ACTIVITÉ 1

Étude du marché du travail de la population (15-65 ans) d'un pays fictif.

En 2014, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.
Les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail de ce pays les années précédentes sont données, en pourcentage, dans le tableau suivant :

Année n \ Année $n+1$	**Emploi**	**Chômage**	**Inactif**
Emploi	90	3	7
Chômage	30	43	27
Inactif	14	7	79

Ce tableau synthétise les changements de situation entre deux années consécutives : 90% des personnes qui ont un emploi une année donnée occupent un emploi l'année suivante.

On interroge au hasard une personne de la population (15-65 ans). Soit n un entier naturel, on note :

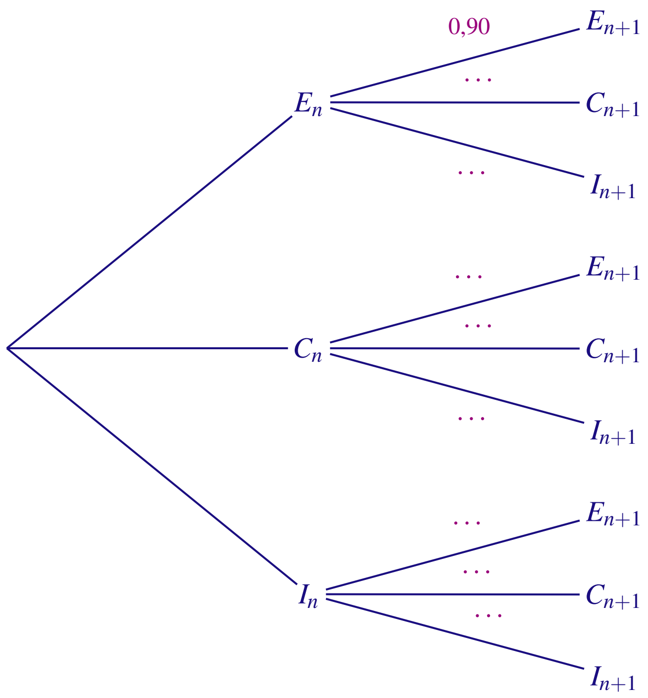
— E_n l'évènement « Cette personne occupe un emploi l'année $2014+n$ » ;

— C_n l'évènement « Cette personne est au chômage l'année $2014+n$ » ;

— I_n l'évènement « Cette personne est inactive l'année $2014+n$ ».

— e_n, c_n et i_n les probabilités respectives $P(E_n)$,$P(C_n)$ et $P(I_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré qui traduit l'évolution de la situation entre les années n et $n+1$



2. Calculer les probabilités e_1 et c_1. En déduire la probabilité i_1.
3. Calculer la probabilité c_2.
4. Exprimer les probabilités e_{n+1}, c_{n+1} et i_{n+1} en fonction des probabilités e_n, c_n et i_n.

I DÉFINITIONS

1 GRAPHE PROBABILISTE

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré (sans arêtes parallèles) dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

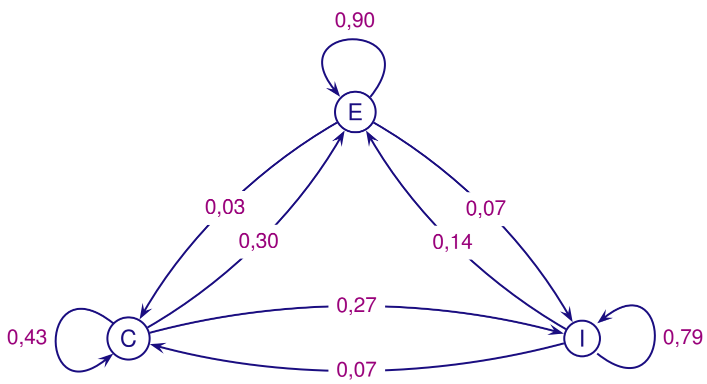
Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :

— les sommets du graphe sont les états possibles du système ;

— le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'évènement j à l'étape $n+1$ sachant que l'évènement i est réalisé à l'étape n.

