CONSTRUCTION EXPÉRIMENTALE DE LA FONCTION $f : x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit $q > 0$ un réel strictement positif. (u_n) est la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = q^n$.
(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1. Pour tous entiers naturels m et p, on a :

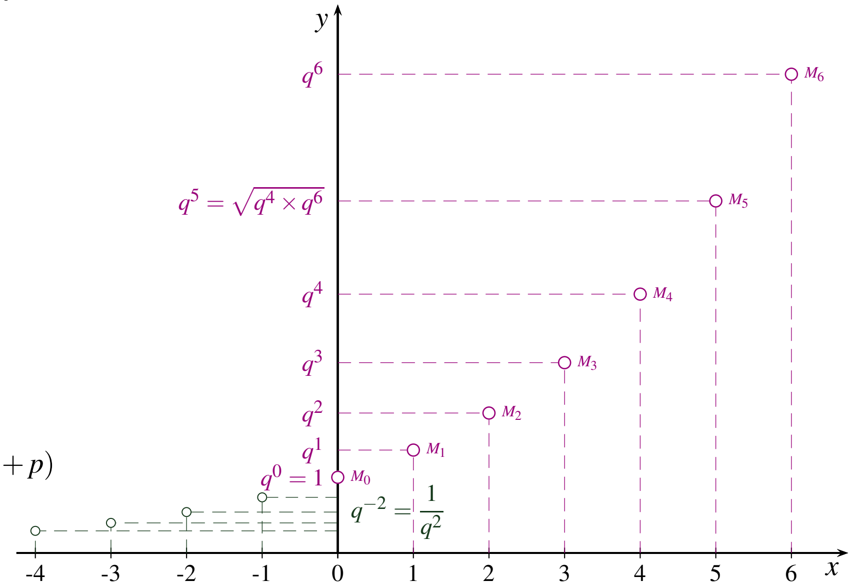
$$u_m \times u_p = q^m \times q^p = q^{m+p} = u_{m+p}$$

On considère le nuage de points M_i représentatif de la suite q^n.

ÉTAPE 1 : prolongement sur les négatifs.

Sachant que pour tout réel $q > 0$ et pour tout entier n, $q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$, on complète le graphique à l'aide de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{q}$.
On définit ainsi, une fonction f telle que pour tout entier relatif n, $f(n) = q^n$.
Pour tous entiers relatifs m et p,

$$f(m) \times f(p) = q^m \times q^p = q^{m+p} = f(m+p)$$



ÉTAPE 2 : prolongement par dichotomie.

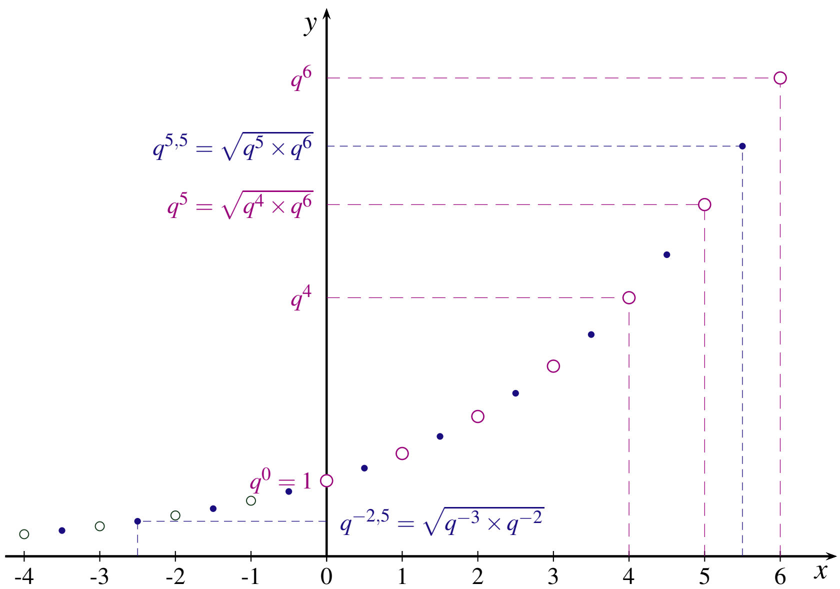
RAPPEL

> Trois réels a, b et c sont, dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si, b est la moyenne géométrique de a et c (c'est à dire : $b = \sqrt{ac}$)

