EXERCICE 1

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondis à 10^{-4} près.

Une usine fabrique en grande quantité des lames de parquet en chêne. Les bois proviennent de deux fournisseurs A et B.

PARTIE A

Dans le stock de cette usine, 75 % des bois proviennent du fournisseur A.
On constate que 9 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur A et 13 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur B présentent un léger défaut qui ne justifie pas le déclassement des lames.
On prélève au hasard une lame. On considère les évènements suivants :

— A : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur A » ;

— B : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur B » ;

— D : « la lame prélevée a un léger défaut ».

1. Calculer la probabilité $P(B \cap D)$.
2. Calculer la probabilité que la lame a un léger défaut.
3. Calculer la probabilité qu'une lame ayant un léger défaut provienne de bois du fournisseur A.

PARTIE B

On prélève au hasard 40 lames dans le stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une lame prélevée au hasard dans ce stock ait un défaut est égale à 0,1.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 lames à un tirage avec remise de 40 lames.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre lames qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux lames ont un défaut.

PARTIE C

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard dans le stock 400 lames.
On admet que la loi de la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 400 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut peut être approchée par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

1. Déterminer, la probabilité que dans un prélèvement de 400 lames, il y ait plus de 50 lames ayant un défaut.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de lames ayant un défaut. En déduire le nombre de lames ayant un défaut que le client peut trouver avec une probabilité proche de 0,95.

PARTIE D

Le fabriquant souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients satisfaits par son produit. Pour cela, il effectue un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. Sa clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage aléatoire avec remise.
Lors de ce sondage, 156 clients se sont déclarés satisfaits par son produit.

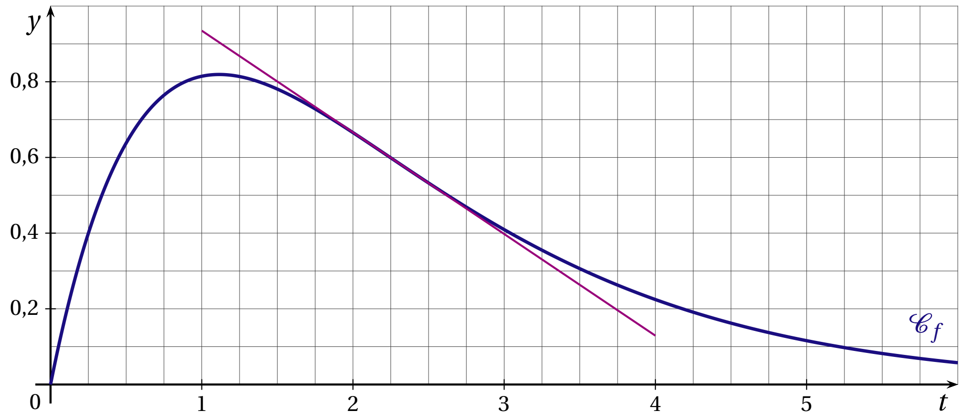
1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p de clients satisfaits.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
3. Ce fabriquant peut-il être certain que plus de 70% de sa clientèle est satisfaite par son produit ?

EXERCICE 2

PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;6]$ par $f(t) = 10 \times \left(\mathrm{e}^{-0,8t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Montrer que $f'(t) = 10\mathrm{e}^{-t} \times \left(1 - 0,8\mathrm{e}^{0,2t}\right)$.
   b) Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de la fonction f.
2. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal est fournie ci-dessous.



   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction définie par $f''(t) = 10\mathrm{e}^{-t} \times \left(0,64\mathrm{e}^{0,2t} - 1\right)$.
   a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner une valeur arrondie au centième près de ses coordonnées.
3. Montrer que l'équation $f(t) = 0,3$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[3;4]$. Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
4. Démontrer que la fonction F définie sur $[0;6]$ par $F(t) = 10\mathrm{e}^{-t} \times \left(1 - 1,25\mathrm{e}^{0,2t}\right)$ est une primitive de la fonction f sur $[0;6]$.

PARTIE B

On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang d'une personne, pendant les six heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool.
Le taux d'alcool dans le sang, exprimé en g/l, de cette personne est donné en fonction du temps t, en heures, par la fonction f définie dans la partie A.

1. Déterminer à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum arrondi à 10^{-2} près.
2. Des études ont montré que dès 0,3 g/l d'alcool dans le sang, un conducteur commet plus d'erreurs sur la route qu'en temps normal.
   Combien de temps, après absorption d'alcool, est-il prudent d'attendre pour cette personne avant de prendre sa voiture ?
3. T_m est le taux d'alcool moyen pendant les quatre heures suivant l'absorption d'alcool. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près du taux d'alcool moyen de cette personne.