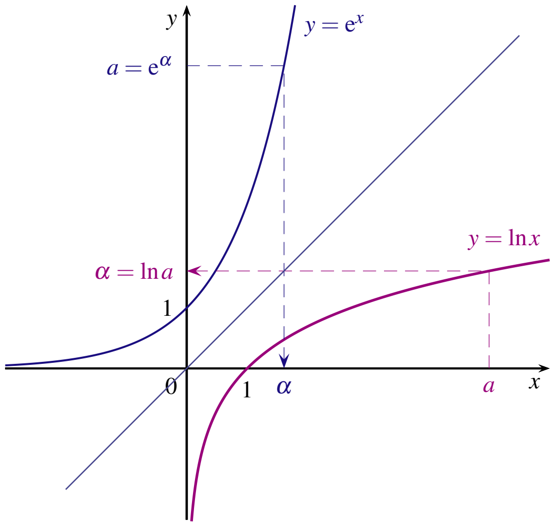
I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \in]0;+\infty[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $\mathrm{e}^\alpha = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = \mathrm{e}^y$$

REMARQUES

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

2 CONSÉQUENCES

1. Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff \mathrm{e}^y = x$ donc $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \iff \ln(y) = x$ soit $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ et $a \times b = \mathrm{e}^{\ln(a \times b)}$
D'autre part,

$$a \times b = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$$

D'où

$$\mathrm{e}^{\ln(a \times b)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$$

Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

REMARQUE

John Napier publia en 1614 une méthode de calcul transformant les multiplications en additions : les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre).

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0 \iff \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

2. Soient $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,

$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n \ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$

   Donc $\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n \ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n \ln a$.

4. Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2 \ln \sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\ln'(x)\times\mathrm{e}^{\ln x}=\ln'(x)\times x$.
Or pour tout réel $x>0$, $f(x)=x$ d'où $f'(x)=1$
Ainsi pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

2 VARIATION

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. Or si $x>0$ alors, $\dfrac{1}{x}>0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	0 ↗	

CONSÉQUENCES

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a=\ln b$ si, et seulement si, $a=b$

$\ln a>\ln b$ si, et seulement si, $a>b$

Puisque $\ln 1=0$:

Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x=0$ si, et seulement si, $x=1$

$\ln x>0$ si, et seulement si, $x>1$

$\ln x<0$ si, et seulement si, $0<x<1$

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x>0$, $\ln x\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel k, l'équation $\ln x=k$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $x=\mathrm{e}^k$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

— $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(\mathrm{e};1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.

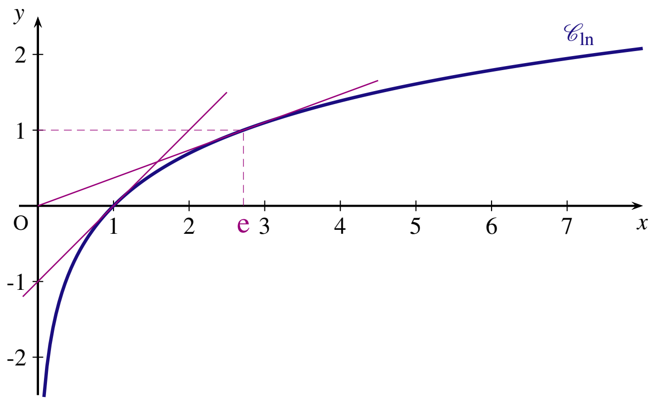
— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ est $\ln'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1 \iff y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

— Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante.
Par conséquent, la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.



EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln 10000-\ln 0{,}1+\ln 0{,}01$; $B=\ln(32)-7\ln(2)-4\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$; $C=8\ln(\sqrt{3})+5\ln(9)-\ln\left(9\sqrt{3}\right)$;

$D=\dfrac{\ln 5-\ln 10}{2\ln\left(\sqrt{2}\right)}$; $E=\dfrac{\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$; $F=\dfrac{\frac{1}{3}\ln 9-4\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{3}}{\ln 3}$.

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right)+\mathrm{e}^{-\ln 2}$; $B=\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\ln\left(\mathrm{e}^{2}\right)}-\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$; $C=\ln\left(4\mathrm{e}^{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$; $D=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}\right)}{\ln 3}\times\dfrac{\ln 9}{\mathrm{e}^{2}}$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :

1. a) $\mathrm{e}^{x}=5$; b) $2\mathrm{e}^{x}=0{,}2$; c) $\mathrm{e}^{2x-1}-3=0$; d) $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}=0{,}25$; e) $2\mathrm{e}^{x^{2}}-4=0$.
2. a) $\mathrm{e}^{1-2x}=3\mathrm{e}^{x}$; b) $3\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^{2+3x}$; c) $\dfrac{5\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{2x}}=4$; d) $\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\left(\mathrm{e}^{2+3x}-2\right)=0$.