— Points d'abscisses $n + 0{,}5$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Au point d'abscisse $n + 0{,}5 = \dfrac{n + (n+1)}{2}$ on associe la moyenne géométrique des deux termes consécutifs :

$$f(n + 0{,}5) = \sqrt{f(n) \times f(n+1)} = \sqrt{q^n \times q^{n+1}}$$



Pour tout entier relatif n :

$$f(n + 0{,}5) = \sqrt{q^n \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1}{2}} = q^n \times q^{0,5} = f(n) \times f(0{,}5)$$

— On obtient de nouveaux points en réitérant ce processus :

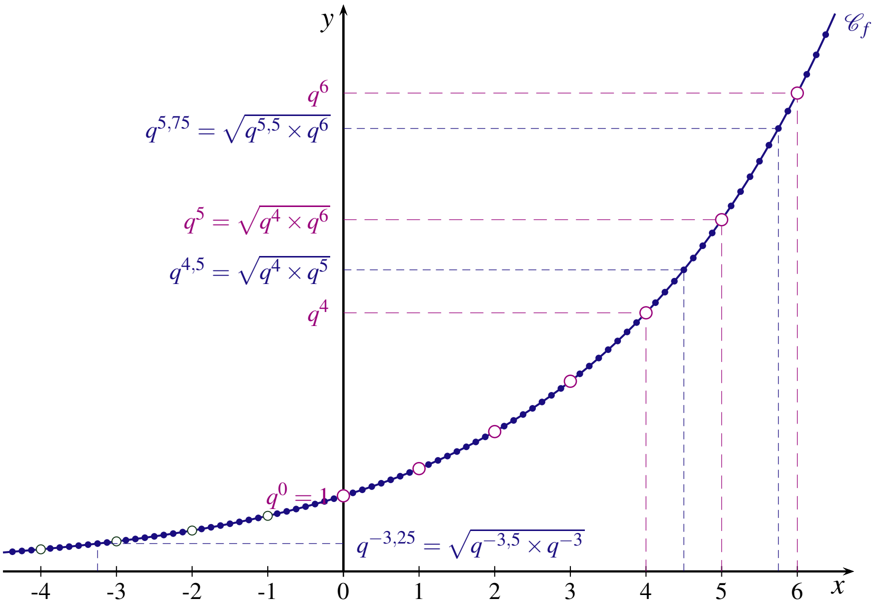
Au point d'abscisse $n+0{,}25=\dfrac{n+(n+0{,}5)}{2}=\dfrac{2n+0{,}5}{2}$, on associe on associe le réel :

$$f(n+0{,}25)=\sqrt{q^n\times q^{n+0{,}5}}=q^{\frac{2n+0{,}5}{2}}=q^n\times q^{0{,}25}=f(n)\times f(0{,}25)$$

Au point d'abscisse $n+0{,}75=\dfrac{(n+0{,}5)+(n+1)}{2}=\dfrac{2n+1{,}5}{2}$ on associe on associe le réel :

$$f(n+0{,}75)=\sqrt{q^{n+0{,}5}\times q^{n+1}}=q^{\frac{2n+1{,}5}{2}}=q^n\times q^{0{,}75}=f(n)\times f(0{,}75)$$

Plus généralement soient $A\left(a;q^a\right)$ et $B\left(b;q^b\right)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, ce processus permet d'obtenir le point $M\left(\dfrac{a+b}{2};\sqrt{q^a\times q^b}\right)$ appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sqrt{q^a\times q^b}=q^{\frac{a+b}{2}}=q^{\frac{a}{2}}\times q^{\frac{b}{2}}=f\left(\frac{a}{2}\right)\times f\left(\frac{b}{2}\right)$$