EXEMPLE

Notons respectivement E, C et I les trois états emploi chômage et inactivité de l'activité 1. Le graphe probabiliste associé est :



2 MATRICE DE TRANSITION

La matrice de transition associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M=(m_{i,j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et pour chaque ligne la somme des coefficients est égale à 1.
Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n.

EXEMPLE

La matrice de transition M du graphe précédent est :

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}$$

3 ÉTAT PROBABILISTE

Un état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.
Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que la somme des termes est égale à 1.

EXEMPLE

Dans l'activité 1, en 2014, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.
Notons P_0 l'état probabiliste de l'année 2014 :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}06 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

II ÉVOLUTION D'UN ÉTAT AU COURS DU TEMPS

Étudions l'évolution au cours du temps du système à trois états (emploi, chômage, inactif) de l'activité 1 :
Soit $P_n = \begin{pmatrix} e_n & c_n & i_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du système l'année n.
D'après la formule des probabilités totales, l'année $n+1$:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n \times 0{,}90 + c_n \times 0{,}30 + i_n \times 0{,}14 \\ c_{n+1} &= e_n \times 0{,}03 + c_n \times 0{,}43 + i_n \times 0{,}27 \\ i_{n+1} &= e_n \times 0{,}14 + c_n \times 0{,}07 + i_n \times 0{,}79 \end{aligned}$$

L'état probabiliste du système l'année $n+1$ est :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} e_n \times 0{,}90 + c_n \times 0{,}30 + i_n \times 0{,}14 & e_n \times 0{,}03 + c_n \times 0{,}43 + i_n \times 0{,}27 & e_n \times 0{,}14 + c_n \times 0{,}07 + i_n \times 0{,}79 \end{pmatrix}$$

Soit $P_{n+1} = \begin{pmatrix} e_n & c_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}$

1 PROPOSTION

On considère un système qui peut se trouver dans k états $1, 2, \cdots, k$ avec une certaine probabilité et on étudie l'évolution de ce système au cours du temps.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du système à l'instant n, M la matrice de transition et P_{n+1} l'état probabiliste du système à l'instant $n+1$. Alors, pour tout entier n, on a

$$P_{n+1} = P_n M$$

EXEMPLE

Avec les données de l'exemple précédent :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}06 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}064 & 0{,}262 \end{pmatrix}$$

En 2015, 6,4% de la population devrait être au chômage.

2 THÉORÈME

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre p, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n, on a $P_n = P_0 \times M^n$

EXEMPLE

Calculons l'état probabiliste prévisible en 2020 :

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}06 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}^6 \approx \begin{pmatrix} 0{,}64 & 0{,}069 & 0{,}291 \end{pmatrix}$$

En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur les transitions dans le marché du travail, en 2020 d'environ 6,9% de la population (15-65 ans) de ce pays serait au chômage.

3 ÉTAT STABLE

Un état stable d'un graphe probabiliste de matrice de transition M est un état P tel que $P = PM$.

EXEMPLE

Déterminons l'état stable P du système emploi, chômage et inactivité sur le marché du travail.
Soit $P = \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix}$ l'état stable. Nous avons :

$$\begin{aligned} P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0{,}9e+0{,}3c+0{,}14i & 0{,}03e+0{,}43c+0{,}07i & 0{,}07e+0{,}27c+0{,}79i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or P est un état probabiliste d'où $e+c+i=1$. Par conséquent e, e et i sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0{,}9e+0{,}3c+0{,}14i &=& e \\ 0{,}03e+0{,}43c+0{,}07i &=& c \\ 0{,}07e+0{,}27c+0{,}79i &=& i \\ e+c+i &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -0{,}1e+0{,}3c+0{,}14i &=& 0 \\ 0{,}03e-0{,}57c+0{,}07i &=& 0 \\ 0{,}07e+0{,}27c-0{,}21i &=& 0 \\ e+c+i &=& 1 \end{array}\right. \quad L_3 = -(L_1+L_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -0{,}1e+0{,}3c+0{,}14i &=& 0 \\ 0{,}03e-0{,}57c+0{,}07i &=& 0 \\ e+c+i &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0{,}4c+0{,}24i &=& 0{,}1 \\ 0{,}6c-0{,}04i &=& 0{,}03 \\ e+c+i &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e+c+i &=& 1 \\ 0{,}4c+0{,}24i &=& 0{,}1 \\ 0{,}8i &=& 0{,}24 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e &=& 0{,}63 \\ c &=& 0{,}07 \\ i &=& 0{,}30 \end{array}\right.$$

