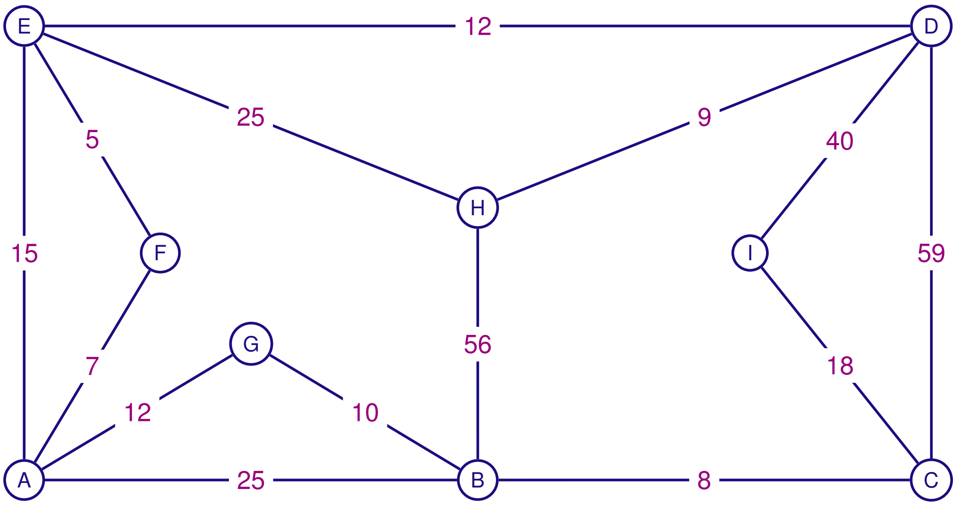
## EXERCICE 1

En 2014, le parc informatique d'une entreprise était de 200 ordinateurs.
Pour renouveler ce parc et tenir compte des besoins de l'entreprise, chaque année le gestionnaire supprime 10 % des ordinateurs les plus anciens et achète 30 ordinateurs neufs.
Le nombre d'ordinateurs du parc informatique de cette entreprise est modélisé par la suite $(u_n)$ où où le terme $u_n$ désigne le nombre d'ordinateurs disponibles au cours de l'année $(2014+n)$.
Ainsi, la suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs en 2015 et en 2016.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 300$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 300 - 100 \times 0{,}9^n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. Interpréter ce résultat.
4. En quelle année, le nombre d'ordinateurs disponibles dans cette entreprise sera-t-il supérieur à 250 ?

## EXERCICE 2

Le graphe ci-dessous modélise le réseau routier reliant différents lieux notés A, B, C, D, E, F, G, H et I. Les arêtes sont pondérées par les temps de parcours, en minutes, en tenant compte des difficultés de la circulation.




1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
2. En précisant la méthode utilisée, déterminer le trajet le plus court (en minutes) pour aller de C à H. Préciser la durée totale de ce trajet.

## EXERCICE 3

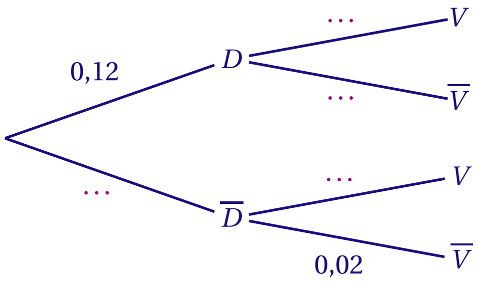
*Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au dix millième près.*

Un fabriquant de lentilles hydrophiles a constaté à l'issue de la fabrication, que ces lentilles peuvent présenter deux types de défauts : un rayon de courbure défectueux ou une perméabilité à l'oxygène défectueuse.
On admet que dans cette production, 12 % des lentilles présentent au moins un des deux défauts.
L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces lentilles basé sur le rayon de courbure avant leur mise en vente.
Ce contrôle détecte et élimine 80% des lentilles défectueuses, mais il élimine également à tort 2% des lentilles non défectueuses. Les lentilles non éliminées sont alors mises en vente.
On prélève une lentille au hasard dans cette production et on note :

— $D$ l'évènement « la lentille est défectueuse » ;

— $V$ l'évènement « la lentille est mise en vente ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :




2. Calculer la probabilité que la lentille soit défectueuse et mise en vente.
3. Montrer que la probabilité qu'une lentille soit mise en vente est égale à 0,8864.
4. Quelle est la probabilité qu'une lentille mise en vente soit défectueuse ?
5. Dans le stock de lentilles commercialisées par l'entreprise, on admet que 3 % des lentilles sont défectueuses.

   Les lentilles sont vendues par lot de 100 pièces. Le stock est suffisamment important pour assimiler un lot à un tirage aléatoire avec remise.

   Pour un lot de 100 lentilles, on note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lentilles défectueuses.

   a) La variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

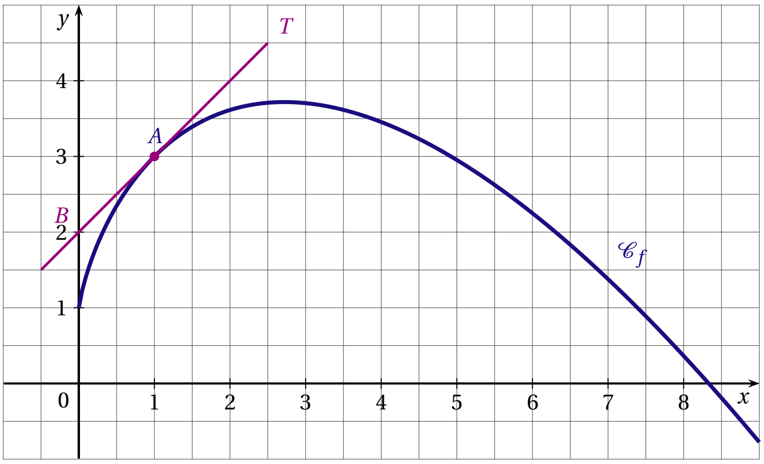
   b) Ci-dessous est donné un extrait du tableau donnant les valeurs des probabilités $P(X \leqslant k)$, où $k$ désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0\,;100]$.

| $k$ | $P(X \leqslant k)$ | $k$ | $P(X \leqslant k)$ | $k$ | $P(X \leqslant k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,047 553 | 4 | 0,817 855 | 8 | 0,996 784 |
| 1 | 0,194 622 | 5 | 0,919 163 | 9 | 0,999 126 |
| 2 | 0,419 775 | 6 | 0,968 772 | 10 | 0,999 785 |
| 3 | 0,647 249 | 7 | 0,989 376 | 11 | 0,999 952 |

   À l'aide de ce tableau ou de la calculatrice, déterminer $P(1 \leqslant X \leqslant 7)$, la probabilité que le nombre de lentilles défectueuses dans un lot de 100 soit compris entre 1 et 7.

### EXERCICE 4

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ strictement positif par $f(x) = 2x - x\ln(x) + 1$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La fonction $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on note $f'$ sa fonction dérivée et $f''$ sa fonction dérivée seconde.




1. La tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0;2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x) = 1 - \ln(x)$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x) \leqslant 0$.
   c) Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Étudier la convexité de la fonction $f$.