La fonction f vérifie la relation $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

DES FONCTIONS « TRANSFORMANT LES SOMMES EN PRODUITS »

Soit f une fonction continue vérifiant pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} f(x)\neq 0 \\ f(x+y)=f(x)\times f(y) \end{cases}$$

1. En écrivant que pour tout réel x, $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)$, montrer que pour tout réel x, $f(x)>0$.
2. En remarquant que pour tout réel x, $f(x+0)=f(x)$, en déduire la valeur de $f(0)$.
3. Démontrer que pour tout réel x, $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$
4. On pose $f(1)=q$.
   a) Calculer $f(2)$ $f(3)$ et $f(0{,}5)$.
   b) Calculer $f(-1)$ et $f(-2)$.
5. Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=f(n)$ est une suite géométrique.

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q.
La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q.
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}8^x$ est la fonction exponentielle de base $0{,}8$.
Une valeur approchée de l'image de $-5{,}3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence : 0.8 ∧ (- 5.3).

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits. Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

— $\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ q^{-x} = \dfrac{1}{q^x} \text{ et } q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}.}$

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^x > 0.}$

En effet, $q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ avec $q^x \neq 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}, \text{ et en particulier } q^{0,5} = \sqrt{q}}$

En effet, $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x > 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m,\ (q^x)^m = q^{mx}}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n > 0,\ q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

2 SENS DE VARIATION

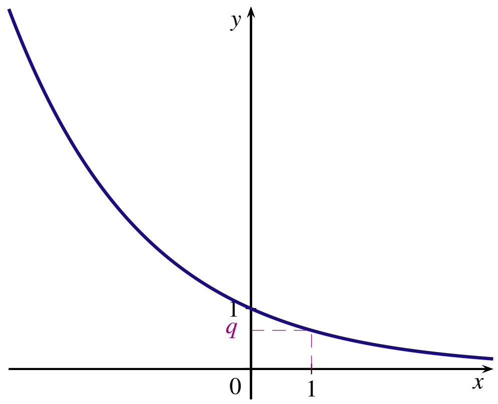
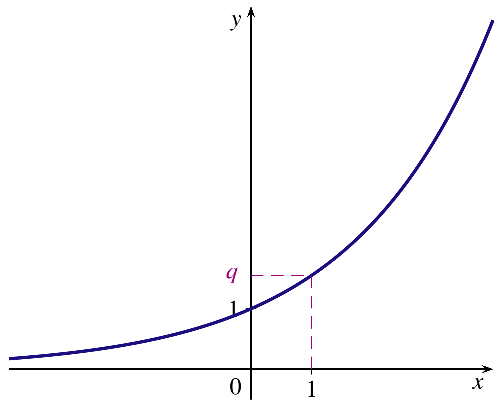
En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

— Si $0 < q < 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
— Si $q = 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
— Si $q > 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCE

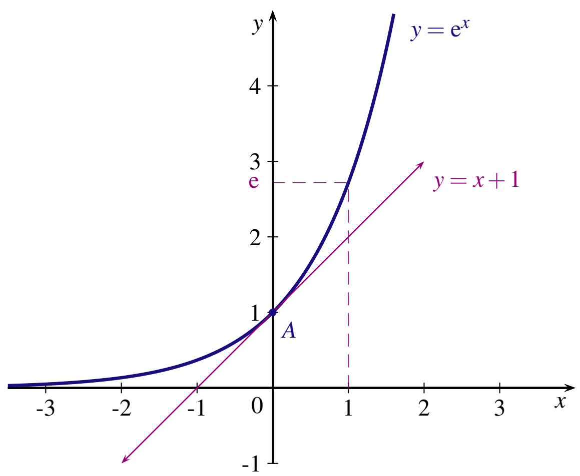
Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si, $a = b$.

3 PROPRIÉTÉS

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$
	
La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$	

II LA FONCTION EXPONENTIELLE

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.
Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.
Cette valeur particulière du réel q est notée e.
Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $\text{e} \approx 2{,}71828$.



