I FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

1 INTERVALLE DE FLUCTUATION AU SEUIL DE 95%

On s'intéresse à un caractère de proportion p connue au sein d'une population.
On considère la variable aléatoire F_n qui à chaque échantillon aléatoire de taille n associe la fréquence du caractère étudié.

DÉFINITION

On appelle intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95%, tout intervalle $[\alpha;\beta]$ tel que la probabilité $P(F_n \in [\alpha;\beta]) \geqslant 0{,}95$

EXEMPLE

En première partie de soirée une série a attiré près de 5,7 millions de téléspectateurs soit 28% de part d'audience.
Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de 120 personnes ayant regardé la télévision en première partie de soirée.
Le nombre de téléspectateurs en première partie de soirée est suffisamment important pour considérer que la variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}28$.
Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est 24 et, le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est 43.
Un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de taille 120 est

$$I = \left[\frac{24}{120};\frac{43}{120}\right] \quad \text{soit } I \approx [0{,}2;0{,}359]$$

2 INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE AU SEUIL DE 95%

On appelle intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire F_n, l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

INTERPRÉTATION

L'intervalle I_n contient la fréquence F_n avec une probabilité proche de de 0,95 pourvu que n soit suffisamment grand.
En pratique, on utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 dès que :

$$n \geqslant 30\,,\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5.$$

EXEMPLE

Avec $p = 0{,}28$ et $n = 120$ on a $np = 33{,}6$ et $n(1-p) = 86{,}4$, les critères d'approximation sont vérifiés.
L'intervalle de fluctuation asymptotique sur un échantillon de 120 personnes est :

$$I_{120} = \left[0{,}28 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{120}};0{,}28 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{120}}\right]$$

Soit en arrondissant les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près, $I_{120} \approx [0{,}199;0{,}361]$.

3 DÉCISION À PARTIR DE LA FRÉQUENCE D'UN ÉCHANTILLON

Quand les critères d'approximation sont vérifiés, l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n permet de déterminer des seuils de décision :

— pour accepter ou rejeter l'hypothèse selon laquelle p est la proportion d'un caractère dans la population ;

— pour déterminer si un échantillon issu de la population est représentatif.

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p.
On prélève dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.
Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on pose :

$$I_n = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

— Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I_n, alors on rejette l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.

— Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I_n, alors l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population est acceptée.

EXEMPLE

Dans un forum on a constaté que 42 personnes sur 120 ont regardé la série dont la part d'audience a été estimée à 28%. Ce résultat remet-il en question l'estimation de la part d'audience de la série ?
La fréquence observée de la part d'audience dans l'échantillon de taille 120 est : $f = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la part d'audience de la série dans les échantillons de taille 120 est $I_{120} = [0{,}199 ; 0{,}361]$.
Comme $0{,}35 \in [0{,}199 ; 0{,}361]$, l'estimation d'une part d'audience de 28 % pour la série n'est pas remise en cause.

II INTERVALLE DE CONFIANCE

On cherche à estimer avec un certain niveau de confiance, la proportion p **inconnue** d'un caractère au sein d'une population à partir d'un échantillon de taille n.

1 DÉFINITION

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n.
Sous les conditions usuelles d'approximation $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion inconnue p dans la population.

REMARQUES

— En pratique, les conditions de validité de la formule peuvent être vérifiées à posteriori.

— La précision de l'intervalle de confiance est donnée par son amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Plus la taille de l'échantillon est grande, plus les intervalles de confiance obtenus sont précis.

— La différence entre deux fréquences f_1 et f_2 observées sur deux échantillons est considérée comme significative quand les intervalles de confiance correspondants sont disjoints.
Dans ce cas, on considère que les deux proportions p_1 et p_2 sont différentes. Dans le cas contraire, on ne peut pas conclure.

EXEMPLE

On interroge au hasard 100 clients ayant effectué des achats à la sortie d'une grande surface. Le temps d'attente aux caisses a été jugé raisonnable par 52 personnes interrogées.

1. Peut-on considérer que plus de 50% des clients de cette grande surface estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable ?

   Soit $f=\dfrac{52}{100}=0{,}52$ la fréquence des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.

