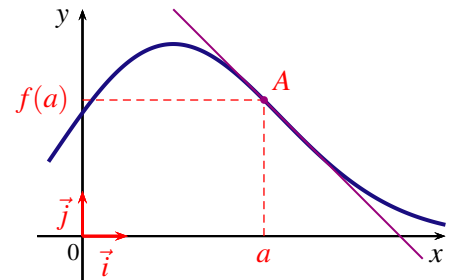


I DÉRIVÉES

1 TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a .



Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

f définie sur ...	$f(x)$	$f'(x)$	f dérivable sur ...
\mathbb{R}	k	0	\mathbb{R}
\mathbb{R}	$ax + b$	a	\mathbb{R}
\mathbb{R}	x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R} pour n entier $n \geq 2$
\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^* pour n entier $n \geq 1$
$]0; +\infty[$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

$$\bullet (u + v)' = u' + v' \qquad \bullet (ku)' = k \times u' \qquad \bullet (uv)' = u'v + uv'$$

$$\bullet (u^2)' = 2uu' \qquad \bullet \text{Si } n \text{ est un entier non nul, } (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I (si $v(x) \neq 0$ sur I)

$$\bullet \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad \bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

4 DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si f est constante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

THÉORÈME 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et f' la dérivée de f sur I .

- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et x_0 un réel appartenant à I .

1. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

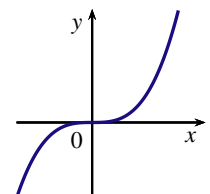
REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction cube définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 3x^2$.

$f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et n'admet pas d'extremum en 0.

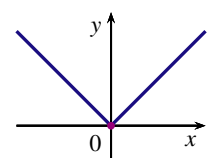


2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction valeur absolue f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$.

f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

f admet un minimum $f(0) = 0$ or f n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - \frac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

Sur \mathbb{R} , f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f = 1 - \frac{u}{v}$ d'où $f' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x - 3 & \text{d'où} & \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2 + 1 & \text{d'où} & \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$:

Pour tout réel x , $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a=4$, $b=-6$ et $c=-4$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \\ \text{et } x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2 \end{aligned}$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗ 5		↘ 0 ↗		

II CONTINUITÉ ET ÉQUATION

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

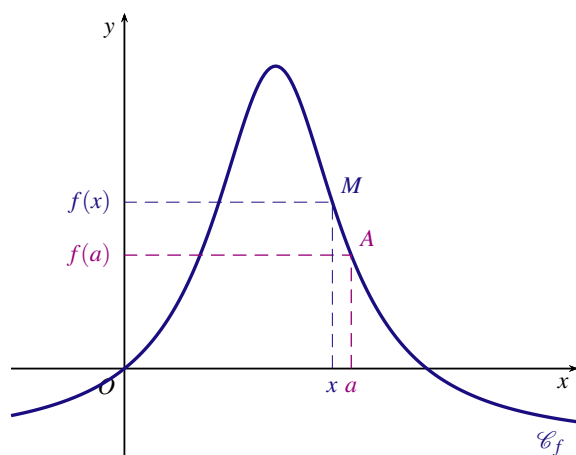
Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

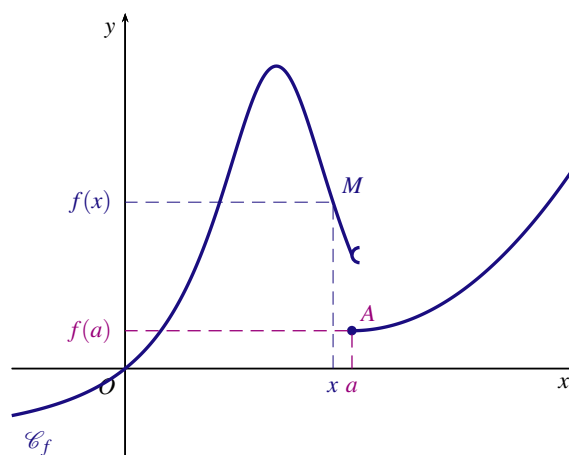
On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a .

Pour tout réel x de l'intervalle I , on considère le point M de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse x



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a .



La fonction f n'est pas continue en a .

La courbe \mathcal{C}_f présente un saut au point d'abscisse a .
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a .