1 DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note exp

$$\exp : x \longmapsto \mathrm{e}^x$$

CONSÉQUENCES

— La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

— $\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, $\exp(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\exp(0{,}5) = \mathrm{e}^{0{,}5} = \sqrt{\mathrm{e}}$

— La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$

— La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$

— Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, $(\mathrm{e}^x)^m = \mathrm{e}^{mx}$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x,

$$\exp'(x) = \mathrm{e}^x$$

✲ DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$$

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{0+h} - \mathrm{e}^0}{h} = 1$ soit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

Donc pour tout réel x, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \mathrm{e}^x \times \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x$

3 VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✲ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

— Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < \mathrm{e}^x \leqslant 1$

— Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$

— Pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$ et $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$

EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

$$e^{1-3x} < e^{2x+3} \iff 1-3x < 2x+3 \iff -5x < 2 \iff x > -\frac{2}{5}$$

   D'où l'ensemble solution $S = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geqslant 1$

$$e^{x^2-1} \geqslant 1 \iff e^{x^2-1} \geqslant e^0 \iff x^2-1 \geqslant 0$$

   D'où l'ensemble solution $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

✻ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = e^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

LIMITES

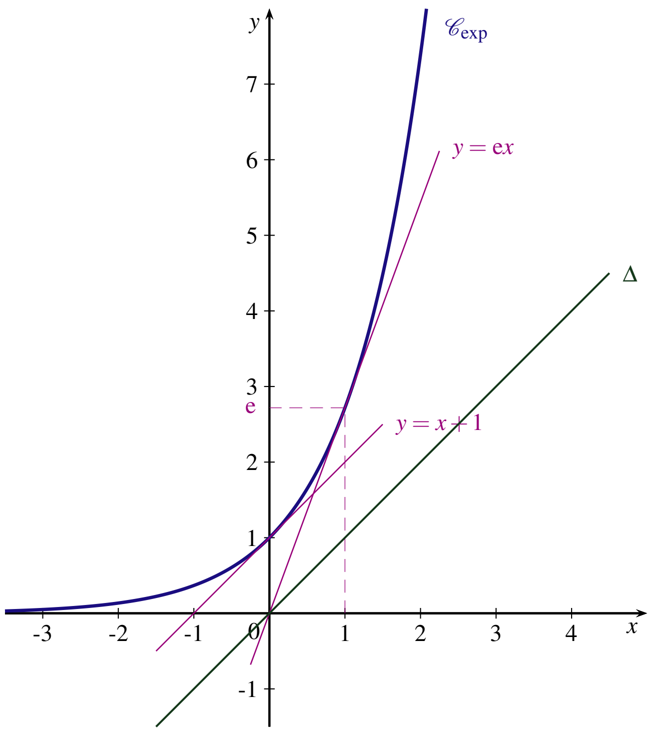
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$e > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

$e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim\limits_{n \to -\infty} e^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n = 0$. Par prolongement, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x+1$
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x-1) + \exp(1)$ Soit $y = ex$
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.
   (*cf. exercice n° 7*)



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.
La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = \mathrm{e}^u$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = \mathrm{e}^u$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5\mathrm{e}^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \times u'$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.
   Pour tout réel x, posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.

2 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

❊ DÉMONSTRATION

Soient $a < b$ deux réels de l'intervalle I

- Si u est décroissante sur I alors $u(b) < u(a)$
  Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc si $u(b) < u(a)$ alors $\mathrm{e}^{u(b)} < \mathrm{e}^{u(a)}$
  Par conséquent, si u est décroissante sur I alors la fonction e^{u} est décroissante sur I.
- Si u est croissante sur I alors $u(a) < u(b)$
  De la stricte croissance de la fonction exponentielle on en déduit que si $u(a) < u(b)$ alors $\mathrm{e}^{u(a)} < \mathrm{e}^{u(b)}$
  Donc si u est croissante sur I alors la fonction e^{u} est croissante sur I.

REMARQUE

Si u est dérivable sur I, alors la fonction $f = \mathrm{e}^{u}$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
Or pour tout réel $x \in I$, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.

