CONTRÔLE N° 6

EXERCICE 1

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au millième près.

PARTIE A

Un fabricant de smartphone a constaté que 3,5 % des appareils produits présentaient une fragilité au niveau de l'écran tactile.

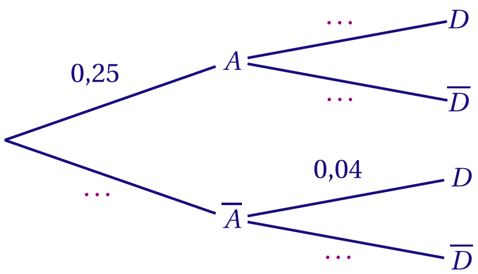
1. En vue d'un contrôle de qualité, ce fabricant prélève au hasard un échantillon de 10 appareils.
   On considère que le nombre de smartphones est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 appareils.
   On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de smartphones qui ont une fragilité au niveau de l'écran tactile.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
   b) Calculer la probabilité que dans le lot, un seul appareil a une fragilité au niveau de l'écran.
   c) Calculer la probabilité que dans le lot, au moins un appareil a une fragilité au niveau de l'écran.
2. On prélève au hasard n appareils. On note Y la variable aléatoire qui associe le nombre de smartphones qui ont une fragilité au niveau de l'écran.
   On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}035$.
   a) On note p_n la probabilité que l'un au moins de ces n smartphones a une fragilité au niveau de l'écran.
   Justifier que $p_n = 1 - 0{,}965^n$.
   b) Déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :
   $$1 - 0{,}965^n \geqslant 0{,}99$$
   Interpréter le résultat.

PARTIE B

Les écrans des smartphones produits par ce fabricant proviennent de deux fournisseurs notés A et B.
2 % des écrans qui proviennent du fournisseur A sont défectueux et 4 % des écrans qui proviennent du fournisseur B sont défectueux.
Pour des raisons de prix, 25 % des écrans utilisés pour la production des smartphones proviennent du fournisseur A.
On choisit au hasard un écran dans l'ensemble des écrans. On considère les événements suivants :

— A : « l'écran provient du fournisseur A » ;
— D : « l'écran est défectueux ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :

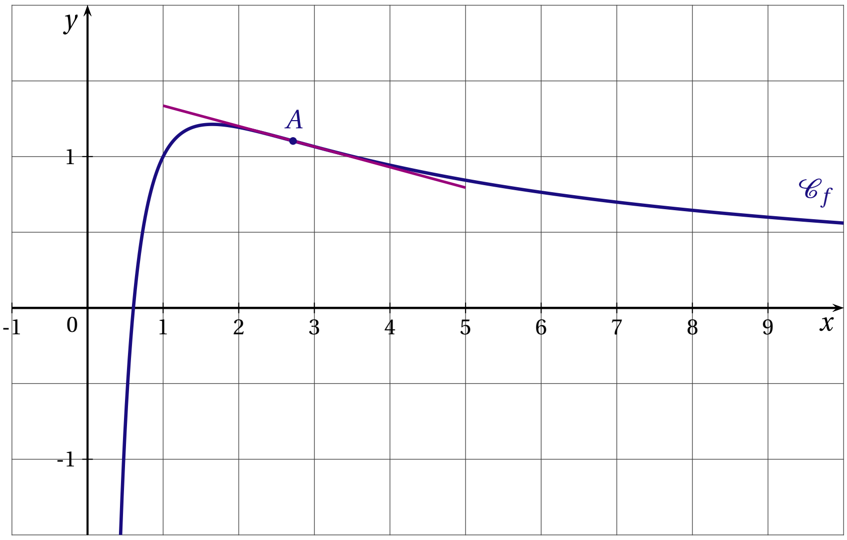


2. Calculer la probabilité que l'écran n'ait pas de défaut et provienne du fournisseur B.
3. Montrer que la probabilité qu'un écran n'a pas de défaut est égale à 0,965.
4. Quelle est la probabilité qu'un écran défectueux provienne du fournisseur B ?

EXERCICE 2

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente au point A d'abscisse e.



Les réponses aux deux questions suivantes seront justifiées à partir du graphique.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Comparer $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et $f'\left(\mathrm{e}^2\right)$.
2. Donner le tableau des variations de la dérivée f'.

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$.
   c) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point B d'abscisse 1.
3. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
   b) Donner les valeurs, éventuellement arrondies à 10^{-3} près, de chacune des solutions.
4. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = \dfrac{4\ln(x)-4}{x^3}$.
   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.