   Les bornes de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable sont :

$$f-\frac{1}{\sqrt{n}}=0{,}52-\frac{1}{\sqrt{100}}=0{,}42 \quad\text{et}\quad f+\frac{1}{\sqrt{n}}=0{,}52+\frac{1}{\sqrt{100}}=0{,}62$$

   On a : $n=100$, $0{,}42\leqslant p\leqslant 0{,}62$, $100\times 0{,}42\leqslant np\leqslant 0{,}62$ et $100\times(1-0{,}62)\leqslant n(1-p)\leqslant 100\times(1-0{,}42)$. Soit $n\geqslant 30$, $42\leqslant np\leqslant 62$ et $38\leqslant n(1-p)\leqslant 58$. Les conditions d'approximation d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % sont vérifiées.

   Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion de clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable est $[0{,}42;0{,}62]$.

   La borne inférieure de l'intervalle de confiance est 0,42, il est donc possible que moins de 50% des clients trouvent que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.

2. Déterminer le nombre minimal de clients qu'il faut interroger pour estimer la proportion p de clients qui trouvent le temps d'attente aux caisses raisonnable avec une précision inférieure à 0,1.

   La précision de l'estimation de p est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{n}}<0{,}1 &\iff \frac{1}{\sqrt{n}}<0{,}05\\ &\iff \sqrt{n}>\frac{1}{0{,}05}\\ &\iff \sqrt{n}>20\\ &\iff n>400\end{aligned}$$

   Il faut interroger plus de 400 clients pour obtenir une estimation de la proportion p de clients qui trouvent le temps d'attente aux caisses raisonnable avec une précision inférieure à 0,1.

3. À fréquence observée égale à 0,52, quel nombre de clients aurait-il fallu interroger pour estimer que plus de 50% des clients trouvent que le temps d'attente aux caisses est raisonnable ?

   La borne inférieure de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 sur un échantillon de taille n est $0{,}52-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ d'où n est solution de l'inéquation :

$$\begin{aligned}0{,}52-\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant 0{,}5 &\iff -\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant -0{,}02\\ &\iff \frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}02\\ &\iff \sqrt{n}\geqslant\frac{1}{0{,}02}\\ &\iff \sqrt{n}\geqslant 50\\ &\iff n\geqslant 2500\end{aligned}$$

Avec une fréquence observée égale à 0,52, il faudrait un échantillon de taille supérieure à 2500 pour que la proportion p de clients qui trouvent le temps d'attente aux caisses raisonnable appartienne à un intervalle de confiance dont la borne inférieure est supérieure à 0,5.

EXERCICE 1

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2015*)

Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles. La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X. On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

PARTIE A

On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. Déterminer $P(X \leqslant 496)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
3. Comment choisir la valeur de α afin que $P(500 - \alpha \leqslant X \leqslant 500 + \alpha)$ soit approximativement égale à 0,95 à 10^{-2} près.

PARTIE B

Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaine de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage. L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produites contiennent au moins 500 millilitres de jus de fruit.
Le test réalisé par l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

EXERCICE 2

Une entreprise produit en grande quantité des emballages alimentaires de forme cubique. Elle utilise pour cela la technique du thermoformage, qui consiste à chauffer une plaque de plastique puis à la former à l'aide d'un moule. Lors du refroidissement, la pièce rétrécit légèrement mais conserve la forme du moule.

A. LOI NORMALE

La mesure de l'arête d'une boîte est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart type $\sigma = 0{,}185$.

1. Calculer $P(X \geqslant 16{,}5)$.
2. Calculer $P(X \geqslant 17{,}5)$.
3. Une boîte est jugée conforme lorsque la mesure de son arête, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[16{,}6; 17{,}4]$.
   a) Calculer $P(16{,}6 \leqslant X \leqslant 17{,}4)$.
   b) Déterminer la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

B. LOI BINOMIALE

L'entreprise conditionne ces boîtes par lots de 200. On prélève au hasard une boîte dans la production.
On note p la probabilité de l'évènement : « la boîte prélevée au hasard dans la production est non conforme ».
On prélève au hasard 200 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire Y qui, à un lot de 200 boîtes, associe le nombre de boîtes non conformes qu'il contient. On admet que Y suit une loi binomiale de paramètres 200 et p, et, qu'en moyenne chaque lot de 200 boîtes en contient 6 non conformes.

1. Justifier que $p = 0{,}03$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux boîtes non conformes dans ce lot de 200 boîtes.

C. INTERVALLE DE FLUCTUATION

Dans le cadre d'un fonctionnement correct du thermoformage, on admet que la proportion p de boîtes non conformes dans la production est 3 %.