EXERCICE 1

1. Calculer

$$A = 8^{\frac{1}{3}}\,; \qquad B = 4^{\frac{3}{4}}\,; \qquad C = 27^{\frac{4}{3}}\,; \qquad D = \frac{0{,}25^{0{,}7} \times 0{,}25^{1{,}2}}{0{,}25^{1{,}4}}\,; \qquad E = \frac{\left(0{,}2^{\frac{2}{3}}\right)^{6} \times 0{,}2^{-1{,}6}}{0{,}2^{3{,}4}}.$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$F(x) = (1+4^x)^2 - (1-4^x)^2\,; \quad G(x) = \frac{2^{2x-3} \times 0{,}5^{x+2}}{2^{-3x-1}}\,; \quad H(x) = \frac{\left(5^{x+1} - 0{,}2^{-x}\right)^2}{2^4}\,; \quad I(x) = \frac{4^{x+0{,}5} + (2^x)^2}{6^{1-x}}.$$

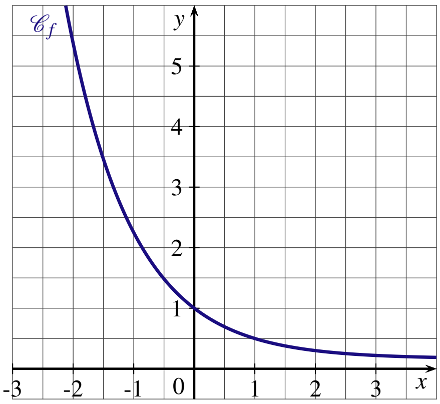
EXERCICE 2

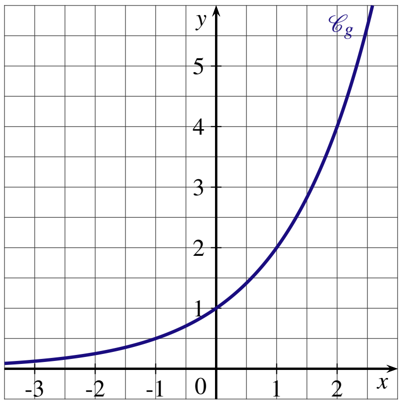
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4^x - 0{,}25^x$.

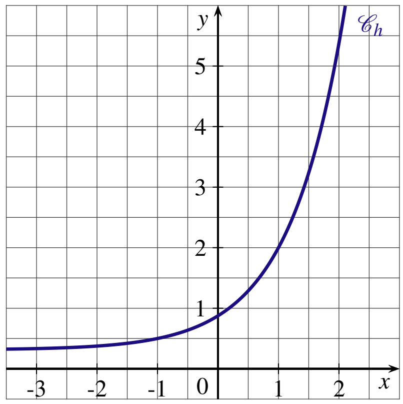
1. Calculer $f(-0{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
   Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Montrer que pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$

EXERCICE 3

On a tracé ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.







1. Une seule de ces trois fonctions est une fonction exponentielle de base q. Laquelle est-ce ?
2. Quelle est la valeur du réel q ?

EXERCICE 4

1. En raison de l'évaporation, un bassin contenant 95 m^3 d'eau perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
   Modéliser l'évolution du volume d'eau contenue dans le bassin à l'aide d'une fonction f de la forme

$$f(x) = k \times q^x$$

   Préciser les valeurs de k et de q, et donner le sens de variation de la fonction f.
2. En trois mois, le cours d'une action a augmenté de 12%.
   Calculer le taux d'évolution mensuel moyen du cours de cette action pendant les trois mois. (Donner le résultat arrondi à 0,01 % près)
3. Le 4 janvier 2010, le cours du lingotin d'or de 500 g était de 12 400 €, contre 20 150 € le 4 août 2016.
   Calculer le pourcentage annuel moyen d'évolution du cours du lingotin d'or entre ces deux dates.

EXERCICE 5

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$; $\quad B=\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}$; $\quad C=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$; $\quad D=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$; $\quad E=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^{2}}{\mathrm{e}^{2x-1}}$.

