

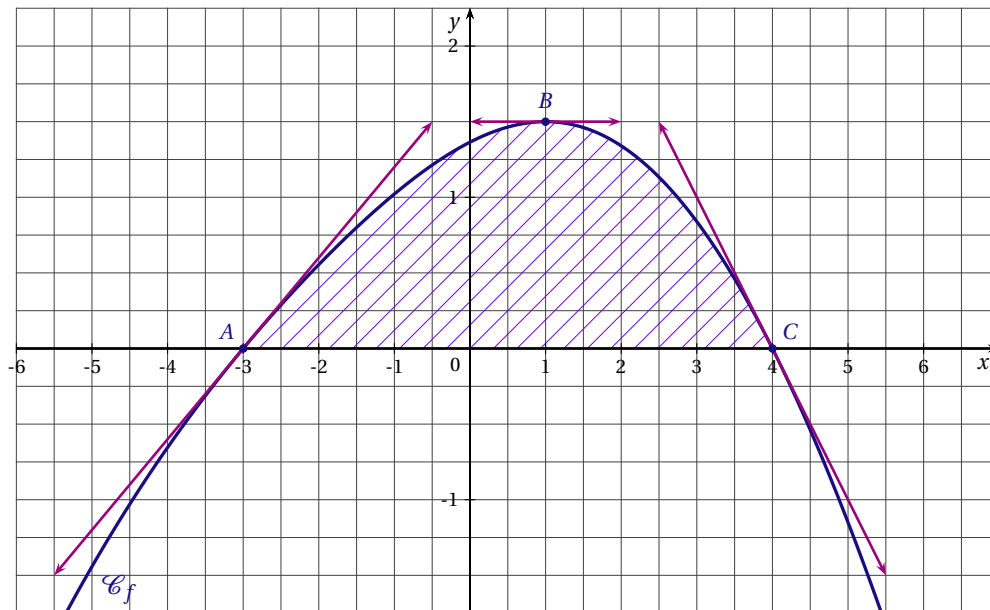
EXERCICE 1 (4,5 points)

Commun à tous les élèves

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse fausse ou une réponse multiple enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points $A(-3;0)$, $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$ et $C(4;0)$.



- On note f' la dérivée de la fonction f :
 - $f'(-3) = 0$
 - $f'(-3) = 2,4$
 - $f'(4) = -2$
 - $f'(4) = -1$
- On note F la primitive de la fonction f telle que $F(0) = 0$:
 - $F(-3) = F(4)$
 - $F(1) \geq F(4)$
 - $F(4) > 0$
 - $F(4) < 0$
- La fonction F :
 - est concave sur $]-\infty; -3[$
 - est convexe sur $]-3; 4[$
 - change de convexité pour $x = -3$ et $x = 4$
 - change de convexité pour $x = 1$
- On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré :
 - $\mathcal{A} = \int_4^{-3} f(x) dx$
 - $6 \leq \mathcal{A} \leq 7,5$
 - $13 \leq \mathcal{A} \leq 15$
 - $\mathcal{A} = F(-3) + F(4)$
- Pour estimer le pourcentage de personnes satisfaites d'une nouvelle émission de télévision, on a effectué un sondage. Un intervalle de confiance au seuil de 0,95 de la proportion p d'opinions favorables dans l'échantillon aléatoire est $[0,295; 0,3575]$.
La taille n de l'échantillon est :
 - $n = 256$
 - $n = 625$
 - $n = 984$
 - $n = 1024$
- On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[-1; 2]$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 1 sachant qu'il est positif est :
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{2}{3}$

EXERCICE 2 (5,5 points)

Commun à tous les élèves

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des batteries Lithium-ion pour smartphone.

PARTIE A

Ces batteries sont produites par trois ateliers. L'atelier A produit 15% des batteries, l'atelier B en produit 20% et l'atelier C fournit le reste de la production.

Le contrôle de qualité mis en place a permis d'établir que sur l'ensemble de la production 3% des batteries sont défectueuses, 6% des batteries produites dans l'atelier A sont défectueuses et 4% des batteries produites dans l'atelier B sont défectueuses.

