SUJET A

EXERCICE 1

PARTIE A

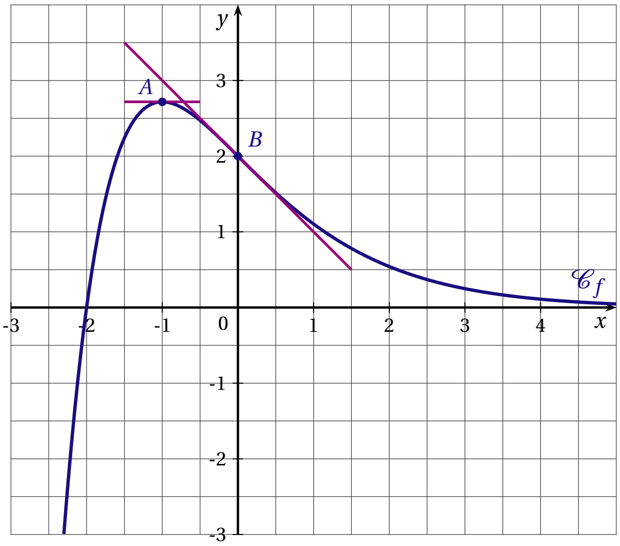
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

— Le point $B\,(0;2)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

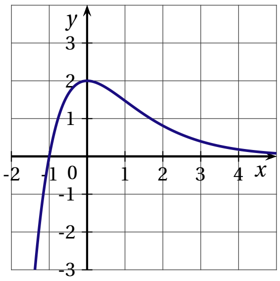
— La tangente au point B à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(1;1)$.

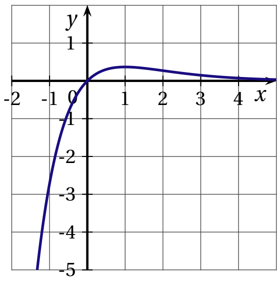
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

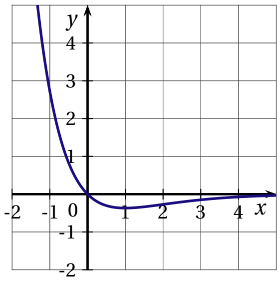


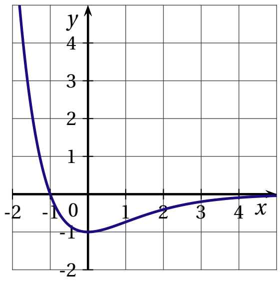
À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction dérivée f'.
3. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et l'autre celle de f''. Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.


Courbe C_1


Courbe C_2


Courbe C_3


Courbe C_4

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer, $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 2

Une entreprise agroalimentaire fabrique des plats cuisinés destinés à la consommation. Ces préparations culinaires sont d'abord conditionnées dans des emballages sous vide puis étiquetées.
Le conditionnement de ces préparations peut présenter deux défauts : un emballage sous vide défectueux ou l'absence de la date limite de consommation sur l'étiquette.

PARTIE A

Une étude statistique a permis de constater que :

— 5 % des préparations ne sont pas correctement emballées ;

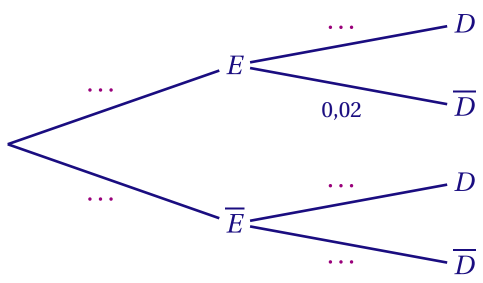
— la date limite de consommation est absente sur l'étiquette de 20 % des préparations qui ne sont pas correctement emballées et sur 2 % des préparations correctement emballées.

On prélève au hasard une préparation destinée à la vente et on considère les évènements suivants :

— E : « le plat est correctement emballé » ;

— D : « l'étiquette comporte une date limite de consommation ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2. Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap \overline{D}$.
3. Montrer que la probabilité d'une date limite de consommation absente sur l'étiquette est égale à 0,029.
4. La date limite de consommation ne figure pas sur l'étiquette, quelle est la probabilité que la préparation soit correctement emballée ?

PARTIE B

Les préparations culinaires correctement emballées sont commercialisées par l'entreprise.
On rappelle que parmi celles-ci, 2 % n'ont pas de date limite de consommation.

Un supermarché passe une commande de 100 plats cuisinés. Le stock est suffisamment important pour assimiler cette commande à un tirage aléatoire avec remise.

Pour un lot de 100 préparations, on note X la variable aléatoire égale au nombre de préparations sur lesquelles on note l'absence de date limite de consommation.