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x^{2}+x-1}=1$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}}=\mathrm{e}^{2x^{2}-1}$
3. $2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1=0$
4. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\geqslant \mathrm{e}$
5. $\mathrm{e}^{2x}\leqslant \mathrm{e}^{x}$
6. $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^{2}}<1$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x}-x$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f, en déduire que f admet un minimum.
3. Justifier que pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^{x}>x$.

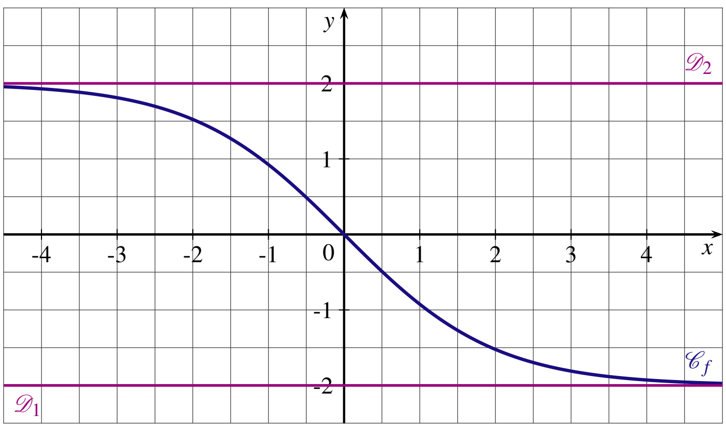
EXERCICE 8

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{x}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{x}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$

EXERCICE 9

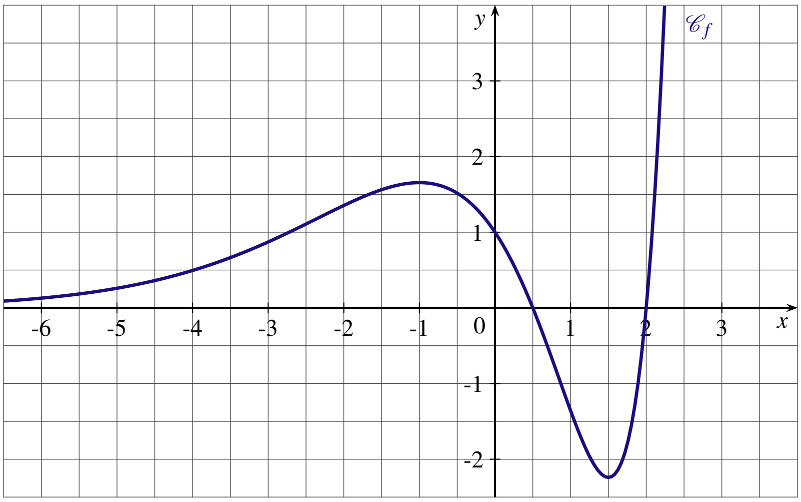
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{x}}-2$.
On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f et les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $y=-2$ et $y=2$



1. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Étudier la convexité de la fonction f.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^x$. Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   c) Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Tracer la droite T sur le graphique précédent.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 40$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2;3]$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Donner le tableau de variations de f.
   c) En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.
2. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   a) Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{\mathrm{e}^x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (2x-5) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;0]$.
   Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
4. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.

EXERCICE 13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{x^2} - \left(\text{e}^x\right)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\text{e}^{x^2}}{\text{e}^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{-x^2} \times \text{e}^{x^2-2x+1}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\text{e}^{-0,5x}$

