Lycée JANSON DE SAILLY
3 décembre 2015

CONTRÔLE N° 3

T$^{\text{le}}$ ES 3
Durée 1 heure

SUJET A

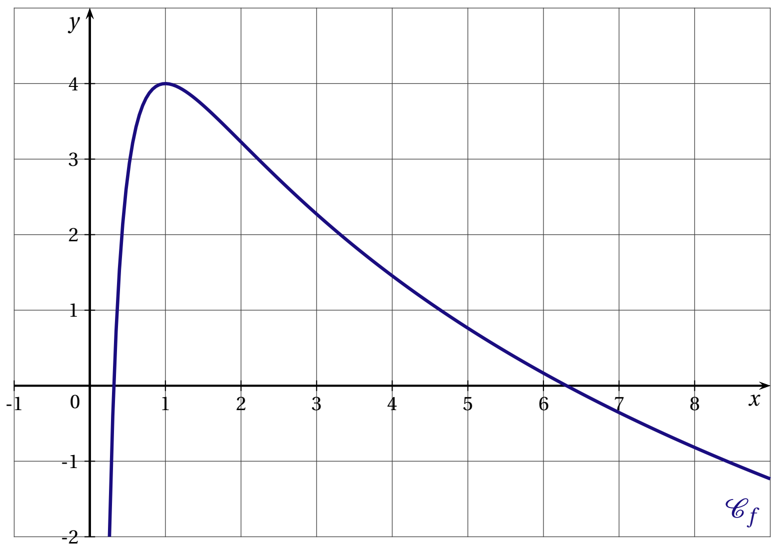
EXERCICE 1

Au 31 décembre 2014, Pierre n'a réussi à économiser que 40 euros. Ses parents lui versent 50 euros tous les premiers du mois.
Pierre décide que pour s'offrir un smartphone qui coûte 180 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé.
Le premier versement lui a été fait au 1$^{\text{er}}$ janvier 2015.

1. Soit u_n le montant des économies de Pierre à la fin du mois après le n-ième versement. Ainsi $u_0 = 40$ et u_1 correspond au montant des économies de Pierre au soir du 31 janvier 2015.
   a) Montrer que $u_2 = 97{,}60$.
   b) Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 40$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 160 \times 0{,}8^n$.
3. a) Déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation $200 - 160 \times 0{,}8^n \geqslant 180$.
   b) Au terme de quel mois, Pierre aura-t-il économisé la somme nécessaire à l'achat du smartphone ?

EXERCICE 2

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ est tracée ci-dessous.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
2. La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 8 - 4\ln(x) - \dfrac{4}{x}$.
   a) Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \dfrac{4-4x}{x^2}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[6;7]$.
   Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.
4. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.

SUJET B

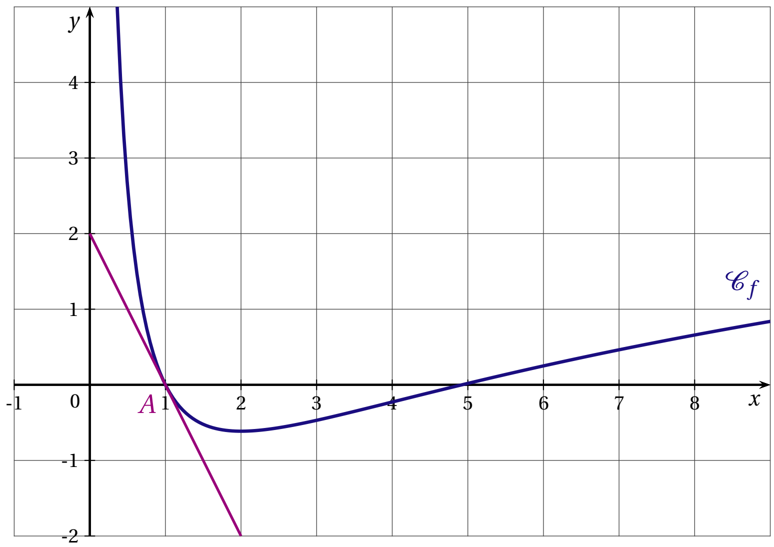
EXERCICE 1

Au 31 décembre 2014, Pierre n'a réussi à économiser que 50 euros. Ses parents lui versent 40 euros tous les premiers du mois.
Pierre décide que pour s'offrir un smartphone qui coûte 150 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé.
Le premier versement lui a été fait au 1er janvier 2015.

1. Soit u_n le montant des économies de Pierre à la fin du mois après le n-ième versement. Ainsi $u_0 = 50$ et u_1 correspond au montant des économies de Pierre au soir du 31 janvier 2015.
   a) Montrer que $u_2 = 89{,}60$.
   b) Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 32$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 160$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 160 - 110 \times 0{,}8^n$.
3. a) Déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation $160 - 110 \times 0{,}8^n \geqslant 150$.
   b) Au terme de quel mois, Pierre aura-t-il économisé la somme nécessaire à l'achat du smartphone ?

EXERCICE 2

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ est tracée ci-dessous.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.



1. La droite T est tangente en $A(1;0)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$. Déterminer les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
2. La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln(x) + \dfrac{4}{x} - 4$.
   a) Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4;6]$.
   Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.
4. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.