L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}07 & 0{,}30 \end{pmatrix}$.
En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur le marché du travail, sur le long terme environ 7% de la population (15-65 ans) serait au chômage.

REMARQUE

Le taux de chômage est le rapport entre le chômage et la population active (emploi+chômage) soit :

$$\frac{0{,}07}{0{,}63+0{,}07} = 0{,}1$$

Sur le long terme, le taux du chômage se stabilise à 10%

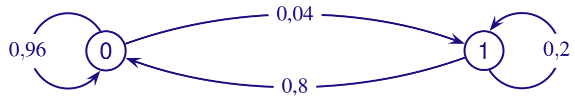
4 PROPRIÉTÉ

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.

EXEMPLE

En salle des professeurs, il y a deux photocopieuses qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Chaque photocopieuse en état de marche a une probabilité égale à 0,2 de tomber en panne pendant la journée. Dans le cas où une photocopieuse tombe en panne pendant la journée, elle est réparée en fin de journée et se retrouve donc en état de marche le lendemain.
Supposons que l'on ne puisse pas réparer plus d'une photocopieuse chaque jour.
On s'intéresse au nombre de photocopieuses en panne en début de journée.
Le graphe probabiliste est un graphe à deux états 0 ou 1 :



dont la matrice de transition est

$$M=\begin{pmatrix}0{,}96 & 0{,}04\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

Soit $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ l'état stable du système. Nous avons :

$$\begin{aligned}P=PM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}96 & 0{,}04\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}96a+0{,}8b & 0{,}04a+0{,}2b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or P est un état probabiliste d'où $a+b=1$. Par conséquent a et b sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}0{,}96a+0{,}8b &=& a\\ 0{,}04a+0{,}2b &=& b\\ a+b &=& 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}0{,}04a-0{,}8b &=& 0\\ 0{,}04a-0{,}8b &=& 0\\ a+b &=& 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}0{,}04a-0{,}8b &=& 0\\ a+b &=& 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}a &=& \dfrac{20}{21}\\ b &=& \dfrac{1}{21}\end{array}\right.$$

L'état stable du système est $P=\begin{pmatrix}\dfrac{20}{21} & \dfrac{1}{21}\end{pmatrix}$. Quel que soit l'état initial, au bout d'un certain nombre jours, la probabilité que chaque jour aucune photocopieuse ne soit en panne est égale à $\dfrac{20}{21}$.

EXERCICE 1

Une chaîne de magasins de prêt à porter a adopté en fonction du succès ou de l'échec d'un type de vêtement mis en vente, la stratégie commerciale suivante :

— En cas de succès du modèle vendu on conserve le même modèle le mois suivant. Il a alors une probabilité 0,5 de se retrouver en situation d'échec.

— En cas d'échec on change de modèle le mois suivant en adoptant une politique commerciale plus agressive (prix plus ajusté, publicité etc). Il a alors une probabilité 0,6 de se retrouver en situation de succès.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états.
2. On suppose qu'en cas de succès d'un modèle, l'entreprise gagne 12€ par article et qu'en cas d'échec, elle perd 1,20€ par article.
   a) En cas de succès d'un modèle, quel est le gain moyen sur ce modèle un mois plus tard ?
   b) Quel est le montant du gain moyen que cette entreprise peut espérer réaliser sur le long terme ?

EXERCICE 2

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

— une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle ;

— une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

— 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule ;

— 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2015, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n + b_n = 1$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année $2015 + n$. L'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2016.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5 a_n + 0{,}2$.
3. On pose pour tout entier n, $u_n = a_n - 0{,}4$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0{,}4 \times (1 + 0{,}5^n)$
   c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite (a_n). Donner une interprétation concrète de ce résultat.
   d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401 ?