On prélève au hasard une batterie parmi la production totale de l'entreprise et, on définit les événements suivants :

- A : « la batterie provient de l'atelier A »;
- B : « la batterie provient de l'atelier B »;
- C : « la batterie provient de l'atelier C »;
- D : « la batterie est défectueuse ».

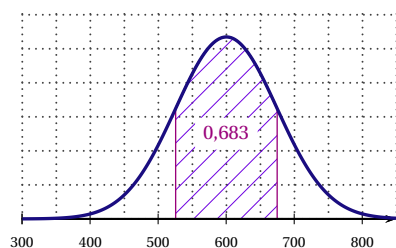
1. a) En utilisant l'énoncé, donner les probabilités $P(D)$, $P_A(D)$, $P_B(D)$ et calculer $P(C)$.
b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer $P(A \cap D)$ et formuler une interprétation de ce résultat.
3. a) Montrer $P(C \cap D) = 0,013$.
b) En déduire la probabilité qu'une batterie produite par l'atelier C soit défectueuse.
4. La batterie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par l'atelier A?
5. On prélève au hasard 10 batteries dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à 10 tirages avec remise.
Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que parmi les 10 batteries, il y en ait au moins une qui soit défectueuse?

PARTIE B

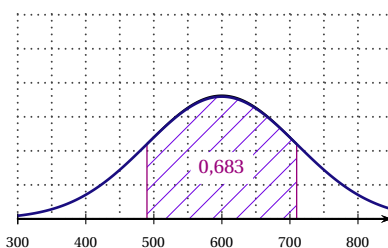
Le nombre de cycles de charge d'une batterie est appelé durée de vie de la batterie.

La durée de vie des batteries Lithium-ion mises en vente par cette entreprise est modélisée par la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 74,6$.

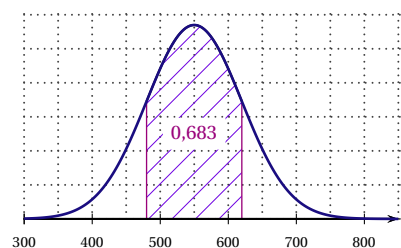
1. La fonction densité associée à X est représentée sur un seul de trois graphiques ci-dessous.
Quel est ce graphique? Expliquer le choix.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

2. a) Déterminer $P(550 \leq X \leq 1000)$ en donnant le résultat arrondi au centième.
b) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une batterie soit inférieure à 500 cycles de charge?

PARTIE C

Le service commercial affirme que 91% des batteries proposées à la vente ont une durée de vie supérieure à 500 cycles de charge.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire indépendant a reconstitué la vie de 100 batteries en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer leur durée de vie en fonction de différents facteurs.

Sur ce lot, on a constaté que 13 batteries ont eu une durée de vie inférieure à 500 cycles de charge.

Le résultat de ce test remet-il en question l'affirmation du service commercial?

EXERCICE 3 (5 points)

Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES

La température d'un gâteau à la sortie du four est de 160°C.

L'évolution de la température du gâteau en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 160$ et, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,94 \times T_n + 1,5$.

Pour tout entier naturel n , le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius du gâteau n minutes après la sortie du four.

PARTIE A

1. Quelle est la température, arrondie au degré près, du gâteau 5 minutes après la sortie du four?
2. Pour déterminer au bout de combien de minutes la température du gâteau sera inférieure ou égale à 30°C, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0 Affecter à T la valeur 160
TRAITEMENT :	Tant que ... Affecter à T la valeur ... Affecter à N la valeur Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

PARTIE B

1. Pour tout nombre entier naturel n , on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 25$.
 - a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $T_n = 135 \times 0,94^n + 25$.
2. Calculer la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat.
3. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $135 \times 0,94^n + 25 \leq 30$.
b) En déduire la valeur N affichée par l'algorithme de la partie A.

EXERCICE 3 (5 points)

Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité ES

Un industriel décide de modifier l'emballage d'un de ses produits.

On note A le conditionnement actuel du produit et B le nouveau conditionnement.