2 PROPRIÉTÉS

THÉORÈME (admis)

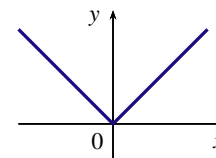
Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

REMARQUE

La réciproque du théorème est fautive :

Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.

Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

III CONTINUITÉ ET ÉQUATION

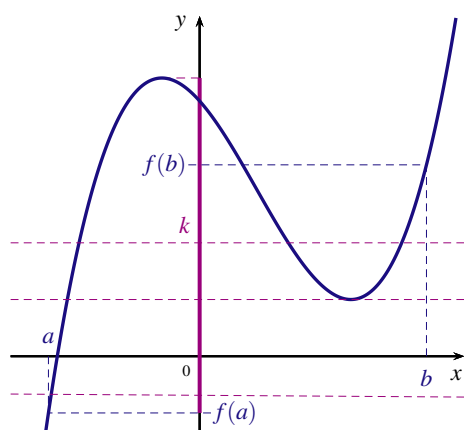
1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME (admis)

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et continue sur I alors elle vérifie la propriété suivante : quels que soient les réels a et b de l'intervalle I , pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

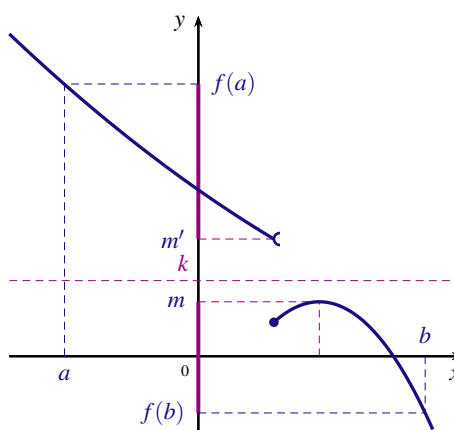
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de \mathbb{R} par une fonction continue est un intervalle de \mathbb{R} .

f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a; b]$ est un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a; b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a; b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

2 THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

COROLLAIRE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et a, b deux réels appartenant à I , $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** c appartenant à $[a; b]$.

* DÉMONSTRATION

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence

Par hypothèse, f est continue sur $[a; b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

2. Unicité

Supposons que l'équation $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2 appartenant à $[a; b]$

Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$

Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2) = k$

Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$

REMARQUES

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$

2. Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $]a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$, $]a; +\infty[$, $]a; +\infty]$, $] -\infty; b]$ ou $] -\infty; b[$.

IV CONVEXITÉ

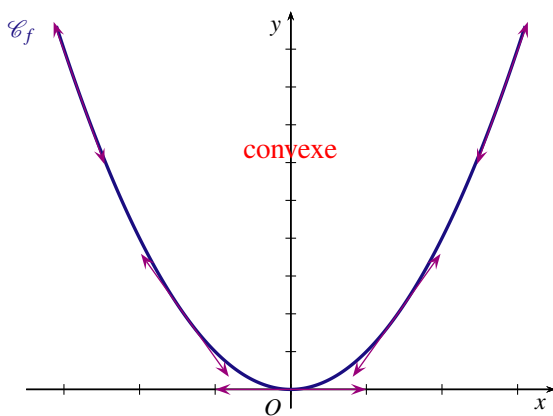
1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

DÉFINITIONS

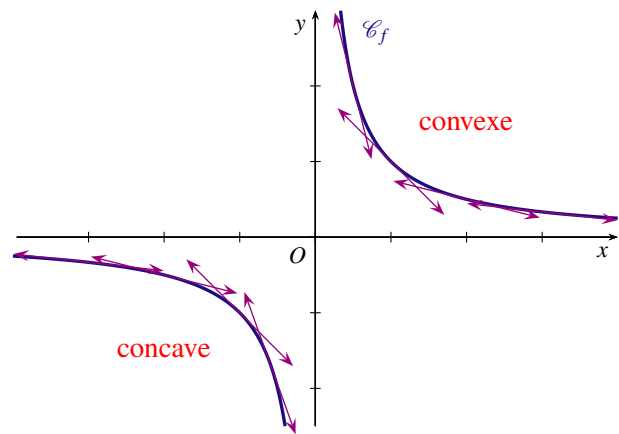
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe \mathcal{C}_f est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe \mathcal{C}_f est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

EXEMPLES



La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe.