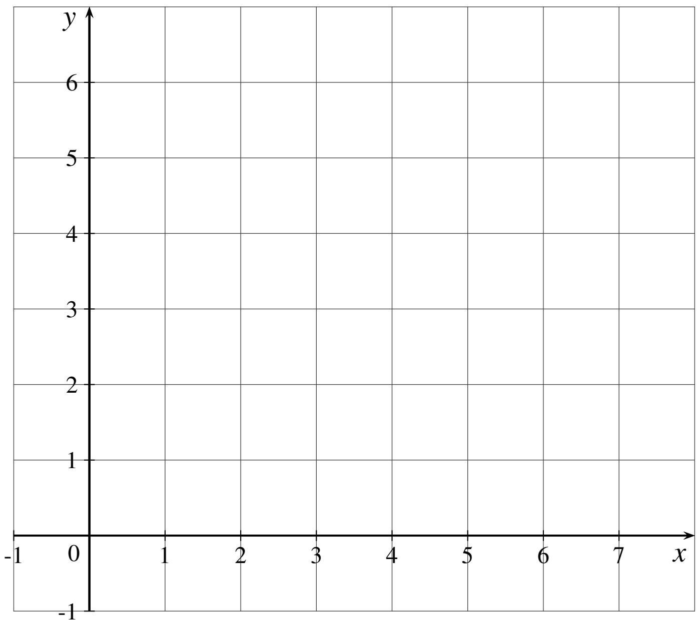
EXERCICE 14

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2010*)

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe qui sera rendu avec la copie.
   On souhaite tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :
   — La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
   — Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.
   — Le minimum de la fonction f est 1.
   — La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
   On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.
   — Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		6
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

   a) Donner le tableau de variations de la fonction f. On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.
   b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 6.
   c) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.
   On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.
   On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.
   a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
   Donner le tableau de variation de la fonction g. On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.
   b) Déterminer $g'(0)$.