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $4\mathrm{e}^{2x+1}\leqslant 3$; b) $3\mathrm{e}^{-2x}>1$; c) $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{3}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}\leqslant 0$; d) $\dfrac{5\mathrm{e}^{2-3x}}{\mathrm{e}^{2x-1}}>2$; e) $3\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^{x}+2\leqslant 0$.

EXERCICE 5

1. Résoudre dans $]0;+\infty[$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :
   a) $\ln x=-1$; b) $2\ln x+0{,}01=0$; c) $3\ln x=\mathrm{e}^{3}$; d) $2(\ln x)^{2}=1$; e) $\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)(\ln(2x)-2)=0$.
2. Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :
   a) $2\ln x\leqslant -2$; b) $\ln 2x\leqslant -2$; c) $\ln\dfrac{1}{x}-\ln x\geqslant 0$; d) $\ln(3x)-2\ln x<5$; e) $(\ln x)^{2}+\dfrac{3\ln x}{2}-1\geqslant 0$.

EXERCICE 6

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel $x>1$, $\ln\left(x^{2}+x-2\right)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$
2. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

a) $1{,}05^{n}\geqslant 1{,}5$; b) $0{,}92^{n}\leqslant 0{,}75$; c) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^{n}\geqslant 2$; d) $0{,}2\geqslant\left(1-\dfrac{9}{100}\right)^{n}$

EXERCICE 8

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4% par an.
En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.

1. Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015+n)$. Exprimer u_n en fonction de n.
2. À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 % ?

EXERCICE 9

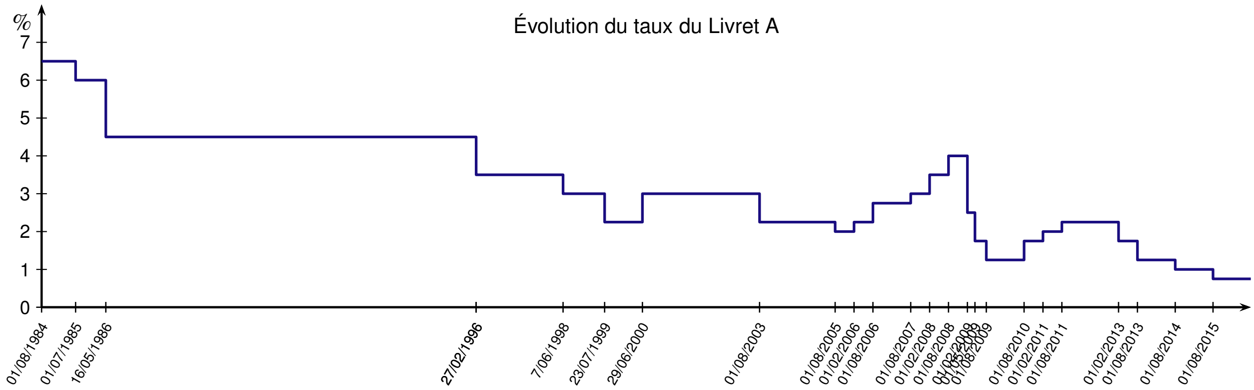
Le livret A est un compte d'épargne rémunéré. Les intérêts du Livret A sont calculés par quinzaine, le 1[er] et le 16 de chaque mois. (Il existe 24 quinzaines dans l'année : deux quinzaines par mois). Au 31 décembre de chaque année, l'intérêt acquis s'ajoute au capital et générera lui-même des intérêts l'année suivante.
En dehors de circonstances exceptionnelles, le taux du Livret A peut être révisé deux fois par an, au 1[er] février et au 1[er] août. L'historique des derniers changements du taux de rémunération du Livret A est donné dans le tableau suivant :

Date d'application	1[er] août 2011	1[er] février 2013	1[er] août 2013	1[er] août 2014	1[er] août 2015
Taux	2,25 %	1,75 %	1,25 %	1 %	0,75 %

PARTIE A

Un capital de 18 000 euros a été placé sur le Livret A au 31 décembre 2012.