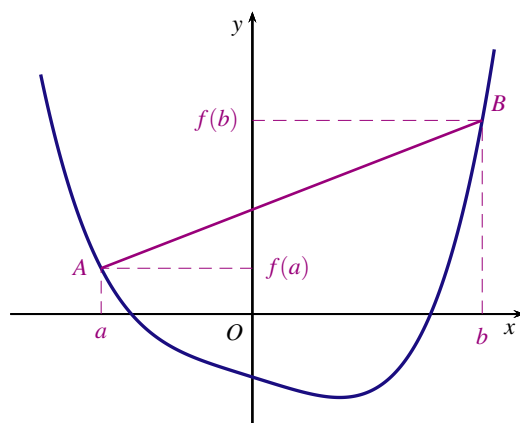


La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$

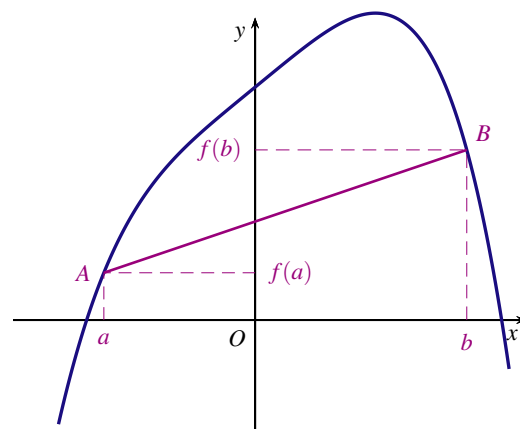
REMARQUE

Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe \mathcal{C}_f

- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



f est convexe.



f est concave

THÉORÈME (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I .
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I .

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f , c'est à dire la dérivée de la dérivée f' .

- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur \mathbb{R} par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' .

Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f''(x)$	-	0	+
variations de f'			
convexité de f	CONCAVE		CONVEXE

f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.

2 POINT D'INFLEXION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

S'il existe un point A de la courbe \mathcal{C}_f tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

EXEMPLE

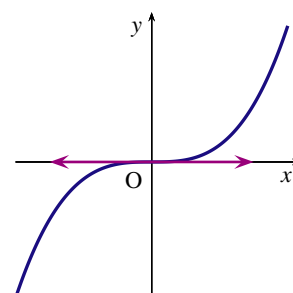
La courbe représentative de la fonction cube définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $O(0;0)$ du repère.

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction cube.

La tangente au point O à la courbe \mathcal{C}_f est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ donc la courbe \mathcal{C}_f est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty; 0]$.
- Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de la tangente en O sur $[0; +\infty[$.

La courbe \mathcal{C}_f traverse sa tangente en O donc $O(0;0)$ est un point d'inflexion.



CONSÉQUENCES

- En un point d’inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d’inflexion d’abscisse a .
- Si la dérivée seconde f'' s’annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d’inflexion d’abscisse a .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur \mathbb{R} par $f''(x) = 20x^2(x - 3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.

Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

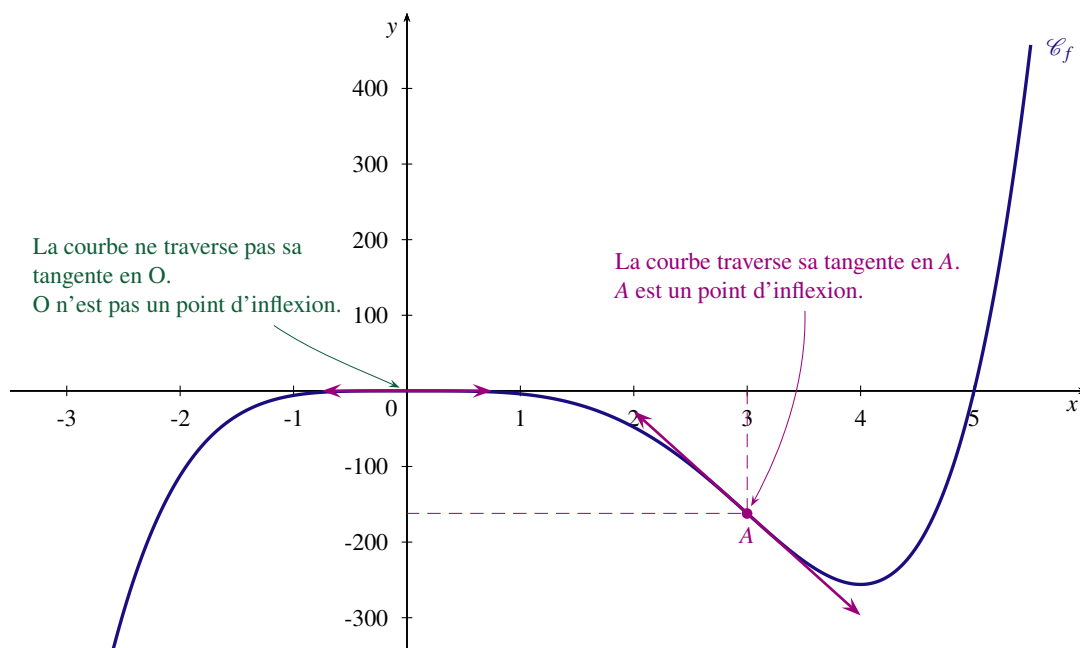
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' . D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		-	0	-	0	+	
variations de f'							

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe \mathcal{C}_f admet un seul point d’inflexion, le point $A(3; f(3))$.

En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l’intervalle $] - \infty; 3]$ $f''(x) \leq 0$ donc le point de la courbe \mathcal{C}_f d’abscisse 0, n’est pas un point d’inflexion. (La fonction f est concave sur $] - \infty; 3]$).
- f'' s’annule en 3 en changeant de signe donc le point $A(3; -162)$ est un point d’inflexion de la courbe \mathcal{C}_f . (La fonction f est concave sur $] - \infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



EXERCICE 1

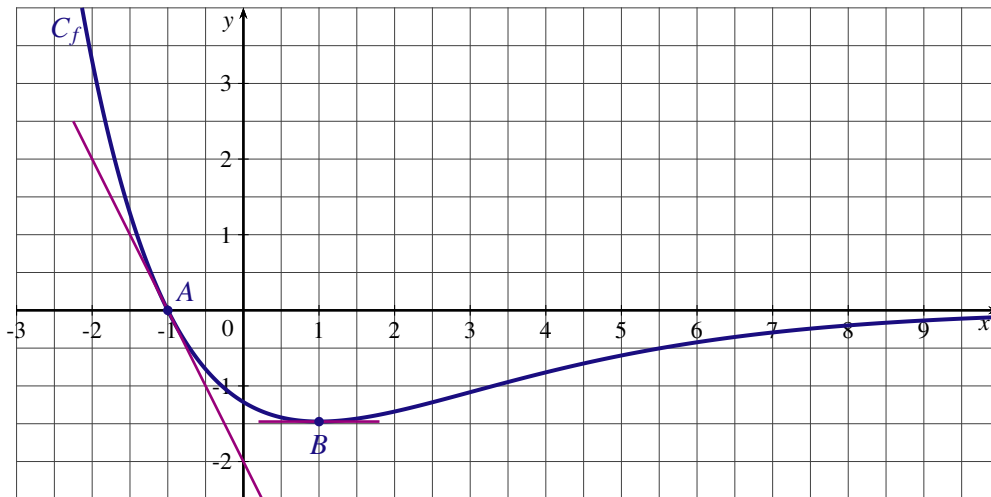
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = 8x^2 - 2x - \frac{9}{2x+3}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{8x(8x^2 + 23x + 15)}{(2x+3)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f .

