# I SUITES GÉOMÉTRIQUES

## 1 DÉFINITION

Dire qu'une suite $(u_n)$ est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel $q$ non nul tel que, pour tout entier $n$,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel $q$ est appelé la raison de la suite géométrique.

### ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \frac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1 - \frac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5% par an.
   On note $C_n$ le capital disponible au bout de $n$ années alors :
   $$C_{n+1} = \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right) \times C_n = 1{,}015 \times C_n$$
   Ainsi, la suite $(C_n)$ est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1{,}015$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note $r_n$ la quantité de rejets l'année $2012 + n$ d'où :
   $$r_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{100}\right) \times r_n = 0{,}96 \times r_n$$
   Ainsi, la suite $(r_n)$ est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

## 2 PROPRIÉTÉ 1

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ alors pour tout entier $n$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0{,}96^{10} \approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

## 3 PROPRIÉTÉ 2

Si $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ alors pour tout entier $n$ et pour tout entier $p$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

## 4 MONOTONIE

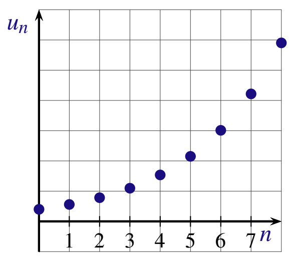
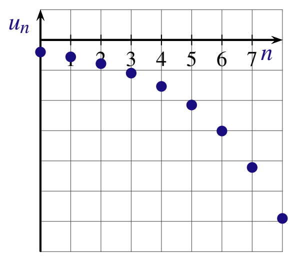
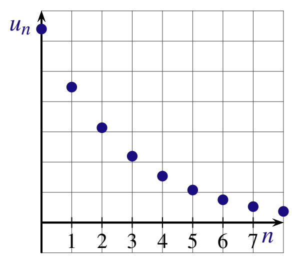
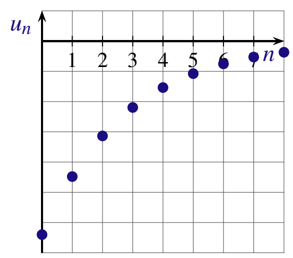
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de $u_0$, $q^n$ et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors $q^n$ est positif pour $n$ pair, négatif pour $n$ impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$ .

| Si $q > 1$ | | Si $0 < q < 1$ | |
|---|---|---|---|
| Si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)$ est croissante   | Si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante   | Si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante   | Si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)$ est croissante   |

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit $q$ un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite $(q^n)$ n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite $(q^n)$ est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite $(q^n)$ est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite $(q^n)$ est constante.

THÉORÈME 2

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ non nulle et de premier terme $u_0$ non nul

— Si $q < 0$ alors la suite $(u_n)$ n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite $(u_n)$ a le même sens de variation que la suite $(q^n)$.

— Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite $(u_n)$ a le sens de variation contraire de celui de la suite $(q^n)$.

### 5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0$ alors pour tout entier $n$,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme $S$ de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme } \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

## II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite $(u_n)$ quand $n$ prend de grandes valeurs.

### 1 LIMITE INFINIE

#### DÉFINITION

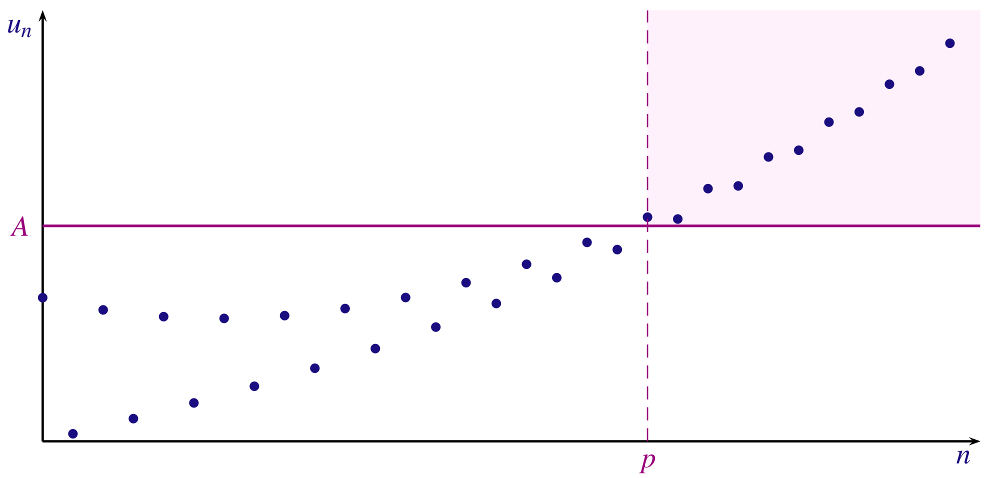
On dit qu'une suite $(u_n)$ admet une limite égale à $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel $A$ strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à $A$ à partir d'un certain rang $p$. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ si $u_n$ est aussi grand que l'on veut dès que $n$ est suffisamment grand.

#### INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite $(u_n)$ ayant une limite égale à $+\infty$




Pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$. $p$ est le seuil à partir duquel $u_n > A$

#### DÉFINITION

On dit qu'une suite $(u_n)$ admet une limite égale à $-\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel $A$ strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à $A$ à partir d'un certain rang $p$. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

## 2 LIMITE FINIE

#### DÉFINITION

Soit $(u_n)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ et $\ell$ un réel.

1. Dire que la suite $(u_n)$ admet pour limite le réel $\ell$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $p$. On écrit :

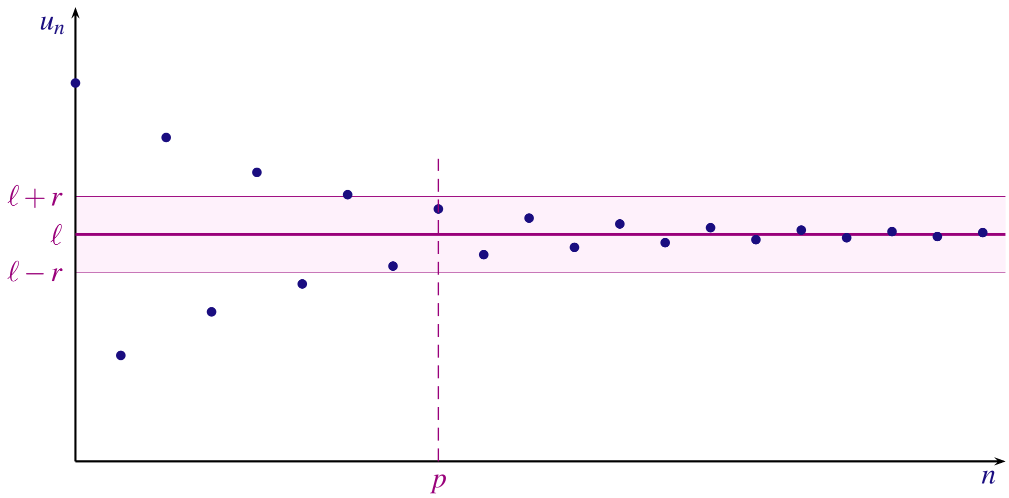
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel $\ell$ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite $(u_n)$ est convergente vers un réel $\ell$ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $p$ peuvent être aussi proches que voulu de $\ell$.

#### INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang $p$, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.




Le rang $p$ est le seuil à partir duquel « $u_n$ est à une distance de $\ell$ inférieure à $r$ »

#### PROPRIÉTÉ

La suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

#### REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et $-1$. Elle n'admet pas de limite.

## 3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

**THÉORÈME** *(admis)*

Soit $q$ un nombre réel :

— Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général $q^n$ converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

— Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général $q^n$ a pour limite $+\infty$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

— Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général $q^n$ n'admet pas de limite finie ou infinie.

REMARQUE

Pour $q = 1$, la suite $(q^n)$ est constante et égale à 1 donc convergente. Pour $q = -1$, la suite $(q^n)$ prend alternativement les valeurs 1 et $-1$ suivant la parité de $n$, elle n'admet pas de limite.