1. a) Vérifier que le capital disponible au 31 décembre 2013 est égal à 18 285 €.
   b) Calculer le montant du capital disponible au 31 décembre 2016.
2. Calculer le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement sur quatre ans.
3. Depuis le 1[er] janvier 2013, le montant maximum que l'on peut verser sur un Livret A est de 22 950 euros (la capitalisation des intérêts peut toutefois porter le solde du Livret A au-delà de cette limite).
   a) En supposant que le taux du Livret A reste inchangé, au bout de combien d'années, le capital placé sur le livret A aura-t-il dépassé le montant maximum ?
   b) Le graphique ci-dessous donne l'historique du taux du Livret A depuis août 1984 :



   La conclusion précédente, est-elle pertinente ?

PARTIE B

En matière de placements, l'inflation est à prendre en compte pour déterminer le vrai rendement d'un placement. L'inflation correspondant à une dépréciation de la valeur de la monnaie, on calcule le taux d'intérêt réel en corrigeant le taux d'intérêt nominal des effets de l'inflation afin de vérifier si un montant épargné va gagner ou perdre en pouvoir d'achat au fil du temps.
Le taux d'intérêt réel est défini par la quantité de biens et services supplémentaire qui pourra être acquise au bout d'un an rapportée à la quantité qui aurait pu être achetée au moment du placement.

1. Soit t le taux d'intérêt nominal annuel du Livret A, i le taux annuel de l'inflation et R le taux d'intérêt annuel réel. Justifier que : $R=\dfrac{1+t}{1+i}-1$.
2. On donne ci-dessous les variations annuelles en pourcentage de l'indice des prix à la consommation en France (IPC)

Année	2013	2014	2015	2016
Taux d'inflation	0,86 %	0,51 %	0,04 %	0,5 %

   a) Calculer le taux d'intérêt annuel réel du Livret A pour les années 2013 à 2016.
   b) Calculer le taux d'intérêt réel moyen de ce placement sur quatre ans.

EXERCICE 10

En 2014, le parc informatique d'une entreprise était de 200 ordinateurs.
Pour renouveler ce parc et tenir compte des besoins de l'entreprise, chaque année le gestionnaire supprime 10 % des ordinateurs les plus anciens et achète 30 ordinateurs neufs.
Le nombre d'ordinateurs du parc informatique de cette entreprise est modélisé par la suite (u_n) où où le terme u_n désigne le nombre d'ordinateurs disponibles au cours de l'année $(2014+n)$.
Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs en 2015 et en 2016.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 300$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 300 - 100 \times 0{,}9^n$.
3. En quelle année, le nombre d'ordinateurs disponibles dans cette entreprise sera-t-il supérieur à 250 ?

EXERCICE 11

Une entreprise produit des articles, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut d'assemblage ou un défaut de finition, à l'exclusion de tout autre défaut.
Une étude statistique a permis de constater que sur l'ensemble de la production :

— 9 % des articles présentent les deux défauts.

— 15 % des articles présentent un défaut d'assemblage.

— 4 % des articles n'ayant pas un défaut d'assemblage ont un défaut de finition.

On choisit un article au hasard et on note :

— A l'évènement : « l'article a un défaut d'assemblage » ;

— F l'évènement : « l'article a un défaut de finition ».

1. a) Calculer $p(F)$.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup F$: « l'article est de fabrication défectueuse ».
2. On prélève au hasard n articles. On suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages successifs indépendants avec remise.
   a) On note p_n la probabilité que l'un au moins de ces n articles soit défectueux. Justifier que $p_n = 1 - 0{,}816^n$.
   b) Quel est le nombre minimal d'articles qu'il faut prélever pour que la probabilité que l'un au moins de ces articles soit défectueux soit supérieure à 0,98 ?