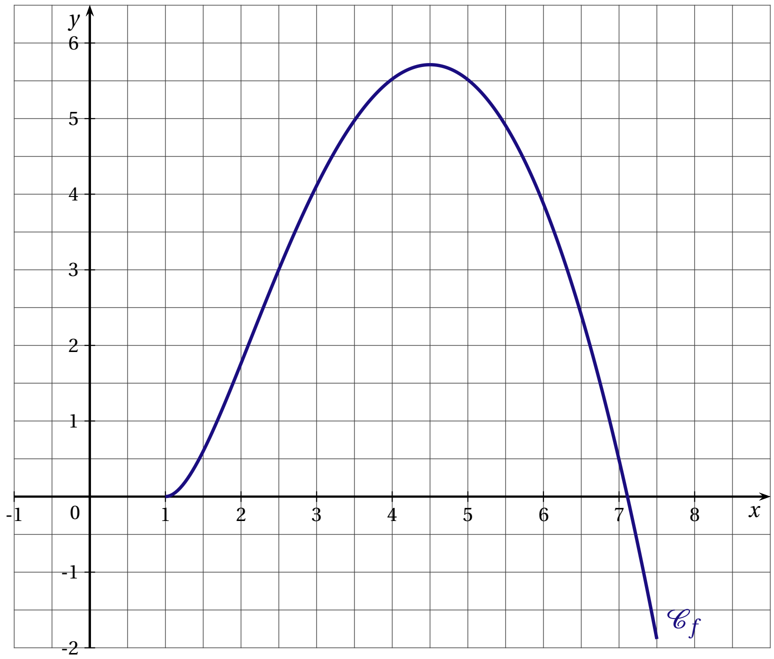
1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité $P(X = 0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

   b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geqslant 1)$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geqslant 5)$.

EXERCICE 3

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;7,5]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9\ln(x) - 10$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;7,5]$, on a $f'(x) = \dfrac{-2x^2+11x-9}{x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;7,5]$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
2. La dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;7,5]$ par $f''(x) = \dfrac{9}{x^2} - 2$.
   Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

PARTIE B : Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 750 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour x centaines de pièces fabriquées et vendues ($1 \leqslant x \leqslant 7,5$), est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[7;7,5]$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.
   b) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.
2. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.

SUJET B

EXERCICE 1

PARTIE A

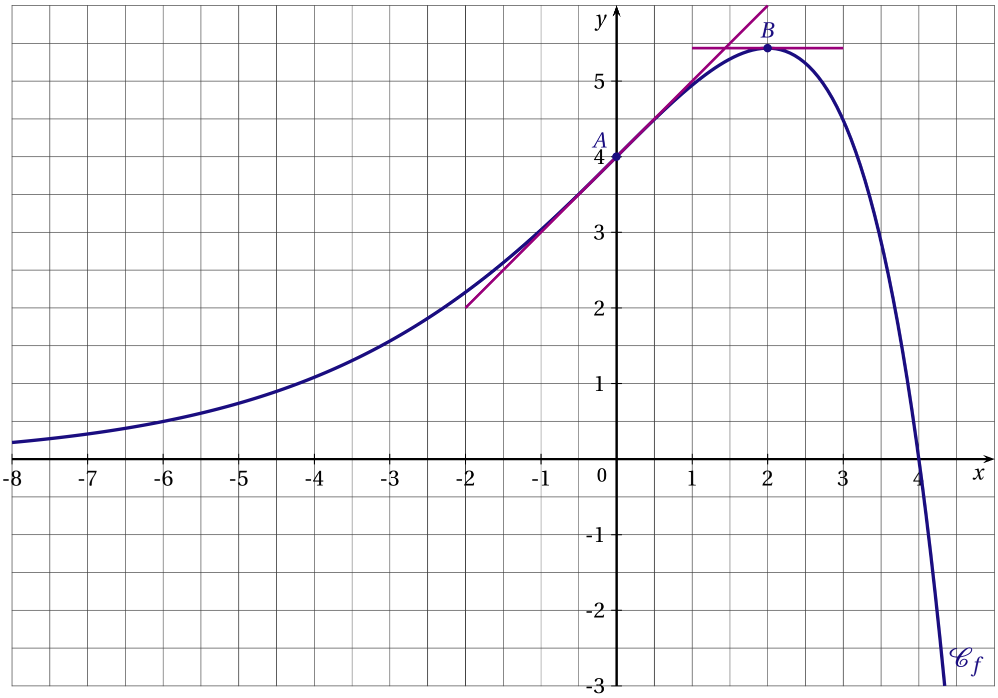
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

— Le point $A(0;4)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

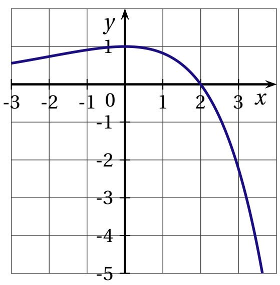
— La tangente au point A à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(-2;2)$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

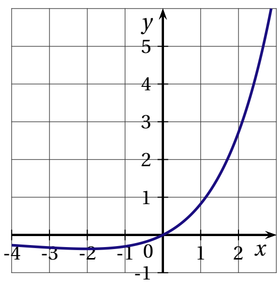


À partir du graphique et des renseignements fournis :

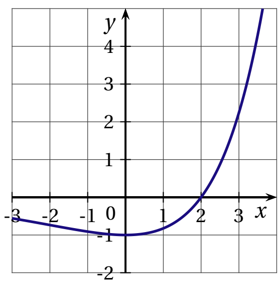
1. Déterminer $f'(2)$ et $f'(0)$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction dérivée f'.
3. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et l'autre celle de f''. Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.