**COROLLAIRE**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ non nul et de raison $q$ **strictement positive**.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite $(u_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite $(u_n)$ est constante et égale à $u_0$.

— Si $q > 1$ alors la suite $(u_n)$ admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

**RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME**

EXEMPLE 1

Soit $(r_n)$ la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $r_0 = 50000$
Comme $0 < 0{,}96 < 1$ la suite $(r_n)$ est décroissante et converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} 50000 \times 0{,}96^n = 0$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier $p$ tel que pour tout entier $n \geqslant p$ , $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$

```
INITIALISATION :
A = 50000 ;
I = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE A > 30000 FAIRE
    I prend la valeur I + 1 ;
    A prend la valeur 0,96 × A ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I
```

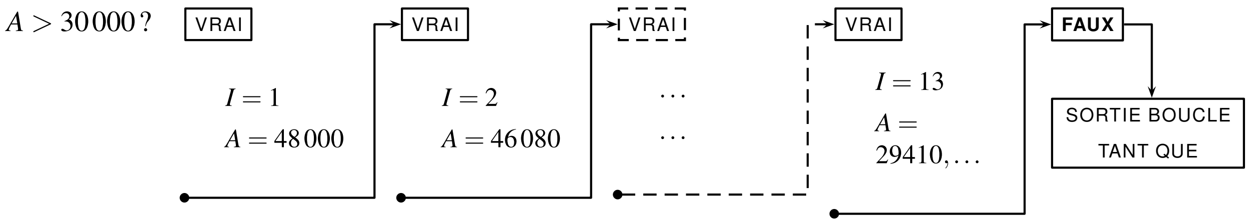
| PROGRAMME | |
|---|---|
| TEXAS | CASIO |
| PROGRAM : SEUIL | ===== SEUIL ===== |
| : 50000 → A | 50000 → A ↲ |
| : 0 → I | 0 → I ↲ |
| : While A > 30000 | While A > 30000 ↲ |
| : I + 1 → I | I + 1 → I ↲ |
| : 0.96*A → A | 0.96*A → A ↲ |
| : End | WhileEnd ↲ |
| : Disp I | I |

Initialisation :

$A = 50\,000$

$I = 0$

Traitement :
Tant que la condition $A > 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "TANT_ QUE" et "FIN TANT_ QUE"




Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geqslant 13$, $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit $(u_n)$ la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2000$
$1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite $(u_n)$ est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2000 \times 1{,}015^n = +\infty$.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 3 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier $p$ tel que pour tout entier $n \geqslant p$ , $2000 \times 1{,}015^n > 3000$

INITIALISATION :
$A = 2000$ ;
$I = 0$;
TRAITEMENT :
**TANT_QUE** $A \leqslant 3000$ **FAIRE**
  $I$ prend la valeur $I + 1$ ;
  $A$ prend la valeur $1{,}015 \times A$ ;
**FIN TANT_QUE**
SORTIE :
Afficher $I$

La calculatrice affiche 28. Donc pour tout entier $n \geqslant 28$, $2000 \times 1{,}015^n > 3000$.

## III SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

### 1 DÉFINITION

Soient $a$ et $b$ deux réels.
La suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial $u_0$ est une suite *arithmético-géométrique*

**REMARQUE**

— Si $a = 1$ la suite est arithmétique.

— Si $b = 0$ la suite est géométrique.