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x) = x\ln x - x$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$; c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$; d) $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln(x)$

EXERCICE 13

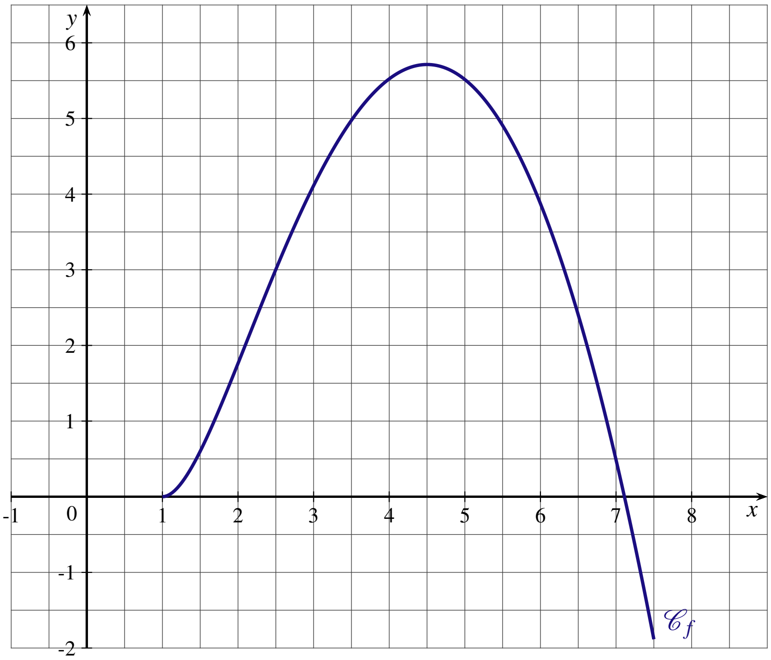
Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Résoudre sur l'intervalle I, l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur I.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Donner la valeur arrondie au centième de α.

EXERCICE 14

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;7{,}5]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9\ln(x) - 10$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;7{,}5]$, on a $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 11x - 9}{x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;7{,}5]$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

PARTIE B : Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 750 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour x centaines de pièces fabriquées et vendues ($1 \leqslant x \leqslant 7{,}5$), est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.
2. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[7;7{,}5]$.
   b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-2} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

```
Initialisation
    a prend la valeur 7
    b prend la valeur 7,5
Traitement
   Tant que b − a > 0,01 faire
       m prend la valeur (a+b)/2 alors
       Si f(m) < 0 alors
           b prend la valeur ...
       Sinon ... prend la valeur ...
    Fin de Tant que
Sortie
    Afficher (a;b)
```

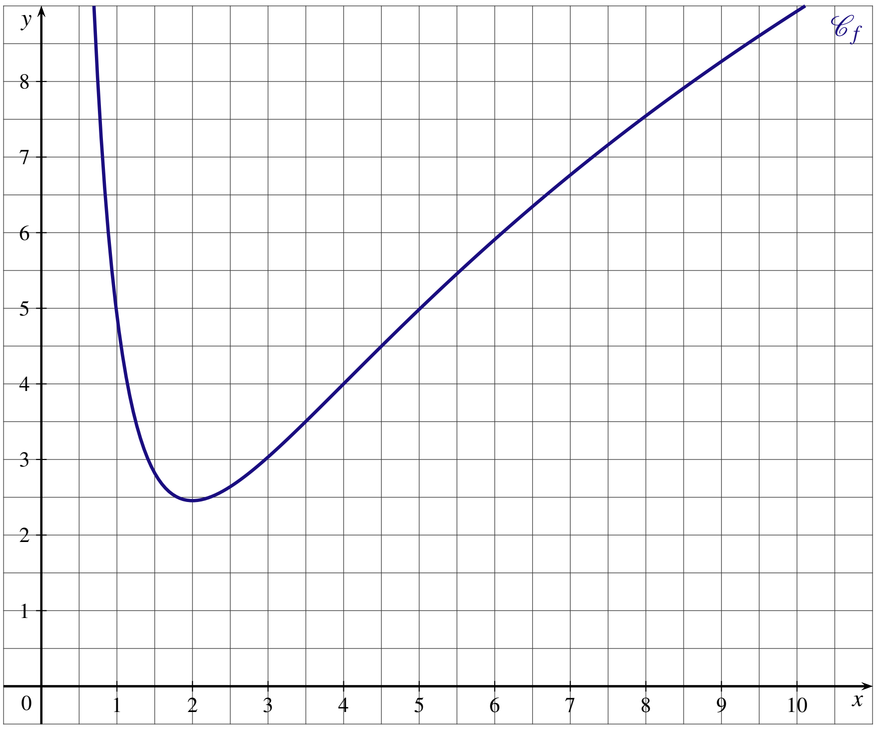
c) Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau ci-dessous.