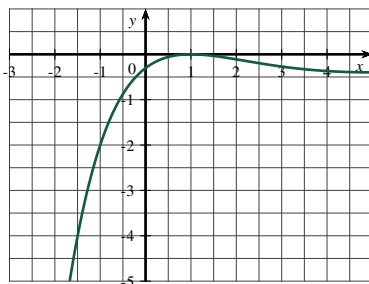
EXERCICE 2

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On sait que :

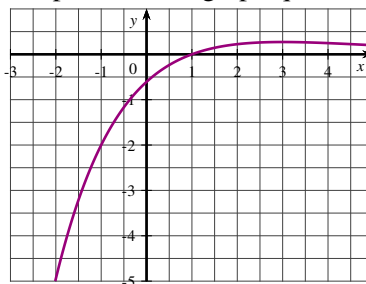
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0; -2)$;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;



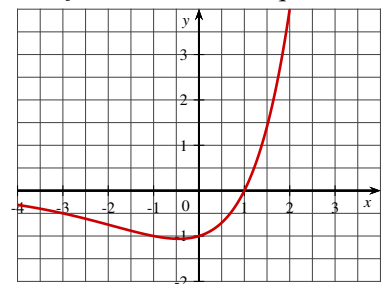
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

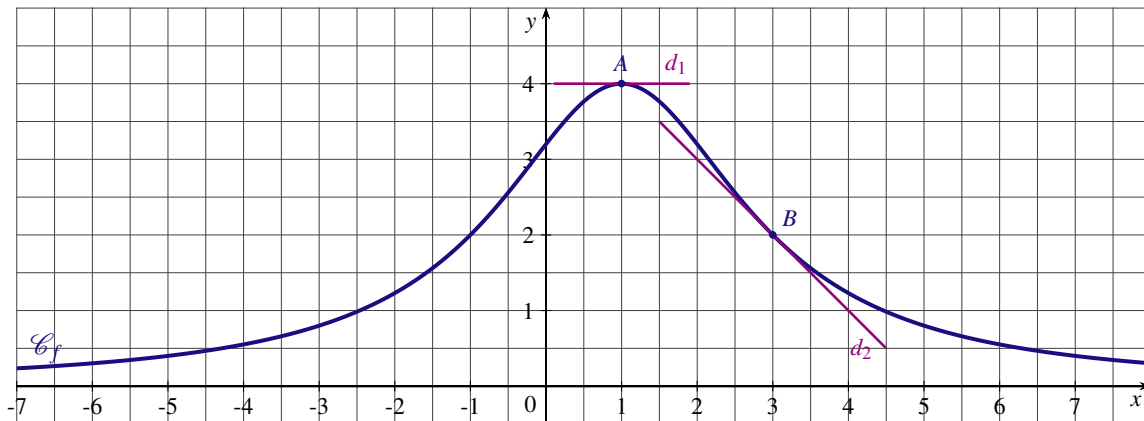
EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer la dérivée de la fonction f .
2. Étudier les variations de f .
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4

La courbe \mathcal{C}_f ci-dessous représente une fonction f strictement positive et dérivable sur \mathbb{R} .



On sait que :

- Les droites d_1 et d_2 sont tangentes à la courbe aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 3 ;
- La tangente T à la courbe au point d'abscisse -1 a pour équation $y = x + 3$.

On note f' la dérivée de la fonction f .

1. Tracer la droite T puis, déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(1)$ et $f'(3)$.
3. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 - a) Donner le tableau des variations de la fonction g .
 - b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse -1 .

EXERCICE 5

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3	1	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$	-1

1. a) La fonction f est-elle continue sur $] -3; +\infty[$?
 b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
 c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f . Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
 - a) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5; +\infty[$
 - b) $f'(-2) \times f'(0) \leq 0$
 - c) $f'(-2) \times f'(3) \leq 0$

EXERCICE 6

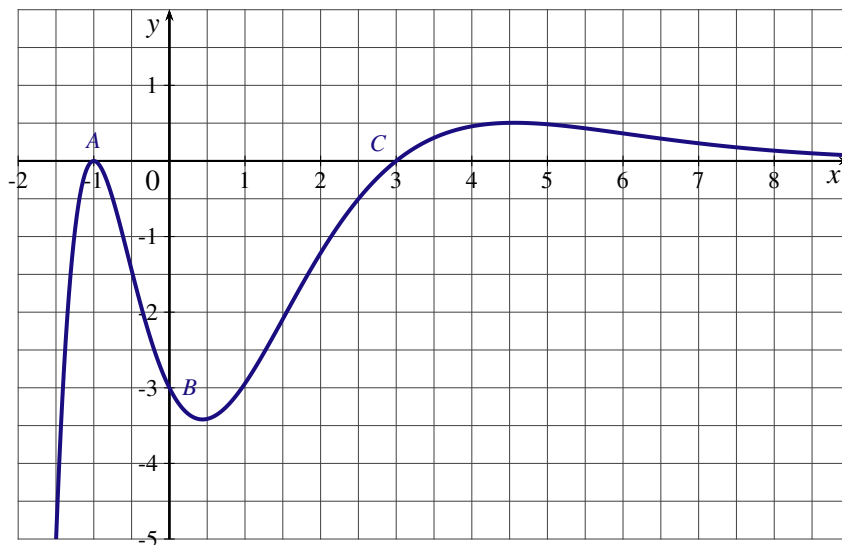
Soit f la fonction définie $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$. On note f' sa dérivée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f .
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 7