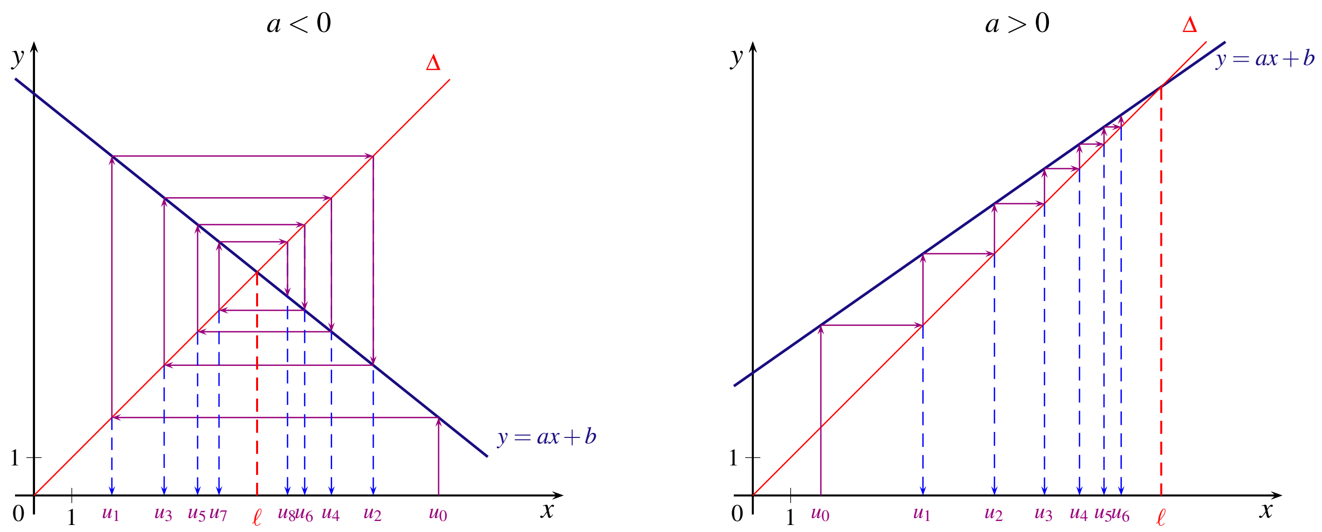
— Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

### 2 ÉTUDIER UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

$a$ et $b$ sont deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
$(u_n)$ est la suite arithmético-géométrique définie par $u_0$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = au_n + b$.

**REPRÉSENTATION GRAPHIQUE**

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$




Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

### UNE SUITE AUXILIAIRE

#### PROPOSITION

Soit $\ell$ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n$, par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

#### ✼ PREUVE

Pour tout entier $n$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= au_n - a\ell \\ &= a \times (u_n - \ell) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n$, $v_n = a \times v_n$ donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $a$.

#### CONSÉQUENCE

$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $a$ et $v_0 = u_0 - \ell$ donc pour tout entier $n$, $v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$.

Comme $v_n = u_n - \ell \Leftrightarrow u_n = v_n + \ell$, on en déduit que : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell).}$

#### EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note $u_n$ le montant, en euros, du capital acquis au bout de $n$ mois.

1. *Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.*
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
   Donc pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 250$
2. *Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier $n$, par $v_n = u_n + 125000$. Montrer que $v_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   Pour tout entier $n$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times u_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1{,}002 \times v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1000 + 125000 = 126000$.

3. *Exprimer $u_n$ en fonction de n.*

   $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126000$ donc pour tout entier $n$, $v_n = 126000 \times 1{,}002^n$.

   Donc pour tout entier $n$, $u_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125000$.

4. *Étude de la suite $(u_n)$.*

   a) *Variation*

   Pour tout entier $n$, $u_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125000$.

   Donc pour tout entier $n$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1{,}002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^n \\ &= 126000 \times 1{,}002^n \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^n \end{aligned}$$

   D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Par conséquent, la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

   b) *Limite*

   Comme $1{,}002 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 126000 \times 1{,}002^n - 125000 = +\infty$.

   c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*

   On cherche à déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15000$.

   L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite $(u_n)$ est supérieur à 15000.

```
A = 1000 ; I = 0;
TANT_QUE A ⩽ 15000 FAIRE
  | I prend la valeur I + 1 ;
  | A prend la valeur 1,002 × A + 250 ;
FIN TANT_QUE
Afficher I
```