1. Déterminer les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % pour un échantillon de taille 200.
2. On contrôle le bon fonctionnement du thermoformage en prélevant au hasard dans la production des échantillons de 200 boîtes. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a compté 10 boîtes non conformes.
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la thermoformeuse ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245\ ;\ 255]$. *Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à* 10^{-3}

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes fabriqués ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
2. Calculer la probabilité $P(X=2)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres.
   Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité ?

PARTIE C

Le cahier des charges établit que la proportion dans la production de 2 % de tubes refusés par le contrôle de conformité est acceptable.
On veut savoir si une machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 250 dans lequel 6 tubes se révèlent être non conformes.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non conformes dans un échantillon de taille 250.
2. La machine de production doit-elle être révisée ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des batteries Lithium-ion pour smartphone.

PARTIE A

Ces batteries sont produites par trois ateliers. L'atelier A produit 15% des batteries, l'atelier B en produit 20% et l'atelier C fournit le reste de la production.
Le contrôle de qualité mis en place a permis d'établir que sur l'ensemble de la production 3% des batteries sont défectueuses, 6% des batteries produites dans l'atelier A sont défectueuses et 4% des batteries produites dans l'atelier B sont défectueuses.
On prélève au hasard une batterie parmi la production totale de l'entreprise et, on définit les évènements suivants :

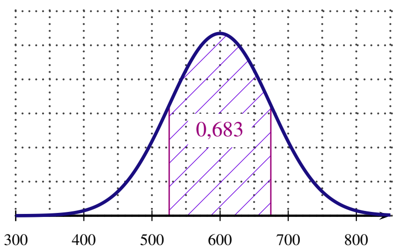
— A : « la batterie provient de l'atelier A » ;
— B : « la batterie provient de l'atelier B » ;
— C : « la batterie provient de l'atelier C » ;
— D : « la batterie est défectueuse ».

1. a) En utilisant l'énoncé, donner les probabilités $P(D)$, $P_A(D)$, $P_B(D)$ et calculer $P(C)$.
   b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer $P(A \cap D)$ et formuler une interprétation de ce résultat.
3. a) Montrer $P(C \cap D) = 0{,}013$.
   b) En déduire la probabilité qu'une batterie produite par l'atelier C soit défectueuse.
4. La batterie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par l'atelier A ?
5. On prélève au hasard 10 batteries dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à 10 tirages avec remise.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que parmi les 10 batteries, il y en ait au moins une qui soit défectueuse ?

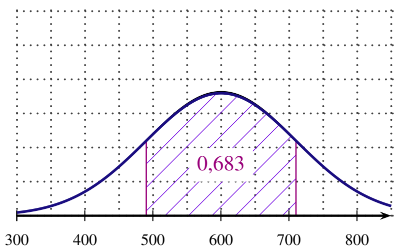
PARTIE B

Le nombre de cycles de charge d'une batterie est appelé durée de vie de la batterie.
La durée de vie des batteries Lithium-ion mises en vente par cette entreprise est modélisée par la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 74{,}6$.

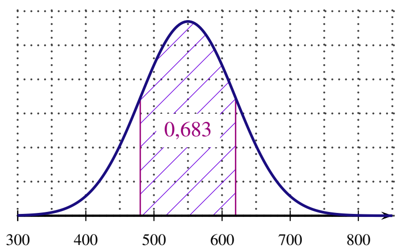
1. La fonction densité associée à X est représentée sur un seul de trois graphiques ci-dessous.
   Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

2. a) Déterminer $P(550 \leqslant X \leqslant 1000)$ en donnant le résultat arrondi au centième.
   b) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une batterie soit inférieure à 500 cycles de charge ?

PARTIE C

Le service commercial affirme que 91% des batteries proposées à la vente ont une durée de vie supérieure à 500 cycles de charge.
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire indépendant a reconstitué la vie de 100 batteries en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer leur durée de vie en fonction de différents facteurs.
Sur ce lot, on a constaté que 13 batteries ont eu une durée de vie inférieure à 500 cycles de charge.

Le résultat de ce test remet-il en question l'affirmation du service commercial ?

EXERCICE 5 *(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2013)*

1. Le lendemain d'une épreuve de mathématiques au baccalauréat, on corrige un échantillon de 160 copies choisies au hasard parmi l'ensemble des copies et on a observe que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10.
   a) Déterminer la proportion des copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10.

b) Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies.

c) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'amplitude inférieure à 0,04 ?

2. À l'issue du premier groupe d'épreuves on désigne par X la variable aléatoire qui, à un candidat choisi au hasard parmi l'ensemble des candidats, associe sa moyenne générale.