À partir des études réalisées au préalable, la direction commerciale estime que 28 % des consommateurs choisissant le conditionnement A et 12 % des consommateurs choisissant le conditionnement B changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Pour tout entier naturel n , on note a_n et b_n les probabilités qu'un consommateur choisisse respectivement le conditionnement A et le conditionnement B le n -ième mois après la mise sur le marché du conditionnement B et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n -ième mois après la mise sur le marché du nouveau conditionnement. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

- Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
- Donner la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
 - Calculer la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement B deux mois après sa mise sur le marché.
- On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
Déterminer les réels a et b . Interpréter ce résultat.

PARTIE B

L'industriel décide de ne plus proposer le conditionnement A à partir du mois où il prévoit que moins de 32 % des consommateurs choisiront ce conditionnement.

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,12$.
- Pour déterminer au bout de combien de mois le conditionnement A sera retiré du marché, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel A est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0 Affecter à A la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que ... Affecter à A la valeur ... Affecter à N la valeur Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

- Pour tout nombre entier naturel n , on définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,3$.
 - Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $a_n = 0,7 \times 0,6^n + 0,3$.
- Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,7 \times 0,6^n + 0,3 \leq 0,32$.
En déduire au bout de combien de mois, le conditionnement A sera retiré du marché.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les élèves

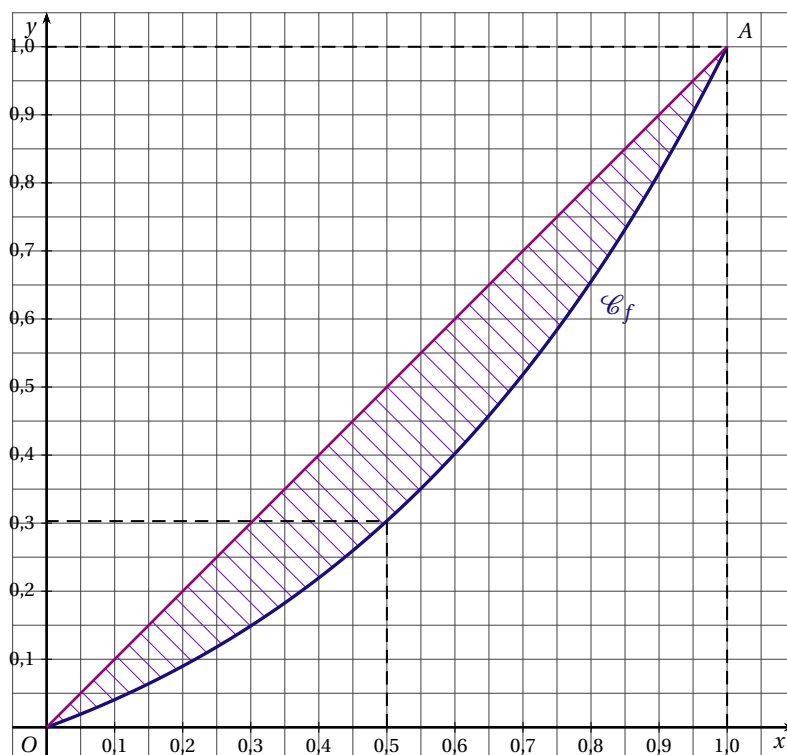
PARTIE A

Soit f une fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{x-1}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq x$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
3. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0; 1]$.
5. Vérifier que la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $F(x) = (x-1)e^{x-1}$ est une primitive de la fonction f .

PARTIE B

La courbe $\mathcal{C}_f$, représentative de la fonction f , est la courbe de Lorenz qui modélise la répartition des salaires d'une entreprise.



- sur l'axe des abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale correspondante.

Par exemple $f(0,5) \approx 0,303$ signifie que : « environ 30,3% de la masse salariale est détenue par la moitié des employés ayant les salaires les plus faibles ».

1. Déterminer la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles qui détiennent 50 % de la masse salariale. (On donnera le résultat arrondi à 0,1% près.)
2. On mesure l'inégalité de la répartition en comparant l'écart entre la situation d'équité parfaite et la situation réelle.

On définit alors l'indice de Gini noté γ par $\gamma = 2 \times \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré compris entre le segment $[OA]$ et la courbe de Lorenz $\mathcal{C}_f$.

a) Montrer que $\gamma = 1 - 2 \times \int_0^1 f(x) dx$.

b) Calculer γ . (On donnera la valeur exacte de γ et la valeur arrondie à 10^{-3} près.)