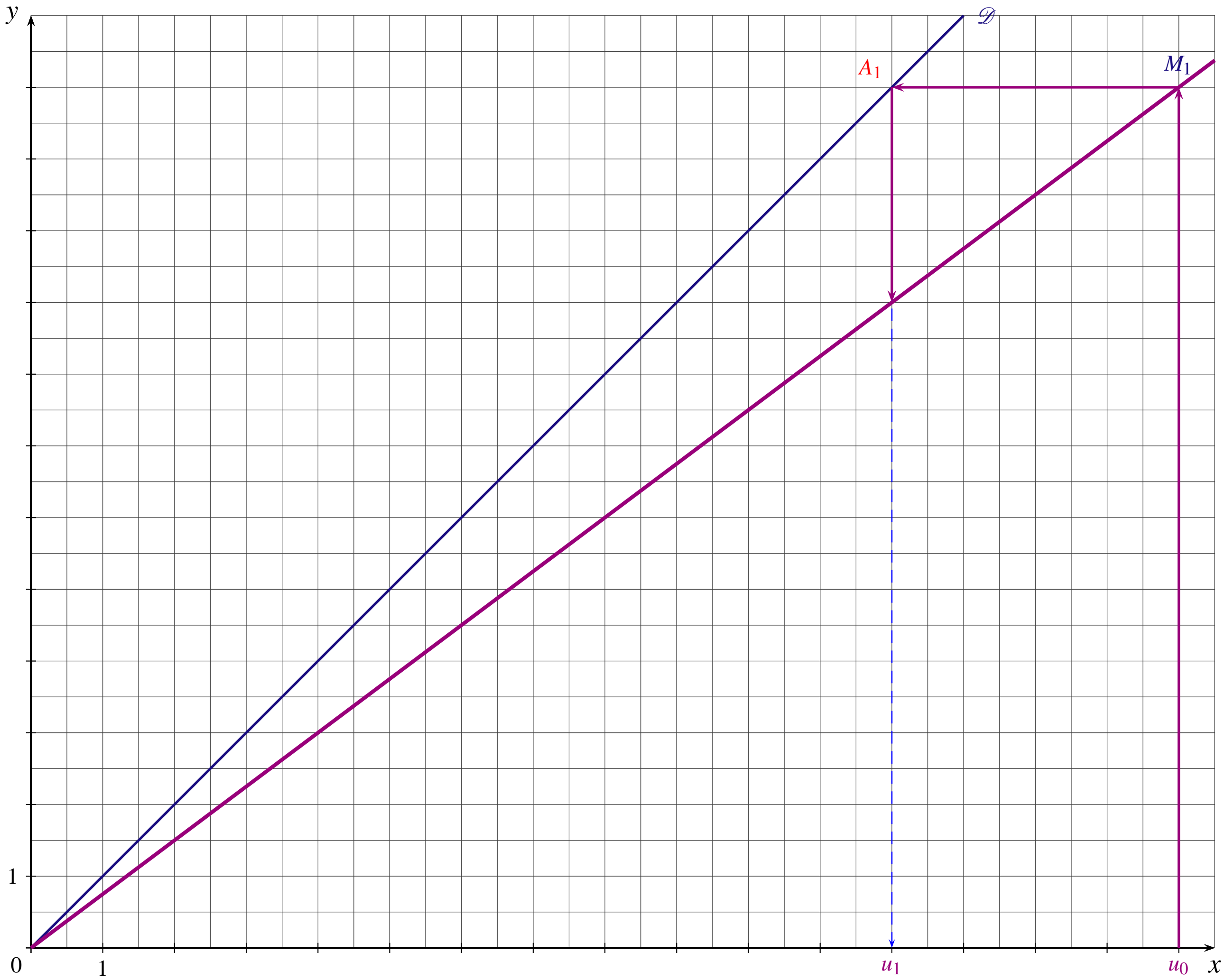
   La calculatrice affiche 53. Donc le capital disponible dépassera 15000 € au bout de 53 mois.

## EXERCICE 1

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4} \times u_n$.

### PARTIE A

1. a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
   b) Exprimer, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ en fonction de $n$.
   c) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = 0{,}75x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.




   a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \cdots, u_{10}$.
   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite $(u_n)$ ?
3. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Les variables sont l'entier naturel $N$ et le réel $U$. | |
| Initialisation : | Affecter à $N$ la valeur 0 |
| | Affecter à $U$ la valeur 16 |
| Traitement : | TANT QUE $U > 0{,}01$ |
| | Affecter à $N$ la valeur $N+1$ |
| | Affecter à $U$ la valeur $0{,}75 \times U$ |
| | FIN TANT QUE |
| Sortie : | Afficher $N$ |

Par rapport à la suite $(u_n)$, quelle est la signification de l'entier $N$ affiché ?