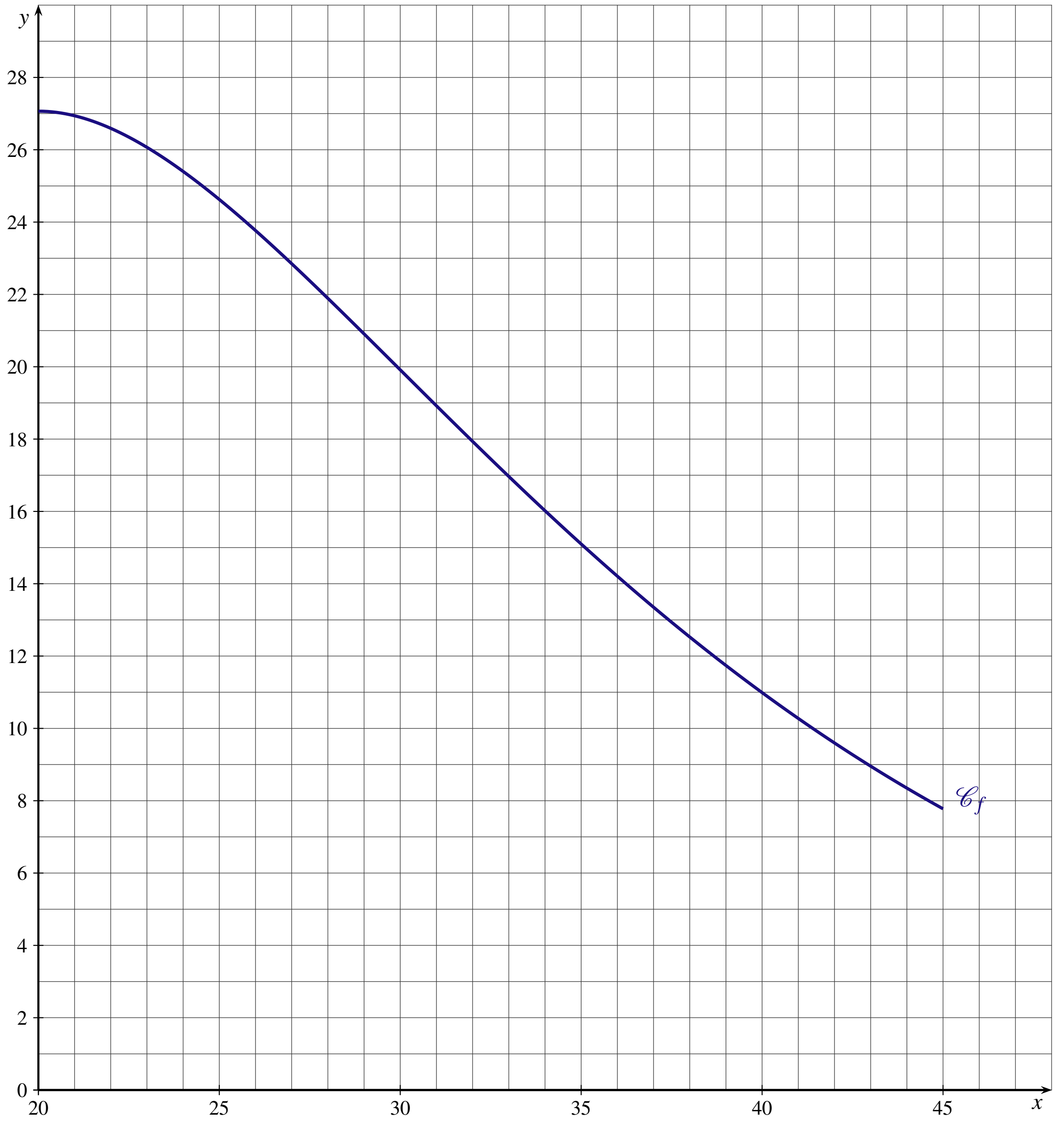
EXERCICE 15

PARTIE A

Une entreprise fabrique un nouvel article. Le coût moyen de fabrication de chaque article est de 15 euros. L'entreprise envisage de vendre chaque article entre 20 euros et 45 euros.
Avant la commercialisation l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée en fonction du prix de vente.
L'étude a permis d'établir que, si chaque article est vendu au prix de x euros, la quantité d'articles demandés $f(x)$, en milliers d'unités, s'exprime par :

$$f(x) = (20x - 200)\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

La fonction de demande f est définie sur l'intervalle $[20;45]$. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Si l'entreprise propose un prix de vente de 40 euros :
   a) calculer le nombre d'articles demandés arrondi à la centaine d'articles près.
   b) Estimer alors le bénéfice réalisé.
2. a) On note f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[20;45]$, $f'(x) = (40-2x)\mathrm{e}^{-0,1x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[20;45]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 11$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[20;45]$.
   b) En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer le prix de vente d'un article pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 11 000 unités.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	*Dériver* $[(40-2x)\cdot\exp(-0.1x)]$
	$\left(\frac{x}{5}-6\right)\cdot\exp(-0.1x)$

   Utiliser ce résultat pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

PARTIE B

On appelle fonction d'offre la fonction g, définie sur l'intervalle $[20;45]$, par : $g(x) = x - 18$.
Le nombre $g(x)$ est le nombre de milliers d'articles que l'entreprise est prête à produire pour un prix de vente unitaire de x euros.

1. Tracer sur le graphique précédent la représentation graphique de la fonction g.
2. On appelle prix d'équilibre le prix unitaire x d'un article pour lequel l'offre est égale à la demande.
   a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
   b) En déduire une valeur approchée au millier près, du nombre d'articles que l'entreprise peut espérer vendre au prix d'équilibre.
   c) Estimer alors le bénéfice réalisé.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-0,5x^2}$

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
   b) On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
    a prend la valeur 0
    b prend la valeur 1

Traitement
Tant que b − a > 10^-3 faire
    m prend la valeur (a+b)/2
        Si f(a) × f(m) < 0 alors b prend la valeur m
        Sinon a prend la valeur m
Fin de Tant que
Sortie
    Afficher a
    Afficher b
```

Les valeurs de sortie de cet algorithme sont $a \approx ;0,7529$ et $b \approx 0,7539$. Que signifie ce résultat ?

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE 17

(*D'après sujet bac Pondichéry 2016*)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

— Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

— Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

— On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

PARTIE A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
   b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

PARTIE B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$.
   b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1;15]$.
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1;15]$.

PARTIE C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a :

$$D(x) = -0{,}3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note D' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1;15]$.
4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.