   Un correcteur propose de considérer que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 10,5 et d'écart-type 2.

   a) Si ce correcteur a raison, quel intervalle centré en 10,5 devrait contenir 95 % des moyennes des candidats ?

   b) À l'aide de la calculatrice, calculer $P(X > 12)$.

EXERCICE 6

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondis à 10^{-4} *près.*

Une usine fabrique en grande quantité des lames de parquet en chêne. Les bois proviennent de deux fournisseurs A et B.

PARTIE A

Dans le stock de cette usine, 75 % des bois proviennent du fournisseur A.
On constate que 9 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur A et 13 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur B présentent un léger défaut qui ne justifie pas le déclassement des lames.
On prélève au hasard une lame. On considère les évènements suivants :

— A : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur A » ;

— B : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur B » ;

— D : « la lame prélevée a un léger défaut ».

1. Calculer la probabilité $P(B \cap D)$.
2. Calculer la probabilité que la lame a un léger défaut.
3. Calculer la probabilité qu'une lame ayant un léger défaut provienne de bois du fournisseur A.

PARTIE B

On prélève au hasard 40 lames dans le stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une lame prélevée au hasard dans ce stock ait un défaut est égale à 0,1.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 lames à un tirage avec remise de 40 lames.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre lames qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux lames ont un défaut.

PARTIE C

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard dans le stock 400 lames.
On admet que la loi de la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 400 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut peut être approchée par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

1. Déterminer, la probabilité que dans un prélèvement de 400 lames, il y ait plus de 50 lames ayant un défaut.

2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de lames ayant un défaut. En déduire le nombre de lames ayant un défaut que le client peut trouver avec une probabilité proche de 0,95.

PARTIE D

Le fabriquant souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients satisfaits par son produit. Pour cela, il effectue un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. Sa clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage aléatoire avec remise.
Lors de ce sondage, 156 clients se sont déclarés satisfaits par son produit.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p de clients satisfaits.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
3. Ce fabriquant peut-il être certain que plus de 70% de sa clientèle est satisfaite par son produit ?

EXERCICE 7

(*D'après sujet bac Asie 2016*)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

PARTIE A

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités $p(X=0)$ et $p(X=1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.

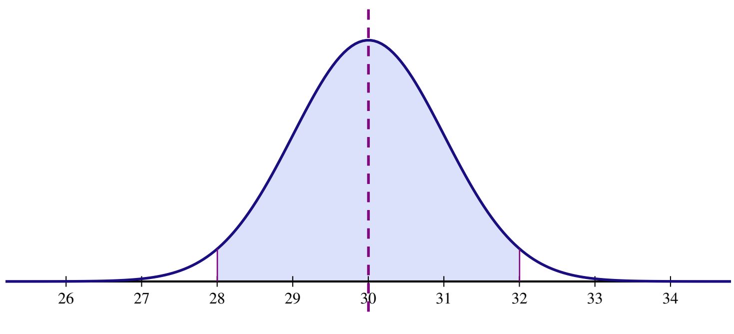
PARTIE B

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle $[98;103]$. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle $[28;33]$.

1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

   Calcule la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.
2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.

   Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.



L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.

PARTIE C

Dans cette partie, on considère une grande quantité de clés devant être livrées à un éditeur de logiciels. On considère un échantillon de 100 clés prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 94 clés sont sans défaut.
Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion des clés USB qui sont sans défaut.

EXERCICE 8

(*D'après sujet bac Centres étrangers 2016*)

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ».
Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.
On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

— le stock contient 40 % de pneus neige ;
— parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les lests de qualité ;
— parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

— N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ;
— C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ;
— Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
On notera aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

PARTIE A

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Montrer que $p(Q) = 0{,}944$.
4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

PARTIE B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres ?
2. Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

PARTIE C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année. Pour cela, il décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.
Parmi les 900 clients interrogés, 735 sont satisfaits de la tenue de route.
Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ? Détailler les calculs, la démarche et l'argumentation.

EXERCICE 9 (*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2015*)

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42 % de femmes, 35 % des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55 % pour les hommes.
Une personne entre dans le magasin. On note :

— F l'évènement : « La personne est une femme » ;

— R l'évènement : « La personne repart sans rien acheter » ;

Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire et $p(A)$ sa probabilité.
Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $p(R) = 0{,}534$.

PARTIE B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

PARTIE C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30 % des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur, ...).
Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.
2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires.

   Doit-on rejeter au seuil de 5 % l'hypothèse formulée par le gérant ?