**PARTIE B**

On note $S_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $u_n$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

1. Calculer $S_4$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la valeur de la somme $S_n$ pour un $n$ donné.

| | |
|---|---|
| Les variables sont l'entier naturel $N$, les réels $U$ et $S$. | |
| Initialisation : | Affecter à $U$ la valeur ... |
| | Affecter à $S$ la valeur ... |
| Entrée : | Saisir la valeur de l'entier naturel $N$ |
| Traitement : | POUR $i$ variant de 1 à $N$ |
| | $U$ prend la valeur ... |
| | $S$ prend la valeur ... |
| | FIN POUR |
| Sortie : | Afficher ... |

3. a) Montrer que pour tout entier $n$, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$.
   b) Vers quel réel tend $S_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

## EXERCICE 2

Soit $(u_n)$ la suite géométrique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{8}{5} \times u_n$.

1. a) Exprimer, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ en fonction de $n$.
   b) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2. a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 1{,}6x$ pour construire les huit premiers termes de la suite $(u_n)$.
   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite $(u_n)$ ?
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant 5000$.
4. On considère la suite $(S_n)$ définie pour tout entier $n$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

   a) Calculer $S_4$.
   b) Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.
   c) La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?

## EXERCICE 3

Le premier jour ce chaque mois on effectue un versement de 300 € sur un compte épargne dont le taux d'intérêt mensuel est égal à 0,1 %.
Quelle est la somme disponible au terme du 12[e] mois ?

## EXERCICE 4

En 2012, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent.
On note $u_n$ le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année $2012+n$ ; on a donc $u_0 = 40$.

1. Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2013 ?
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}92 \times u_n + 4$.
3. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation : | Affecter à $N$ la valeur 0 |
| | Affecter à $U$ la valeur 40 |
| Traitement : | Tant_que $U \leqslant 44$ : |
| | Affecter à $N$ la valeur $N+1$ |
| | Affecter à $U$ la valeur $0{,}92 \times U + 4$ |
| | Fin Tant_que |
| Sortie : | Afficher $N$ |

Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

| $N$ | 0 | 1 | ... | |
|---|---|---|---|---|
| $U$ | 40 | | ... | |
| Test $U \leqslant 44$ | Vrai | | ... | |

4. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 50$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 50 - 10 \times 0{,}92^n$.
5. Étudier la monotonie de la suite $u_n$.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. Interpréter ce résultat.

## EXERCICE 5

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.
En 2010, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement.
On note $a_n$ le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2010+n$ ; on a donc $a_0 = 40$.

1. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$.
2. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | $n$ et $S$ sont des entiers naturels |
| | $A$ est un réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur la valeur de $S$ |
| Initialisation : | Affecter à $n$ la valeur 0 |
| | Affecter à $A$ la valeur 40 |
| Traitement : | Tant_que $A \leqslant S$ : |
| | Affecter à $n$ la valeur $n+1$ |
| | Affecter à $A$ la valeur $0{,}85 \times A + 12$ |
| | Fin Tant_que |
| Sortie : | Afficher $n$ |

L'utilisateur saisit en entrée le nombre $S = 65$.
Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près. Quel nombre obtient-on en sortie ? Interpréter ce résultat.

| $n$ | 0 | 1 | ... | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 40 | | ... | |
| Test $A \leqslant S$ | Vrai | | ... | |

3. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geqslant 0$.

a) Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85^n$.

c) Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 90 mille exemplaires ?

## EXERCICE 6

*(D'après sujet bac 2016)*

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m$^3$ soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 25 % de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation.
Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé.
Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de 1,25 mg/L (milligrammes par litre).