	$m=\dfrac{a+b}{2}$	$f(m)$ à 10^{-3} près	a	b	$b-a$
Initialisation			7	7,5	0,5
1[re] boucle « Tant que »	0,725				
2[e] boucle « Tant que »					
⋮					
Sortie					

d) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x)=8\ln(x)+\dfrac{16}{x}-16\ln(2)$.
Sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}_f$, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



PARTIE A

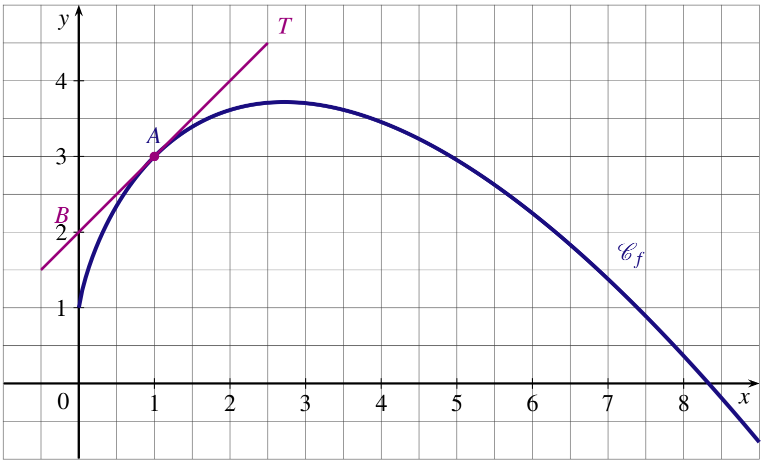
1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x)=\dfrac{8(x-2)}{x^2}$ où f' désigne la dérivée de f.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f.

PARTIE B

1. La droite d'équation $y=x$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point A d'abscisse a.
   a) Justifier que a est solution de l'équation $\dfrac{8(a-2)}{a^2}=1$.
   b) Déterminer la valeur de a.
2. Étudier la convexité de la fonction f.
3. Déduire des deux questions précédentes, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x)\leqslant x$

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x)=2x-x\ln(x)+1$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

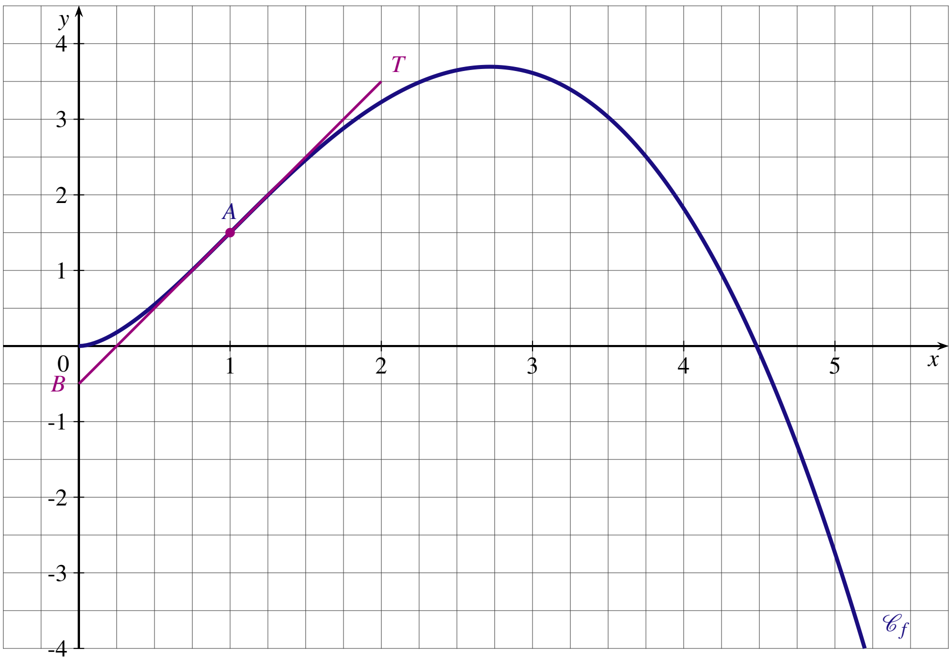


1. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(1;3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\,(0;2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x)=1-\ln(x)$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation $1-\ln(x)\leqslant 0$.
   c) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Étudier la convexité de la fonction f.