EXERCICE 3

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.
Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.
Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n-ième mois après l'étude et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

b) Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $\begin{pmatrix}0{,}564 & 0{,}436\end{pmatrix}$.

3. Soit $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P=P\times M$. Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation $P_{n+1}=P_n\times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}6a_n+0{,}24$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n=a_n-0{,}6$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n=-0{,}1\times 0{,}6^n+0{,}6$.
   c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à 0,595 ?

EXERCICE 4

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.
Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

— 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative ;

— Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;

— 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F, N et R.
2. On note M la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter $M=\begin{pmatrix}\dots & 0{,}28 & 0{,}1\\ 0{,}32 & \dots & 0{,}1\\ \dots & \dots & 0{,}7\end{pmatrix}$.
3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.
   Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n, b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n.
   La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
   a) Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est $P_1=\begin{pmatrix}0{,}32 & 0{,}58 & 0{,}1\end{pmatrix}$.
   b) Déterminer l'état probabiliste P_3. Interpréter ce résultat.
   c) Déterminer l'état probabiliste stable du système.
   d) En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire ?

EXERCICE 5

Un industriel décide de modifier l'emballage d'un de ses produits.
On note A le conditionnement actuel du produit et B le nouveau conditionnement.
À partir des études réalisées au préalable, la direction commerciale estime que 28 % des consommateurs choisissant le conditionnement A et 12 % des consommateurs choisissant le conditionnement B changent d'avis d'un mois sur l'autre.
Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les probabilités qu'un consommateur choisisse respectivement le conditionnement A et le conditionnement B le n-ième mois après la mise sur le marché du conditionnement B et $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après la mise sur le marché du nouveau conditionnement. Ainsi, $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b) Calculer la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement B deux mois après sa mise sur le marché.
3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
   Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.

PARTIE B

L'industriel décide de ne plus proposer le conditionnement A à partir du mois où il prévoit que moins de 32 % des consommateurs choisiront ce conditionnement.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}12$.
2. Pour déterminer au bout de combien de mois le conditionnement A sera retiré du marché, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à A la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que ...
	Affecter à A la valeur ...
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

3. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0{,}3$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_n = 0{,}7 \times 0{,}6^n + 0{,}3$.
4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0{,}7 \times 0{,}6^n + 0{,}3 \leqslant 0{,}32$.
   En déduire au bout de combien de mois, le conditionnement A sera retiré du marché.

EXERCICE 6

Après avoir effectué quelques parties au jeu « 2048 » Léa a constaté que sur une journée :

— quand elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,64.

— quand elle a perdue, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,14.

On note G l'état : « Léa a gagné la partie » et P l'état : « Léa a perdu la partie ».
Pour un jour donné, on note également pour tout entier naturel n :

— g_n la probabilité que Léa gagne lors de la n-ième partie de la journée ;

— p_n la probabilité que Léa perde lors du n-ième partie de la journée ;

— $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième partie de la journée.

On suppose que la veille du jour considéré, Léa avait gagné sa dernière partie, on a donc $g_0 = 1$ et $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c) Calculer la probabilité que Léa gagne sa troisième partie.
   d) Déterminer l'état stable du graphe probabiliste.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}14$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $u_n = g_n - 0{,}28$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $g_n = 0{,}72 \times 0{,}5^n + 0{,}28$.
4. À partir de combien de parties dans la journée la probabilité que Léa gagne sa partie sera-t-elle strictement inférieure à 0,3 ?