### DOCUMENT

**Réglementation des piscines publiques**

| Paramètres contrôlés | Seuils de qualité réglementaire | Incidences sur la qualité de l'eau |
|---|---|---|
| Présence de Chlore | Au minimum 2 mg/L | < 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau |
| | Au maximum 4 mg/L | > 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau |

**Source : Agence Régionale de Santé**

À partir du 1$^{er}$ juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entretien ajoute, chaque matin à 9 h, 570 g de chlore dans la piscine.
Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le responsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l'Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

### PARTIE A

1. Pour tout entier naturel $n$ on note $u_n$ la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le $n^{\text{ième}}$ jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi $u_0$ est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et $u_1$ est la quantité de chlore le 1$^{er}$ juin à 9 h après l'ajout de chlore.

   a) Montrer que la quantité de chlore, en grammes, présente dans l'eau du bassin le 31 mai à 9 h est $u_0 = 750$. Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, le responsable pouvait-il donner l'accès à la piscine le 31 mai ?

   b) Montrer que $u_1 = 1132{,}5$.

   c) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 570$.

   d) La suite $(u_n)$ est-elle géométrique ?

2. Soit l'algorithme ci-dessous :

```
Variables
    u : un nombre réel
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
Initialisation
    Saisir la valeur de N
    u prend la valeur 750
Traitement
    Pour k allant de 1 à N
        u prend la valeur 0,75u + 570
    Fin du Pour
Sortie
    Afficher u
```

a) Quel est le rôle de cet algorithme ?

b) Recopier et compléter le tableau suivant, par des valeurs exactes, en exécutant cet algorithme « pas à pas » pour $N = 3$ :

| Variables | Initialisation | Etape 1 | Etape 2 | Etape 3 |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | 750 | | | |

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, au bout de combien de jours la piscine peut-elle être ouverte ?

c) Calculer une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la quantité de chlore le 15[ième] jour juste après l'ajout de chlore.

#### PARTIE B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note $d_n$ l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel $n$, on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

1. a) Calculer $d_0$, $d_1$ et $d_2$. On donnera une valeur exacte.
   b) Justifier que $d_0$, $d_1$ et $d_2$ semblent être les termes d'une suite géométrique.
2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -0{,}25u_n + 570$.
3. Démontrer que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   a) Justifier que $d_n = 382{,}5 \times 0{,}75^n$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 2280 - 1530 \times 0{,}75^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. Interpréter le résultat trouvé.

### EXERCICE 7

*(D'après sujet bac Polynésie 2013)*

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3.$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
   On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.
   Une copie d'écran sur laquelle les termes $u_1$ et $u_2$ ont été effacés est donnée ci-dessous.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u(n)$ |
| 2 | 0 | 8 |
| 3 | 1 | |
| 4 | 2 | |
| 5 | 3 | 5,192 |
| 6 | 4 | 5,076 81 |
| 7 | 5 | 5,030 72 |
| 8 | 6 | 5,012 288 |
| 9 | 7 | 5,004 915 2 |
| 10 | 8 | 5,001 966 08 |

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?
3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite $(u_n)$ ?
4. On considère l'algorithme suivant :

| Les variables sont l'entier naturel N et le réel U. | |
|---|---|
| Initialisation : | Affecter à N la valeur 0 |
| | Affecter à U la valeur 8 |
| Traitement : | TANT QUE $U-5>0{,}01$ |
| | Affecter à N la valeur N + 1 |
| | Affecter à U la valeur $0{,}4U+3$ |
| | Fin TANT QUE |
| Sortie : | Afficher N |

Par rapport à la suite $(u_n)$, quelle est la signification de l'entier N affiché ?

5. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 5$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   c) Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.
   d) Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ? Pourquoi ?

**EXERCICE 8** (*D'après sujet bac Antilles Guyane 2015*)

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

| VARIABLES : | $k$, NbClients |
|---|---|
| TRAITEMENT : | Affecter à $k$ la valeur 0 |
| | Affecter à NbClients la valeur 1 000 000 |
| | Tant que $k<8$ |
| |     Affecter à $k$ la valeur $k+1$ |
| |     Affecter à NbClients la valeur $0{,}9\times\text{NbClients}+60000$ |
| |     Afficher NbClients |
| | Fin Tant que |

   b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour $k$ de 0 jusqu'à 5.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| NbClients | | | | | | |

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite $(U_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par :

$$\begin{cases} U_0 &= 1000 \\ U_{n+1} &= 0{,}9U_n+60. \end{cases}$$

   Le terme $U_n$ donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010+n$.
   Pour étudier la suite $(U_n)$, on considère la suite $(V_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $V_n = U_n - 600$.
   a) Montrer que la suite $(V_n)$ est géométrique de raison 0,9.
   b) Déterminer l'expression de $V_n$ en fonction de $n$.
   c) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $U_n = 400\times 0{,}9^n + 600$.
   d) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte de ce problème.