EXERCICE 10 (*D'après sujet bac Liban 2015*)

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires. La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B.
La machine M_A fournit 40 % de la production totale et M_B le reste. La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3 % de médailles défectueuses.

PARTIE A

On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on considère les évènements suivants :

— A : « la médaille provient de la machine M_A » ;

— B : « la médaille provient de la machine M_B » ;

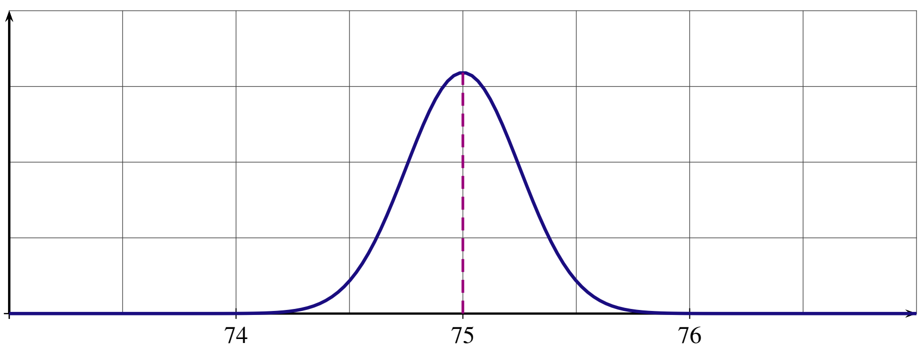
— D : « la médaille est défectueuse » ;

— $\overline{D}$ est l'évènement contraire de l'évènement D.

1. a) Traduire cette situation par un arbre pondéré.
   b) Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à 0,026.
   c) Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.
2. Les médailles produites sont livrées par lots de 20. On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production. On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot.
   a) Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.
   b) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot.

PARTIE B

Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74{,}4;75{,}6]$. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 0,25.
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de Y.



1. Indiquer par lecture graphique la valeur de μ.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74{,}4 \leqslant Y \leqslant 75{,}6)$.
3. En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur de h pour que $P(75-h \leqslant Y \leqslant 75+h) \approx 0{,}95$.

PARTIE C

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine M_B, on admet que la proportion des médailles ayant une épaisseur non conforme dans la production est de 3 %.
Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine M_B, on a prélevé au hasard un échantillon de 180 médailles et on a constaté que 11 médailles ont une épaisseur non conforme.

1. Calculer, dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme.

2. Déterminer, en justifiant, si le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B.

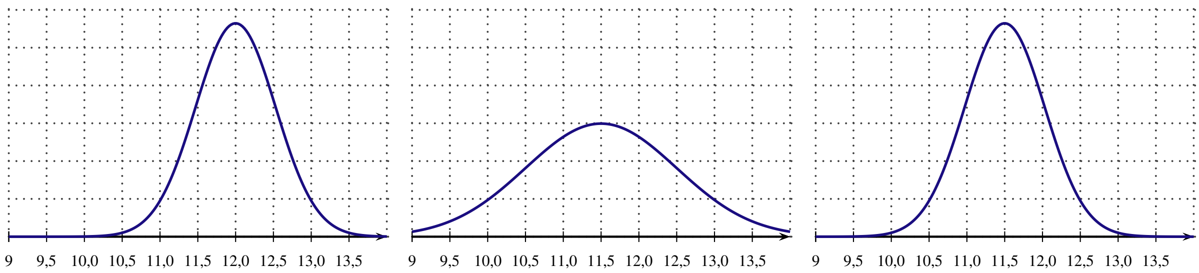
EXERCICE 11

(*D'après sujet BTS 2016*)

PARTIE 1 : Production de batteries

L'entreprise BatriPlus fabrique des batteries pour le téléphone Nova4 équipé du système d'exploitation OSNov7. Dans un souci de contrôle de qualité de sa production, cette entreprise décide de procéder à un contrôle de l'autonomie de ces batteries.
Le contrôle consiste à prélever un certain nombre de batteries au hasard dans la production et, après les avoir chargées et insérées dans un téléphone Nova4, de procéder à un test d'autonomie. On détermine alors l'autonomie en mesurant le temps écoulé entre le démarrage du test et l'arrêt du téléphone par décharge de la batterie.
Une batterie est jugée conforme si l'autonomie est supérieure à 10,5 heures.

