

EXERCICE 1 (5,5 points)

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.

On remplit ce bassin avec 90 m³ d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m³ d'eau dans le bassin.

On note u_n le nombre de m³ d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.

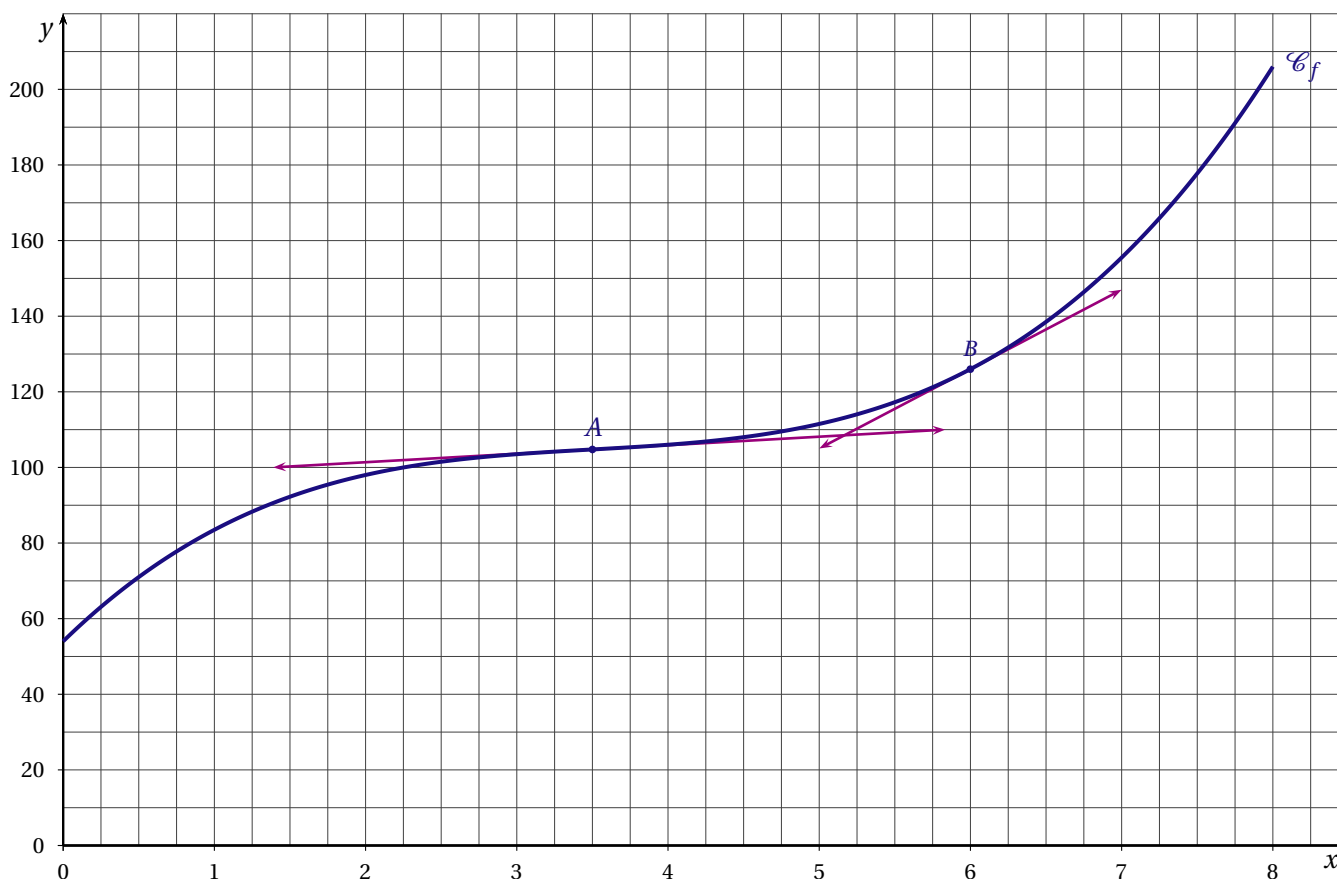
On a donc $u_0 = 90$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,97 \times u_n + 2,4$.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 80 + 10 \times 0,97^n$.
- Étudier la monotonie de la suite u_n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 (8 points)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C_f représentative de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;8]$ ainsi que les tangentes à la courbe aux points $A(3,5; 104,75)$ et $B(6; 126)$.

La tangente en B à la courbe C_f passe par l'origine du repère.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

PARTIE A

À partir du graphique et des renseignements fournis :

- Déterminer $f'(6)$ et $f''(3,5)$;
- Sur quel intervalle la fonction f semble-t-elle convexe? concave?

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;8]$ par $f(x) = x^3 - 10,5x^2 + 39x + 54$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Étudier la convexité de la fonction f .
4. Que représente le point A pour la courbe C_f ?

PARTIE C

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production mensuelle est limitée à 8 milliers d'articles.

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;8]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note $C_M(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué. C_M est la fonction définie sur l'intervalle $]0;8]$ par $C_M(x) = x^2 - 10,5x + 39 + \frac{54}{x}$.

On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $]0;8]$ et on appelle C' sa fonction dérivée.

1. Calculer $C'(x)$, et vérifier que $C'(x) = \frac{(x-6)(2x^2 + 1,5x + 9)}{x^2}$ pour tout x de l'intervalle $]0;8]$.
2. Étudier les variations de la fonction C_M sur $]0;8]$.
3. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice?

EXERCICE 3 (6,5 points)

Une usine fabrique trois articles A , B et C .

Chacun de ces trois articles est obtenu à partir de quatre produits différents P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

La fabrication de chacun des produits nécessite trois ressources : du travail (T) ; des matières premières (M) et de l'énergie (E).

Les deux tableaux suivants présentent les quantités de produits utilisés pour produire chaque article A , B ou C et les coûts des ressources, exprimés en euros, nécessaires à la fabrication de chaque produit.

	P_1	P_2	P_3	P_4
A	3	2	2	1
B	4	3	0	2
C	0	5	3	2

	T	M	E
P_1	10	15	3
P_2	12	8	2
P_3	4	12	4
P_4	3	5	1

1. On considère les matrices suivantes $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 3 \\ 12 & 8 & 2 \\ 4 & 12 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer le produit $P = F \times R$.
- b) En déduire le coût de l'énergie (E) nécessaire à la fabrication d'un article B .

2. Calculer le produit $U = P \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation du résultat.
3. Calculer le produit $V = (1 \ 1 \ 1) \times P$ et donner une interprétation du résultat.
4. À l'aide d'un produit de matrices, calculer le coût total de la production de quatre articles A , trois articles B et huit articles C .
5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À la fin d'une journée, on a constaté que la dépense pour la fabrication de ces trois articles a été de 14 800 euros pour le travail (T) ; 18 000 euros pour les matières premières (M) et 4 400 euros pour l'énergie (E).

Déterminer le nombre d'articles A , B et C qui ont été fabriqués au cours de cette journée.