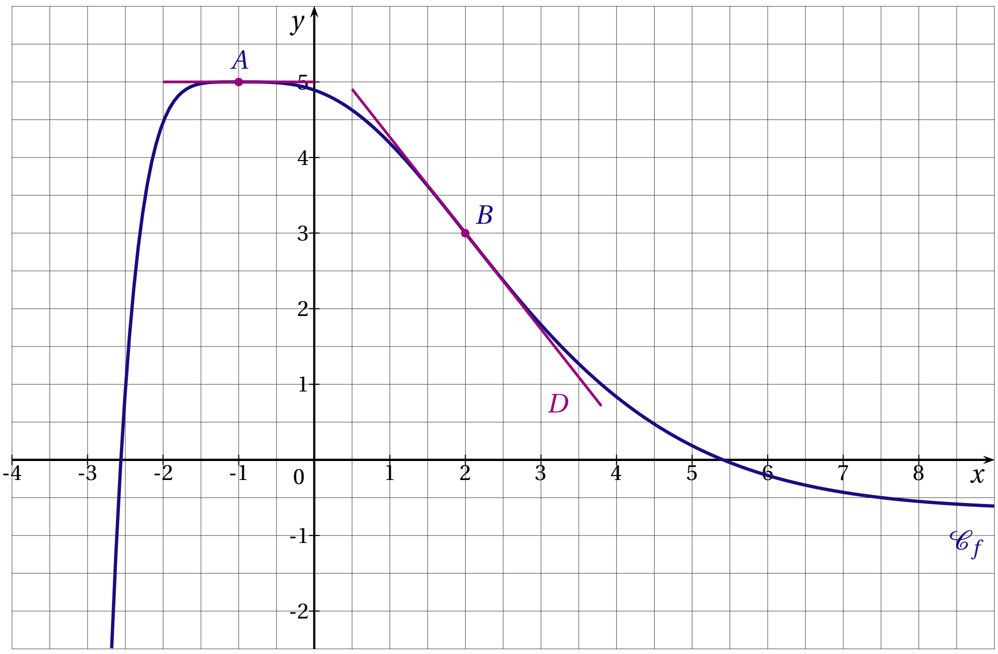
EXERCICE 1 (4 *points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 a pour équation $y = 5$.
La droite D est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2, seul point en lequel la courbe traverse la tangente.



1. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f :
   a) $f''(2) < 0$ b) $f''(2) = 0$ c) $f''(2) > 0$ d) $f''(2) > f''(3)$

2. On note f' la dérivée de la fonction f :
   a) $f'(-1) = 5$ b) $f'(-1) = 0$ c) $f'(2) = 3$ d) $f'(2) = -1$

3. On peut affirmer que :
   a) $f'(-3) \times f'(-2) \leqslant 0$ b) $f'(5) \times f'(6) \leqslant 0$ c) $f'(-2) \times f'(3) \geqslant 0$ d) $f'(-2) \times f'(1) \leqslant 0$

4. Le tableau de variation de la fonction dérivée f' est :

a)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↘		↗		↘	

b)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		↗		↘	

c)

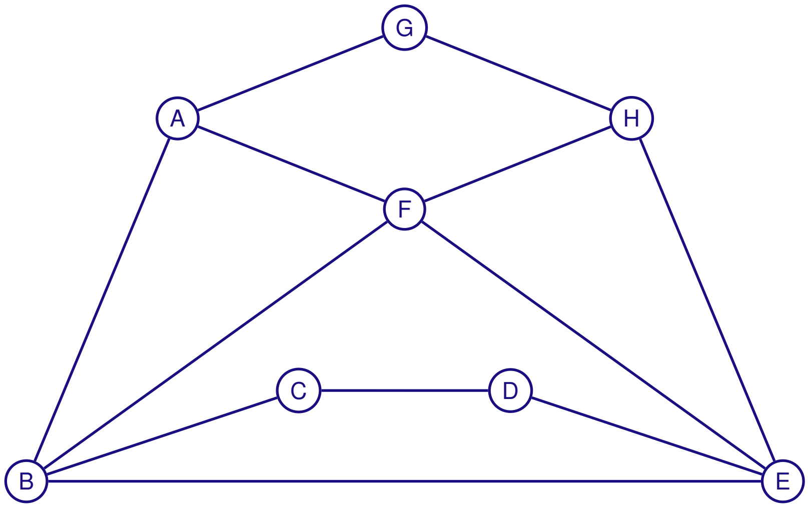
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		↘		↗	

d)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗		↘		↗	

EXERCICE 2 (5 *points*)

On considère le graphe Γ ci-dessous.



1. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

2. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 1 & 6 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 8 & 6 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer, en justifiant, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à H. Les citer toutes.

   b) Quelle est la distance entre les sommets B et G ?

   c) Quel est le diamètre du graphe ?

3. a) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.

   b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.

4. Le graphe Γ modélise le plan d'un parc. Les arêtes du graphe représentent les allées du parc et les sommets du graphe sont les intersections.
   En fin de journée, un agent du service d'entretien fait le tour du parc pour nettoyer les allées.

   a) Est-il possible de planifier un parcours pour que cet agent passe par toutes les allées sans emprunter plusieurs fois la même allée ? Justifier la réponse. Si oui proposer un parcours.

   b) Pour rationaliser le nettoyage des allées, on souhaite établir un circuit commençant et finissant par l'entrée du parc G et qui passe par toutes les allées une et une seule fois.
   Quel est le nombre minimal d'allées qu'il faudrait tracer pour obtenir un tel circuit.

EXERCICE 3 (5 *points*)

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 0{,}5$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12{,}5$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 2{,}5 \times 1{,}04^n + 12{,}5$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Le 1er janvier 2014, la population d'une ville comptait 15 milliers d'habitants.
Les études démographiques sur les dernières années ont permis d'établir que la population de cette ville à partir du 1er janvier 2014 peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville le 1er de l'année $2014 + n$.
Une réorganisation des transports en commun sera nécessaire dès que la population dépassera 16 000 habitants.
On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	U est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	U prend la valeur 15
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 16$
	N prend la valeur $N + 1$
	U prend la valeur $1{,}04 \times U - 0{,}5$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

1. Déterminer la valeur de N affichée par cet algorithme.
2. Interpréter le résultat précédent.

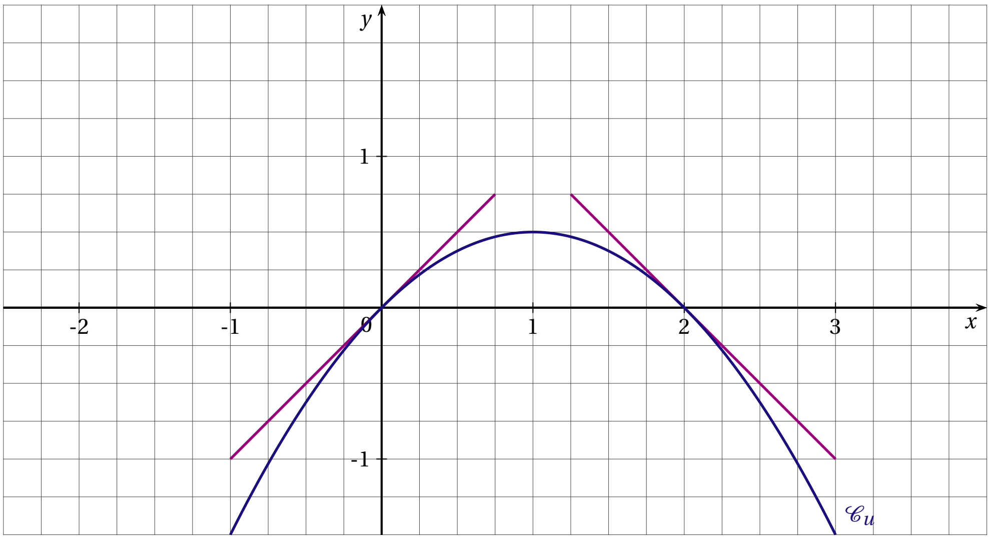
EXERCICE 4 (6 *points*)

PARTIE A

Soit u la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_u$ est donnée en annexe ci-dessous.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$. On note f' sa fonction dérivée.
À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

1. La proposition « L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions. » est-elle vraie ou fausse ?
2. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.

ANNEXE



PARTIE B

On considère dans cette partie, que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x-0,5x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$.
2. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

`dériver` $\exp\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$	
	$(1-x)\exp\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

   a) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
   b) Déterminer une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2.
3. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   a) Calculer $f''(x)$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.
   c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
4. Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
   On placera les points d'abscisses 0, 1, 2 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.