3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.
   Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.
   On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.
   En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

## EXERCICE 9

(*D'après sujet bac Centres étrangers 2015*)

Depuis le 1[er] janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.
La commune disposait de 200 vélos au 1[er] janvier 2015.
La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.
On modélise cette situation par une suite $(u_n)$ où $u_n$ représente le nombre de vélos de cette commune au 1[er] janvier de l'année $2015+n$.

1. Déterminer le nombre de vélos au 1[er] janvier 2016.
2. Justifier que la suite$(u_n)$ est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 42$.
3. On donne l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| VARIABLES : | $N$ entier |
| | $U$ réel |
| INITIALISATION : | $N$ prend la valeur 0 |
| | $U$ prend la valeur 200 |
| TRAITEMENT : | Tant que $N < 4$ |
| | $U$ prend la valeur $0{,}85 \times U + 42$ |
| | $N$ prend la valeur $N+1$ |
| | Fin Tant que |
| SORTIE : | Afficher $U$ |

   a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

| $U$ | 200 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Condition $N < 4$ | Vrai | | | | |

   b) Interpréter la valeur du nombre $U$ obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

4. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n$ par $v_n = u_n - 280$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = -80$.
   b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = -80 \times 0{,}85^n + 280$.
   d) Calculer la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter ce résultat.
5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1[er] janvier.
   Déterminer le coût total pour la période du 1[er] janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite $(u_n)$ étant exprimé avec un nombre entier.

## EXERCICE 10

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
On remplit ce bassin avec 90 m$^3$ d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m$^3$ d'eau dans le bassin.

1. Calculer le volume d'eau contenu dans ce bassin au bout de deux semaines.
2. On note $u_n$ le nombre de m$^3$ d'eau contenu dans ce bassin au bout de $n$ semaines. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 80 + 10 \times 0{,}97^n$.

4. Étudier la monotonie de la suite $u_n$.
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. Interpréter ce résultat.

**EXERCICE 11** (*D'après sujet bac Pondichéry 2014*)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.
Le centre ouvre ses portes le 1<sup>er</sup> janvier 2013 avec 115 oiseaux.
Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.
On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes.
La situation peut être modélisée par une suite $(u_n)$ admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme $u_n$ donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
   a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'algorithme 3 permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.
   Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

| algorithme 1 | algorithme 2 | algorithme 3 |
|---|---|---|
| **Variables :** | **Variables :** | **Variables :** |
| $U$ est un nombre réel | $U$ est un nombre réel | $U$ est un nombre réel |
| $i$ et $N$ sont des nombres entiers | $i$ et $N$ sont des nombres entiers | $i$ et $N$ sont des nombres entiers |
| **Début** | **Début** | **Début** |
| Saisir une valeur pour $N$ | Saisir une valeur pour $N$ | Saisir une valeur pour $N$ |
| Affecter 115 à $U$ | Pour $i$ de 1 à $N$ faire | Affecter 115 à $U$ |
| Pour $i$ de 1 à $N$ faire | Affecter 115 à $U$ | Pour $i$ de 1 à $N$ faire |
| Affecter $0{,}6 \times U + 120$ à $U$ | Affecter $0{,}4 \times U + 115$ à $U$ | Affecter $0{,}4 \times U + 120$ à $U$ |
| Fin Pour | Fin Pour | Fin Pour |
| Afficher $U$ | Afficher $U$ | Afficher $U$ |
| Fin | Fin | Fin |

   b) Donner, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 200$.
   a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser $v_0$.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel $n$, $v_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 200 - 85 \times 0{,}4^n$.
   d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1er janvier.
   Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.