EXERCICE 7

(*D'après sujet bac Liban 2016*)

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

— 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;

— 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

— a_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat sur internet ;

— b_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & bn \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au n-ième achat. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note :

— A l'état : « La personne effectue son achat sur internet » ;

— B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. a) Calculer la matrice M^4.
   b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5^e achat sur internet est égale à 0,812 5.
4. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
   a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système : $\begin{cases} 0{,}1a - 0{,}4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$
   b) Résoudre le système précédent.
   c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?
5. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.
   b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0{,}801$.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que ...
	Affecter à A la valeur $0{,}5 \times A + 0{,}4$
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

   c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

EXERCICE 8 (*D'après sujet bac Polynésie 2015*)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

TABLEAU 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	8 h	10 h	14 h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h

TABLEAU 2	
Poste 1	25 €/h
Poste 2	20 €/h
Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H=\begin{pmatrix}8&10&14\\6&6&10\\12&10&18\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}25\\20\\15\end{pmatrix}$.
   a) Donner la matrice produit $P=H\times C$.
   b) Que représentent les coefficients de la matrice $P=H\times C$?
2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

   Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

   Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.
   a) Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système $H\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500\\350\\650\end{pmatrix}$.
   b) Déterminer les réels a, b et c.

PARTIE B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

— les spots s'allument tous à 22 heures ;

— toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1. a) Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.
   b) Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe, $M=\begin{pmatrix}\cdots&0,3\\0,5&\cdots\end{pmatrix}$.
2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\end{pmatrix}$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.

   On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1}=P_n\times M$.
   a) Justifier que $a_0=1$ et $b_0=0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n.
   b) Déterminer les coefficients de la matrice P_3. Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?
3. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}$ du graphe probabiliste.

EXERCICE 9 (*D'après sujet bac Polynésie septembre 2015*)

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des automobiles en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité) et de développer un réseau de navettes.

PARTIE A

L'objectif affiché par la municipalité est de réduire de moitié la présence des automobiles dans la zone ZTL, dans les deux ans à venir.
Initialement, 40 % des automobiles circulant dans la ville, circulaient dans cette zone ZTL. Suite à l'instauration de la taxe, l'évolution du trafic dans la ville a été suivie mois après mois.
L'étude a révélé que, parmi les automobiles circulant dans la ville :

— 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL n'y circulaient plus le mois suivant.

— 0,2 % des automobiles qui ne circulaient pas dans la zone ZTL ont été amenés à y circuler le mois suivant.

On note Z l'état : « l'automobile a circulé dans la zone ZTL au cours du mois » et $\overline{Z}$ l'état : « l'automobile n'a pas circulé dans la zone ZTL au cours du mois ».
Pour tout entier naturel n, on note :

— a_n la proportion d'automobiles circulant dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;

— b_n la proportion d'automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste après n mois.

On a : $a_n + b_n = 1$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

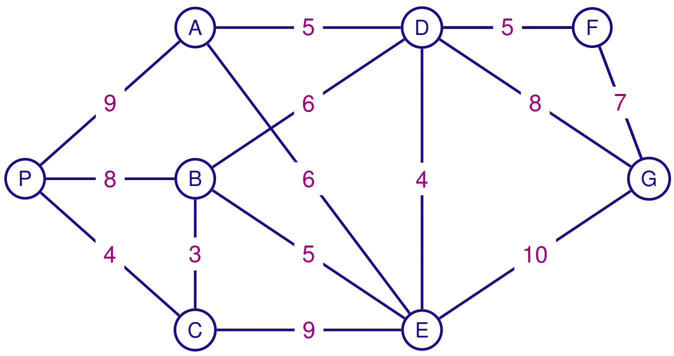
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\overline{Z}$.
2. a) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe (la première colonne concerne Z et la deuxième concerne $\overline{Z}$).

   b) Vérifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3892 & 0{,}6108 \end{pmatrix}$.
3. L'objectif affiché par la municipalité sera-t-il atteint ?

PARTIE B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.

Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?
3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

EXERCICE 10 (*D'après sujet bac Pondichery 2014*)

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

PARTIE A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste.
Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V.
Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0 = 0{,}45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné ci-dessous. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur ……	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur $0{,}9 \times U + 0{,}15 \times V$	L7
	Affecter à V la valeur ……	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}15$. On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0{,}6$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

PARTIE B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a,b,c) est solution du système (S).

$$(S)\begin{cases} a+b+c & = 1 \\ 27a+9b+3c & = 17{,}4 \\ 125a+25b+5c & = 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
   b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a,b,c) solution du système (S).
2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?