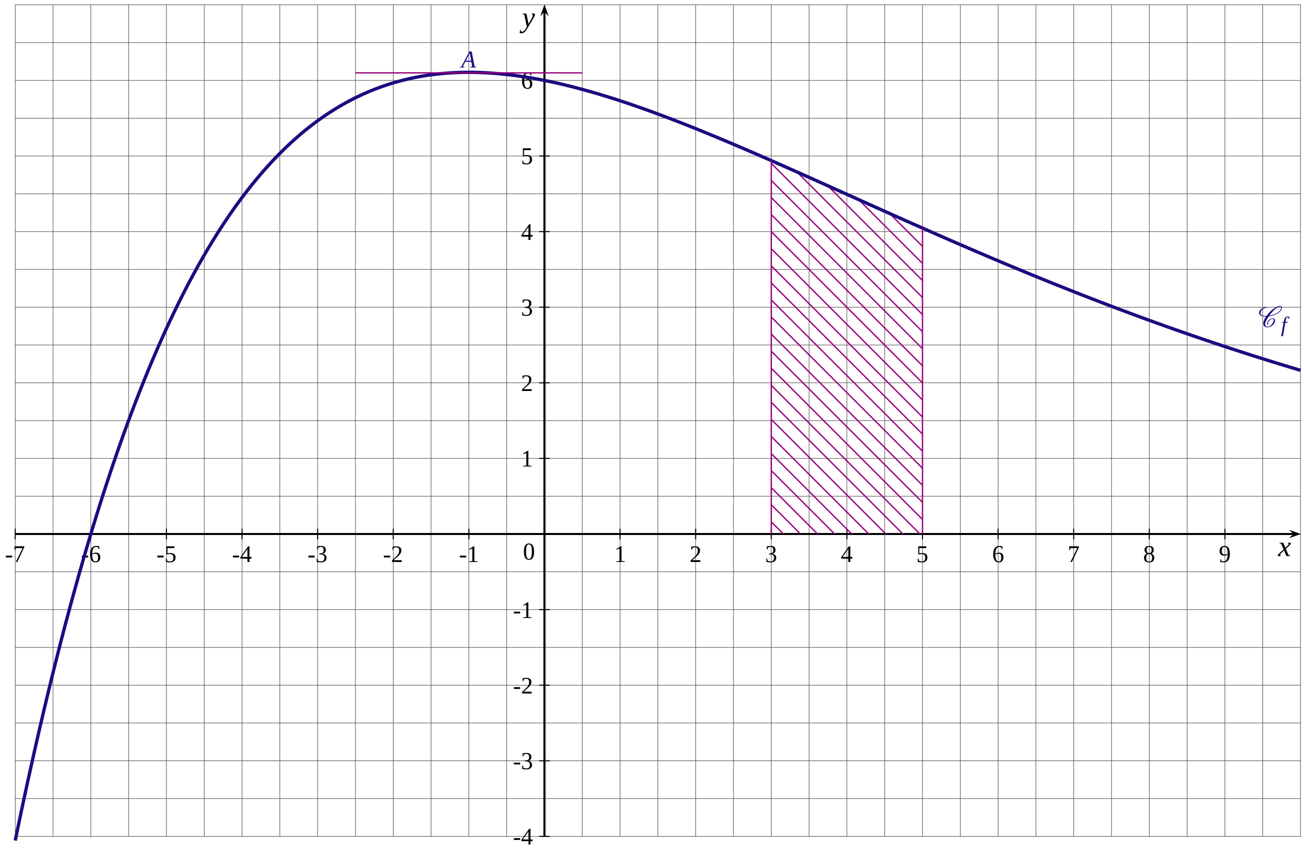
Si E et F sont deux évènements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Déterminer : $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p_A(V)$ et $p_T(V)$.
2. a) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.
   b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.
   c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.
4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.
   On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.
   a) Prouver que : $p_n = 1 - 0{,}4^n$.
   b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0{,}9999$.

EXERCICE 4 (7 *points*) **COMMUN À TOUS LES CANDIDATS**

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(-1)$.
2. Déterminer le signe de $f'(4)$.
3. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine hachuré.

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
On note f' sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel x, on a $f'(x) = (-0,2x - 0,2)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que $f''(x) = (0,04x - 0,16)\mathrm{e}^{-0,2x}$, pour tout réel x.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.
   c) Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.
3. a) Démontrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (-5x - 55)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

PARTIE C : Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1;8]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 4 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie B, déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \qquad \text{sur } [1;8]$$

   Calculer $E(4)$. Interpréter le résultat.