1. On modélise l'autonomie par une variable aléatoire X qui, à toute batterie prélevée au hasard dans la production, associe son autonomie en heures. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m = 11{,}5$ et d'écart type $\sigma = 0{,}53$.
   a) La fonction densité associée à X est représentée sur un seul des trois graphiques ci-dessous. Quel est ce graphique ?



Graphique 1 Graphique 2 Graphique 3

   b) Quelle est la probabilité qu'une batterie, prise au hasard dans la production, soit jugée conforme ?
2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de fabrication, on admet que 97 % des batteries fabriquées sont conformes.
   Lors d'un test réalisé sur un échantillon de 200 batteries, on a constaté que 9 batteries avaient une autonomie inférieure à 10,5 heures.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour un échantillon de taille 200.
   b) Au seuil de décision de 5% le résultat de ce test remet-il en question la qualité de la production ?

PARTIE 2 : Commercialisation

La société PieceNov commercialise des lots de pièces détachées pour le téléphone Nova4 auprès de revendeurs et de réparateurs. Elle s'approvisionne pour 60 % de ses batteries auprès de la société Batriplus et pour le reste auprès de la société ElecBat. On admet que 97 % des batteries fabriquées par BatriPlus et 95 % des batteries fabriquées par ElecBat sont conformes.

1. On prélève une batterie au hasard dans le stock pour la contrôler. Démontrer que la probabilité que la batterie soit non conforme est 0,038.
2. La société PièceNov commercialise les batteries par lots de 60.
   On choisit au hasard un lot de 60 batteries dans le stock. On admet que le stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 60 batteries.
   On note Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de batteries ainsi prélevées, associe le nombre de batteries non conformes du lot.
   a) Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 batteries non conformes dans le lot.

b) Calculer $E(Y)$. Que représente ce nombre dans le cadre d'un grand nombre de lots ?

PARTIE 3 : Satisfaction

Un sondage effectué auprès d'un échantillon de 100 revendeurs ou réparateurs du téléphone Nova4 a montré que 55 d'entre eux préfèrent la batterie fabriquée par BatriPlus à celle fabriquée par ElecBat.

1. Peut-on considérer que plus de 50% des revendeurs ou réparateurs du téléphone Nova4 préfèrent la batterie fabriquée par BatriPlus à celle fabriquée par ElecBat ?
2. À fréquence observée constante, quel nombre de revendeurs ou réparateurs du téléphone Nova4 aurait-il fallu interroger pour prévoir la préférence de la batterie fabriquée par BatriPlus par rapport à son concurrent ?

EXERCICE 12

(*D'après sujet BTS 2016*)

Un magasin d'optique dispose d'un répertoire informatique contenant un grand nombre de fichiers de clients ayant acheté des verres.

PARTIE A

On s'intéresse dans cette partie à deux types de traitements effectués sur les verres des clients : le traitement anti-statique et le traitement anti-reflet. L'examen des fichiers du répertoire montre que 20 % des clients ont demandé le traitement anti-statique de leurs verres. Il établit aussi que 70 % des clients ayant demandé le traitement anti-statique ont également demandé le traitement anti-reflet de leurs verres et que 10 % de ceux qui n'avaient pas demandé le traitement anti-statique ont demandé le traitement anti-reflet de leurs verres.
On prélève un fichier au hasard dans le répertoire. On considère les évènements suivants :

— S : « le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-statique de ses verres » ;

— R : « le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-reflet de ses verres » ;

1. Montrer que la probabilité que le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-reflet de ses verres est égale à 0,22.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $P_R(S)$.

PARTIE B

Dans le répertoire, 45 % des fichiers correspondent à des clients ayant demandé le traitement anti-rayure. On prélève au hasard et avec remise 100 fichiers dans le répertoire.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 fichiers, associe le nombre de fichiers de clients ayant demandé le traitement anti-rayure de leurs verres. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 4,975.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait, dans un prélèvement de 100 fichiers, au moins 50 fichiers de clients ayant demandé le traitement anti-rayure de leurs verres.
2. Dans un échantillon de 100 fichiers, on trouve 55 fichiers de clients ayant demandé le traitement anti-rayure. Cet échantillon est-il représentatif ?

PARTIE C

Le directeur du magasin organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients ayant acheté des verres polarisants. Pour cela, il interroge au hasard un échantillon de 150 clients parmi l'ensemble de sa clientèle ayant acheté des verres polarisants et, constate que 135 clients sont satisfaits par ces verres.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p de clients satisfaits des verres polarisants avec le niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
2. Est-on certain que la proportion p appartienne à cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?