

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les élèves

Une somme de 3 000 € a été empruntée auprès d'un organisme de crédit aux conditions suivantes :

- des mensualités de remboursement fixes de 150 € ;
- un taux d'intérêt mensuel de 1,5% sur le capital restant dû ;
- le capital restant dû peut être remboursé par anticipation.

On modélise les modalités de remboursement de ce prêt à l'aide d'une suite (u_n) .

Pour tout entier naturel n , le terme u_n de la suite est égal au montant du capital restant dû le n -ième mois après la date de l'emprunt.

On a ainsi $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,015u_n - 150$.

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

On veut déterminer le capital restant dû après un certain nombre de mois.

On donne ci-dessous deux algorithmes :

Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Entrée Saisir une valeur pour N Début traitement U prend la valeur 3000 Pour i de 1 à N faire U prend la valeur $1,015 \times U - 150$ Fin pour Afficher ARRondi ($U,2$) Fin traitement
--

algorithme 1

Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers Entrée Saisir une valeur pour N Début traitement Pour i de 1 à N faire U prend la valeur 3000 U prend la valeur $1,015 \times U - 150$ Fin pour Afficher ARRondi ($U,2$) Fin traitement
--

algorithme 2

1. Dans l'algorithme 1, l'utilisateur saisi la valeur $N = 6$.
 - a) Recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (*arrondir les valeurs calculées au centième*).

valeur de i	xxx	1	...
valeur de U	3 000		...

- b) Pour la valeur $N = 6$ saisie, quel affichage obtient-on en sortie de cet algorithme ?
Comment s'interprète cet affichage ?
2. En quoi l'algorithme 2 ne fournit pas la réponse attendue ?

PARTIE B

1. Pour tout nombre entier naturel n , on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 10000$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $u_n = 10000 - 7000 \times 1,015^n$.
2. a) Déterminer le plus petit entier N solution de l'inéquation $10000 - 7000 \times 1,015^n \leq 0$.
b) En déduire la durée de remboursement du prêt de 3 000 €.
c) Quelle sera le montant de la dernière mensualité ?
3. Calculer le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les élèves

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des composants électroniques. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le composant est conforme aux normes en vigueur.

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Les composants sont produits en grande quantité par deux machines A et B.

La machine A fournit 60 % de la production totale de composants et la machine B en fournit 40 %.

Une étude a permis d'établir que 97,6 % des composants produits par la machine A sont conformes et 6,4 % des composants produits par la machine B ne sont pas conformes.

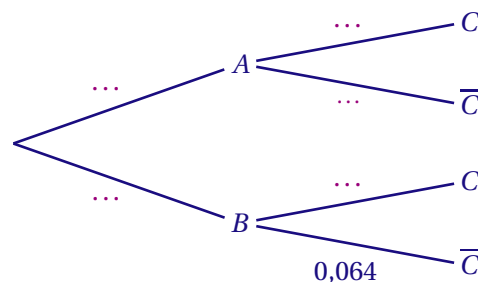
On prélève au hasard un composant parmi la production totale de l'entreprise.

Tous les composants ont la même probabilité d'être tirés.

On définit les événements suivants :

- A : « le composant provient de la machine A » ;
- B : « le composant provient de la machine B » ;
- C : « le composant est conforme ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2. Calculer la probabilité qu'un composant soit conforme et qu'il provient de la machine B.
3. Démontrer que $P(C) = 0,96$ et donner une interprétation de ce résultat.
4. Le composant est conforme. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine B ?

PARTIE B

On prélève au hasard 50 composants dans le stock. Ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à la répétition de 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 50 composants le nombre de composants non conformes.

On rappelle que la probabilité qu'un composant prélevé au hasard dans le stock soit conforme est égale à 0,96.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable X ? Préciser les paramètres.
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} près de chacun des événements suivants :
 - a) « L'échantillon contient deux composants non conformes » ;
 - b) « L'échantillon contient au moins deux composants non conformes ».

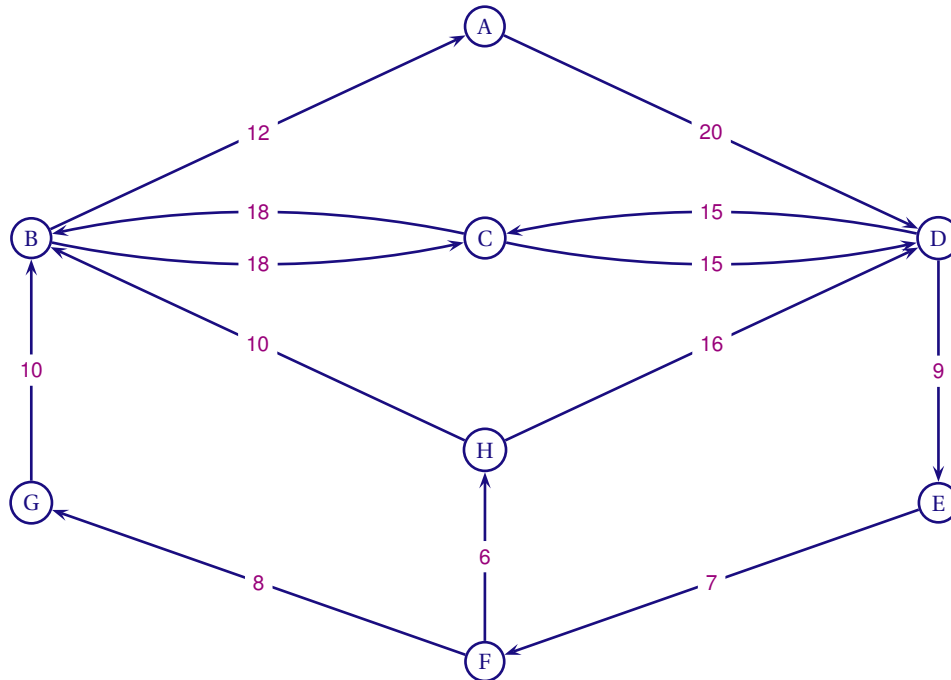
EXERCICE 3 (5 points)

Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES

Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A

Le graphe orienté ci-dessous modélise le plan de circulation des poids lourds entre différents villages d'une zone touristique. Les arêtes sont pondérées par les distances entre deux villages, exprimées en kilomètres.



