CONTRÔLE N° 8

EXERCICE 1 (7 *points*)

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245\,;\,255]$. *Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à* 10^{-3}

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes fabriqués ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
2. Calculer la probabilité $P(X=2)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres.
   Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité ?

PARTIE C

Le cahier des charges établit que la proportion dans la production de 2 % de tubes refusés par le contrôle de conformité est acceptable.
On veut savoir si une machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 250 dans lequel 6 tubes se révèlent être non conformes.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non conformes dans un échantillon de taille 250.
2. La machine de production doit-elle être révisée ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 (7 *points*)

Après avoir effectué quelques parties au jeu « 2048 » Léa a constaté que sur une journée :

— quand elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,64.

— quand elle a perdue, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,14.

On note G l'état : « Léa a gagné la partie » et P l'état : « Léa a perdu la partie ».
Pour un jour donné, on note également pour tout entier naturel n :

— g_n la probabilité que Léa gagne lors de la n-ième partie de la journée ;

— p_n la probabilité que Léa perde lors du n-ième partie de la journée ;

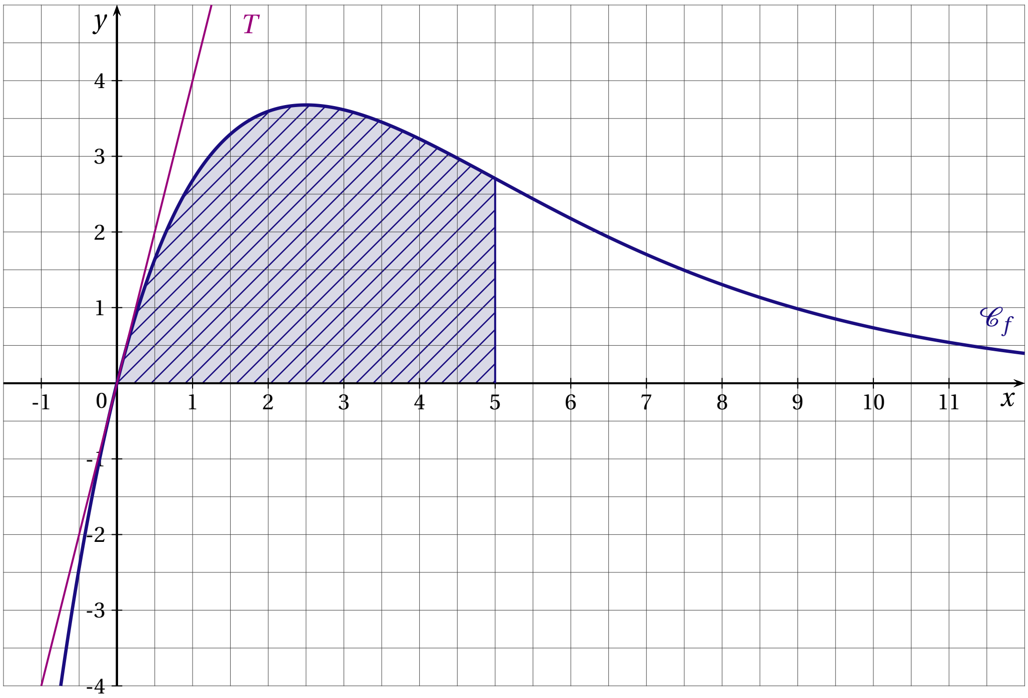
— $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième partie de la journée.

On suppose que la veille du jour considéré, Léa avait gagné sa dernière partie, on a donc $g_0 = 1$ et $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c) Calculer la probabilité que Léa gagne sa troisième partie.
   d) Déterminer l'état stable du graphe probabiliste.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}14$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $u_n = g_n - 0{,}28$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $g_n = 0{,}72 \times 0{,}5^n + 0{,}28$.
4. À partir de combien de parties dans la journée la probabilité que Léa gagne sa partie sera-t-elle strictement inférieure à 0,3 ?

EXERCICE 3 (6 *points*)

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1) \leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12 \leqslant F(5) - F(0) \leqslant 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.

1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.

   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} -0,4a & = & 4 \\ a-0,4b & = & 0 \end{array}\right.$

   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
2. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de A.