CONTRÔLE N° 8

EXERCICE 1

PARTIE A

Un magasin vend deux sortes d'articles électroménager ou informatique. Pour chaque article une extension de garantie est proposée lors de l'achat.
Une étude statistique sur les factures des ventes réalisées a permis d'établir que :

— L'électroménager représente 40 % des ventes.

— L'extension de garantie a été souscrite pour 12 % des appareils d'électroménager vendus et pour 24 % des appareils du rayon informatique vendus.

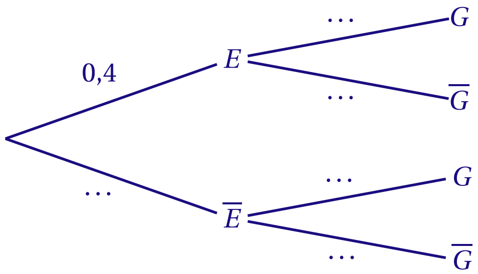
On prélève au hasard la facture d'un appareil vendu. On note :

— E l'évènement « la facture est celle d'un appareil électroménager »

— G l'évènement « une extension de garantie a été souscrite »

On rappelle que si A et B sont deux évènements, la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2. Calculer la probabilité que la facture choisie soit celle d'un appareil électroménager vendu avec une extension de garantie.
3. Montrer que $P(G) = 0{,}192$.
4. Calculer $P_G(\overline{E})$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} près.

À la fin d'un mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures, associe son montant en euros.
On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 125$.

1. Calculer $P(400 \leqslant M \leqslant 900)$.
2. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 300 euros le magasin propose le paiement en trois fois sans frais.

   Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais.

EXERCICE 2

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 45 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 70 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2016, 72 % des clients paient en une fois et 28 % paient mensuellement.
Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

— a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2016+n$;

— b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2016+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & bn \end{pmatrix}$ l'état probabiliste pour l'année $2016+n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}$.
On note :

— A l'état « le client paie en une fois » ;

— B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018.
4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.
5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0{,}25a_n + 0{,}3$.
6. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 0{,}4$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0{,}32 \times 0{,}25^n + 0{,}4$.
7. Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n \leqslant 0{,}401$.