Un fournisseur dont le dépôt est situé dans le village D doit effectuer une livraison de produits frais, en camion frigorifique, à un client du village B.

À l'aide d'un algorithme, déterminer l'itinéraire le plus court entre les villages D et B. Quelle est la distance parcourue?

PARTIE B

Une agence de voyage propose un circuit touristique pour visiter les trois villages A, B et C. Le client peut choisir la durée du séjour dans chaque village.

L'agence distingue deux périodes, la haute et la basse saison, et différencie ses tarifs selon la période.

Les tarifs dans les différents villages, en euro par personne et par jour, sont donnés dans le tableau suivant.

	Village A	Village B	Village C
Nombre de jours	1	1	1
Tarif haute saison	160	220	140
Tarif basse saison	130	180	110

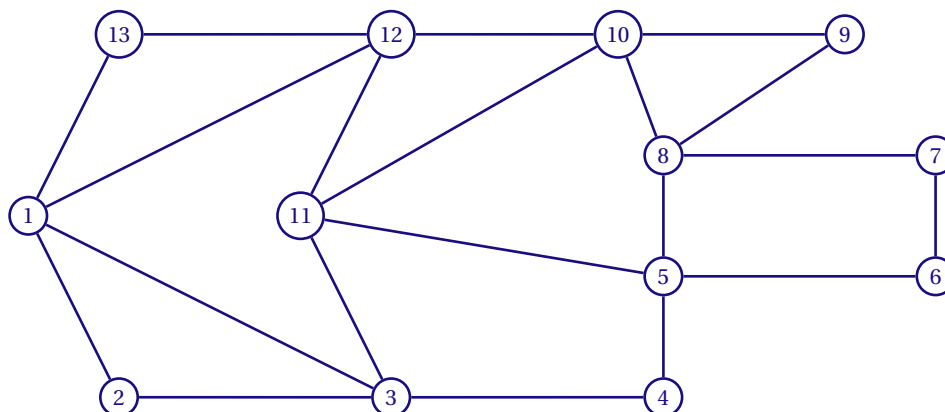
On note P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 160 & 220 & 140 \\ 130 & 180 & 110 \end{pmatrix}$.

Un client souhaite effectuer un circuit qui comprend quatre jours dans le village A, six jours dans le village B et deux jours dans le village C. On associe à ce choix la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $P \times S$. Que représentent les termes de la matrice obtenue?
2. Ce client dispose d'un budget de 2 000 €. Pourra-t-il réaliser son voyage?

PARTIE C

Dans le village C se trouve un camping dont le plan est schématisé par le graphe ci-dessous.
Les arêtes sont les allées du camping et les sommets les carrefours.



Afin d'optimiser le nettoyage des allées, le gestionnaire du camping souhaite établir un parcours qui passe une seule fois par chaque allée.
Un tel parcours est-il possible?

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les élèves

PARTIE A

Une entreprise fabrique un nouvel article. Le coût moyen de fabrication de chaque article est de 15 euros. L'entreprise envisage de vendre chaque article entre 20 euros et 45 euros.

Avant la commercialisation l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée en fonction du prix de vente.

L'étude a permis d'établir que, si chaque article est vendu au prix de x euros, la quantité d'articles demandés $f(x)$, en milliers d'unités, s'exprime par :

$$f(x) = (20x - 200)e^{-0,1x}.$$

La fonction de demande f est définie sur l'intervalle $[20; 45]$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée en annexe ci dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Si l'entreprise propose un prix de vente de 40 euros :
 - a) calculer le nombre d'articles demandés arrondi à la centaine d'articles près.
 - b) Estimer alors le bénéfice réalisé.
On rappelle que le coût moyen de fabrication d'un article est de 15 euros.
2. a) On note f' la dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[20; 45]$, $f'(x) = (40 - 2x)e^{-0,1x}$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[20; 45]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 11$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[20; 45]$.
b) En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer le prix de vente d'un article pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 11 000 unités.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	Dériver $[(40 - 2x) \cdot \exp(-0.1x)]$
	$\left(\frac{x}{5} - 6\right) \cdot \exp(-0.1x)$

Utiliser ce résultat pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

PARTIE B

On appelle fonction d'offre la fonction g , définie sur l'intervalle $[20; 45]$, par : $g(x) = x - 18$.

Le nombre $g(x)$ est le nombre de milliers d'articles que l'entreprise est prête à produire pour un prix de vente unitaire de x euros.

1. Tracer sur la feuille annexe la représentation graphique de la fonction g .
2. On appelle prix d'équilibre le prix unitaire x d'un article pour lequel l'offre est égale à la demande.
 - a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
 - b) En déduire une valeur approchée au millier près, du nombre d'articles que l'entreprise peut espérer vendre au prix d'équilibre.
 - c) Estimer alors le bénéfice réalisé.

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