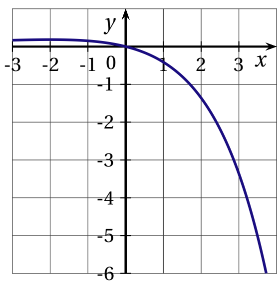
Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3



Courbe C_4

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (4-x)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1. Déterminer, $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 2

Une entreprise agroalimentaire fabrique des plats cuisinés destinés à la consommation. Ces préparations culinaires sont d'abord conditionnées dans des emballages sous vide puis étiquetées.
Le conditionnement de ces préparations peut présenter deux défauts : un emballage sous vide défectueux ou l'absence de la date limite de consommation sur l'étiquette.

PARTIE A

Une étude statistique a permis de constater que :

— 6 % des préparations ne sont pas correctement emballées ;

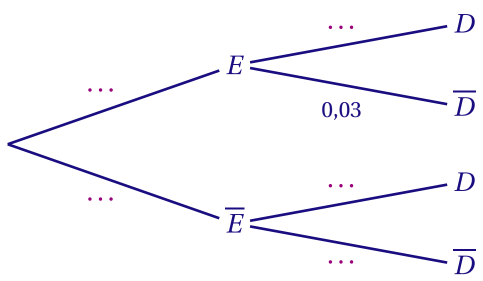
— la date limite de consommation est absente sur l'étiquette de 18 % des préparations qui ne sont pas correctement emballées et sur 3 % des préparations correctement emballées.

On prélève au hasard une préparation destinée à la vente et on considère les évènements suivants :

— E : « le plat est correctement emballé » ;

— D : « l'étiquette comporte une date limite de consommation ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2. Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap \overline{D}$.
3. Montrer que la probabilité d'une date limite de consommation absente sur l'étiquette est égale à 0,039.
4. La date limite de consommation ne figure pas sur l'étiquette, quelle est la probabilité que la préparation soit correctement emballée ?

PARTIE B

Les préparations culinaires correctement emballées sont commercialisées par l'entreprise.
On rappelle que parmi celles-ci, 3 % n'ont pas de date limite de consommation.

Un supermarché passe une commande de 60 plats cuisinés. Le stock est suffisamment important pour assimiler cette commande à un tirage aléatoire avec remise.

Pour un lot de 60 préparations, on note X la variable aléatoire égale au nombre de préparations sur lesquelles on note l'absence de date limite de consommation.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité $P(X=0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
   b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geqslant 1)$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geqslant 6)$.

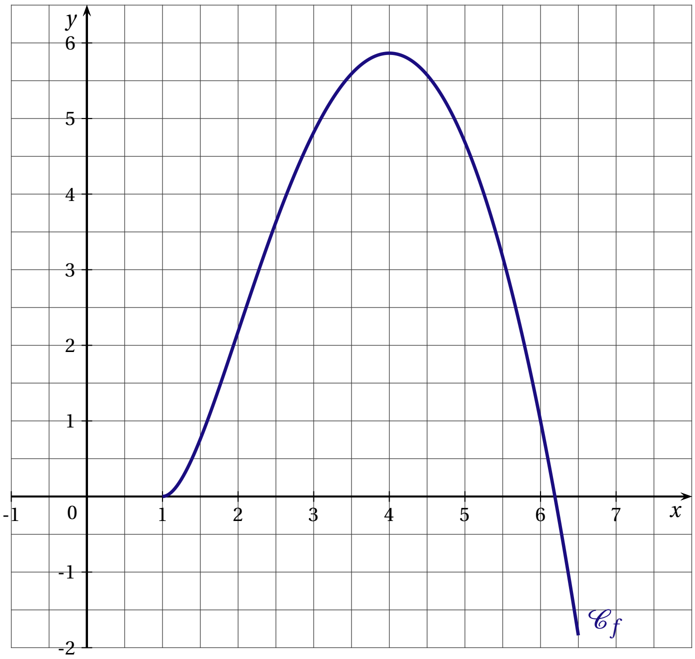
EXERCICE 3

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;6,5]$ par

$$f(x) = -1,5x^2 + 15x - 12\ln(x) - 13,5.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;6,5]$, on a $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 15x - 12}{x}$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;6,5]$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

2. La dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;6,5]$ par $f''(x) = \dfrac{12}{x^2} - 3$.
   Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

PARTIE B : Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 650 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour x centaines de pièces fabriquées et vendues ($1 \leqslant x \leqslant 6,5$), est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[6;6,5]$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.

   b) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

2. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.