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , dans un repère orthonormé.

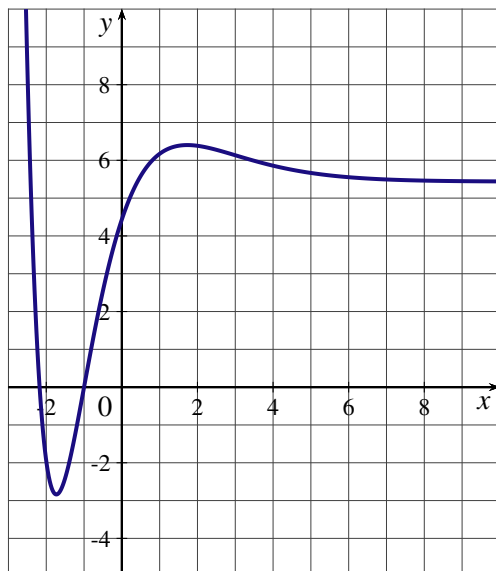
Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



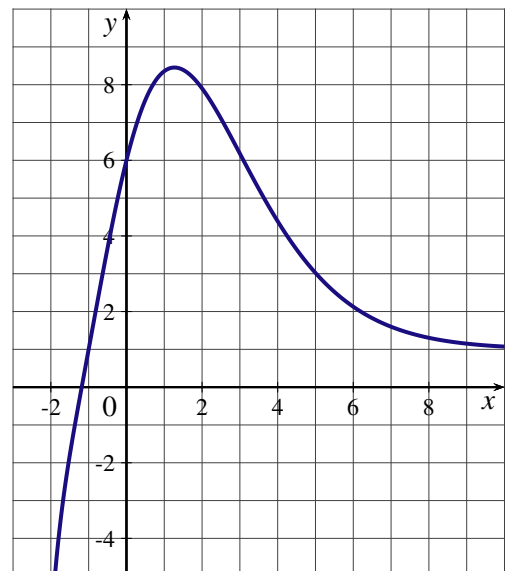
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

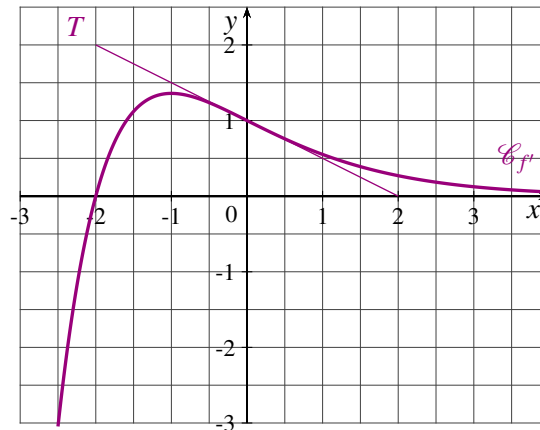


Courbe 2



EXERCICE 8

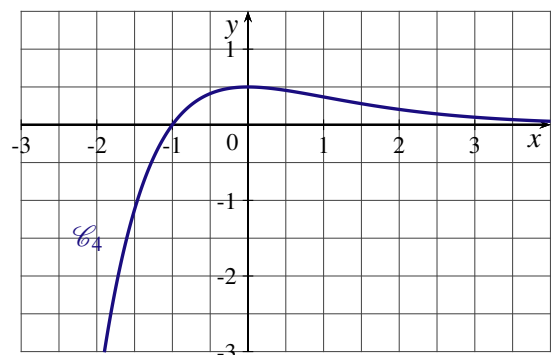
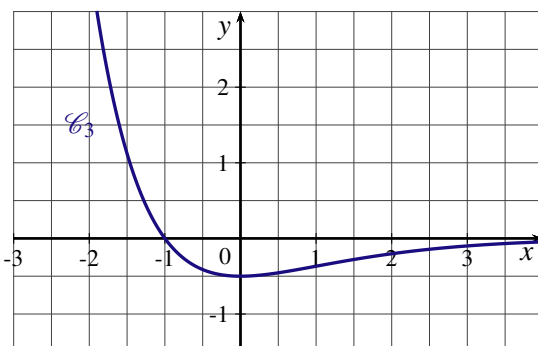
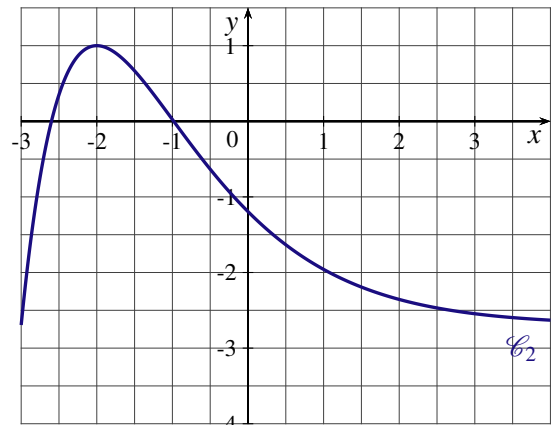
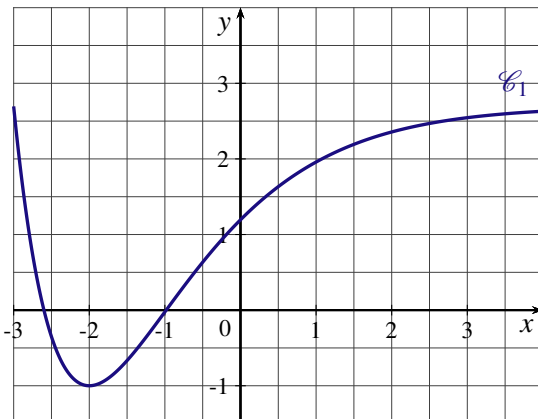
Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique :

- a) Résoudre $f'(x) = 0$.
- b) Résoudre $f''(x) = 0$.
- c) Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .



- a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f'' .
- b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
- c) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 9

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

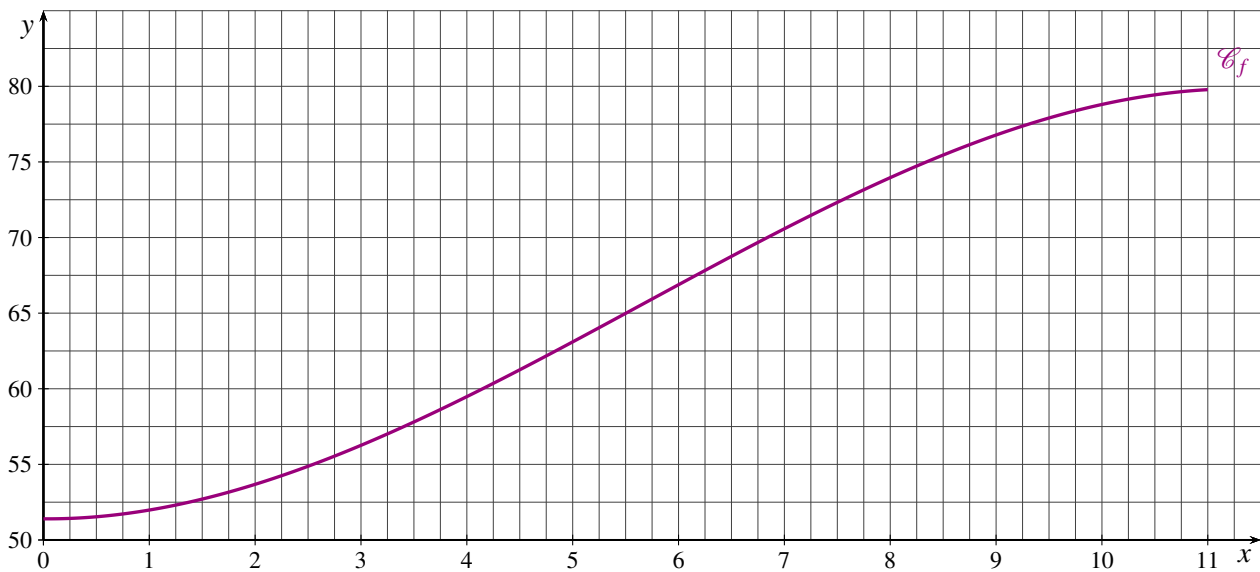
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



- Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
 - Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
 - La courbe \mathcal{C}_f a-t-elle un point d'inflexion ?
- Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f .
Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

EXERCICE 10

PARTIE A

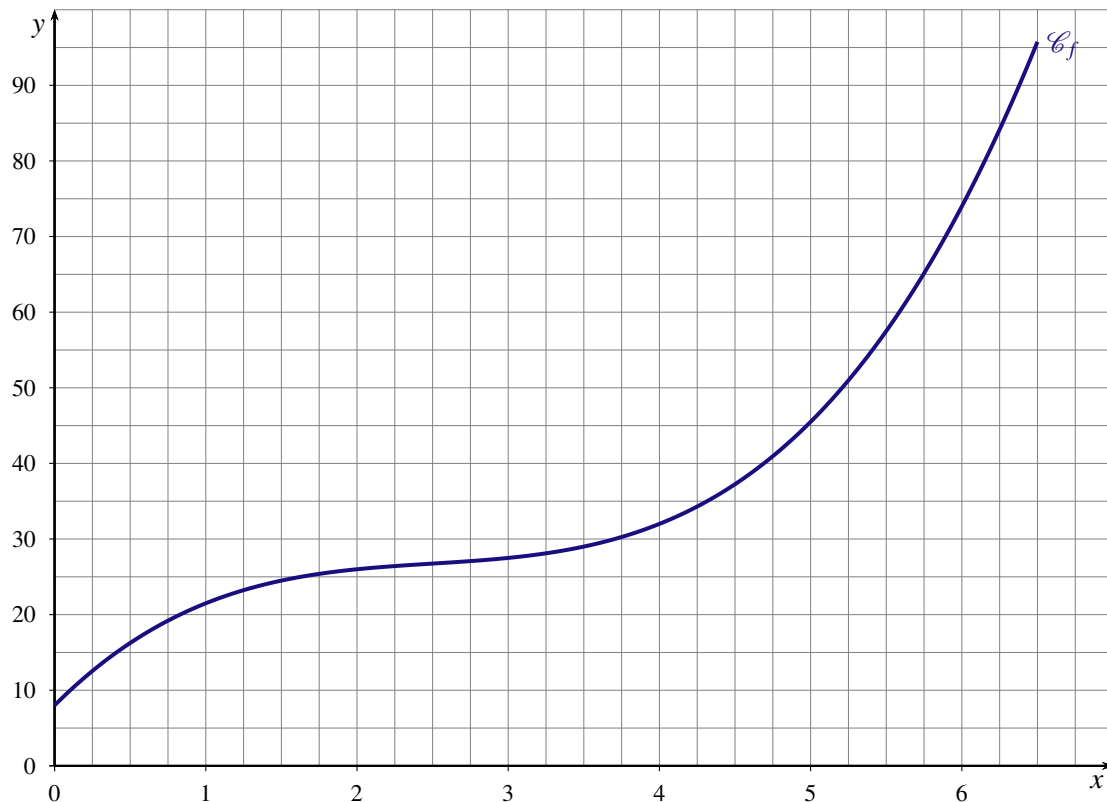
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 20x + 8$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan.

- Étudier les variations de la fonction f .
- Étudier la convexité de la fonction f .
 - La courbe \mathcal{C}_f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0; 6,5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0; 6,5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
 - a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
 - b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0 ; 6,5]$ par $B(x) = 13,25x - f(x)$.
 - a) Étudier les variations de la fonction B sur $]0 ; 6,5]$.
 - b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f .
Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

PARTIE C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0; 6,5]$ par $C(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe \mathcal{C}_f .
 - a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
 - b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .
 - a) Montrer $C'(x) = \frac{(x-4)(2x^2 + 0,5x + 2)}{x^2}$.
 - b) Étudiez les variations de la fonction C .
 - c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.