EXERCICE 17

PARTIE A

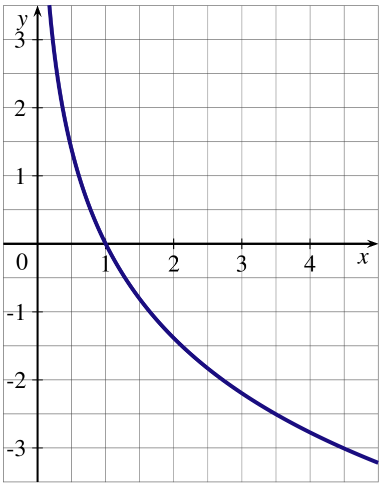
La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous dans un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$.



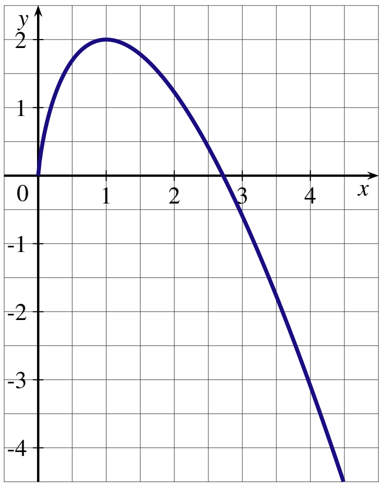
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f, déterminer $f'(1)$.
2. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
3. Une seule des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée seconde f'' : laquelle ?

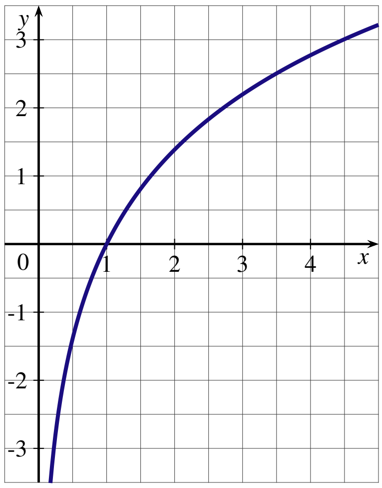
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



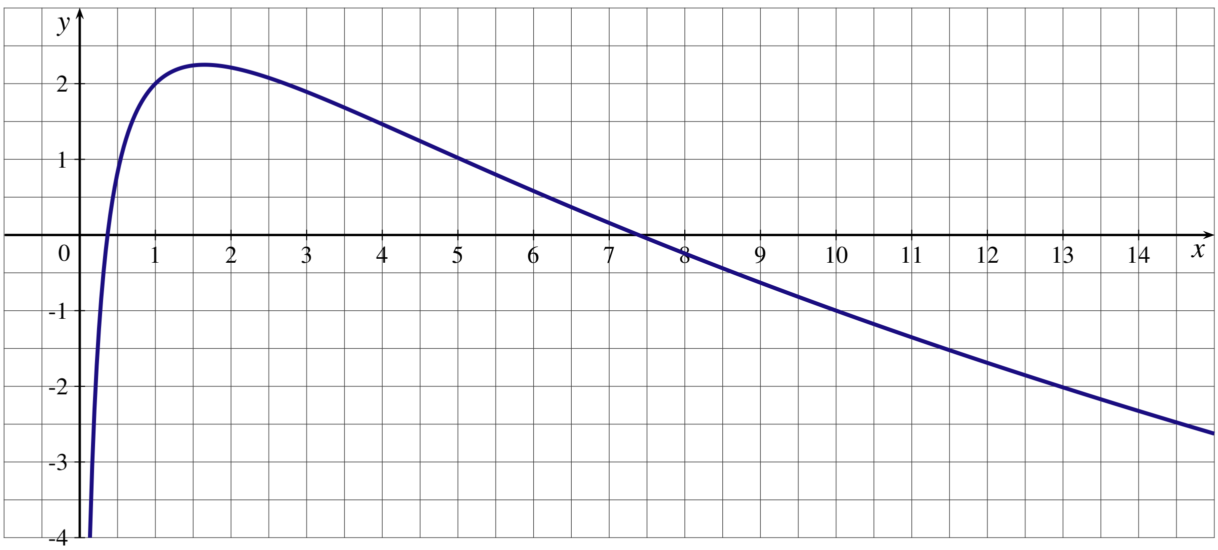
PARTIE B

La fonction f de la partie A est définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\dfrac{3}{2} - \ln(x)\right)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 2x \times (1 - \ln(x))$.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. On note f'' la dérivée seconde de f sur $]0;+\infty[$. Calculer $f''(x)$ puis, étudier la convexité de la fonction f.

EXERCICE 18

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
   b) Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

c) En déduire les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1+X)(2-X) = 2$.

c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

EXERCICE 19

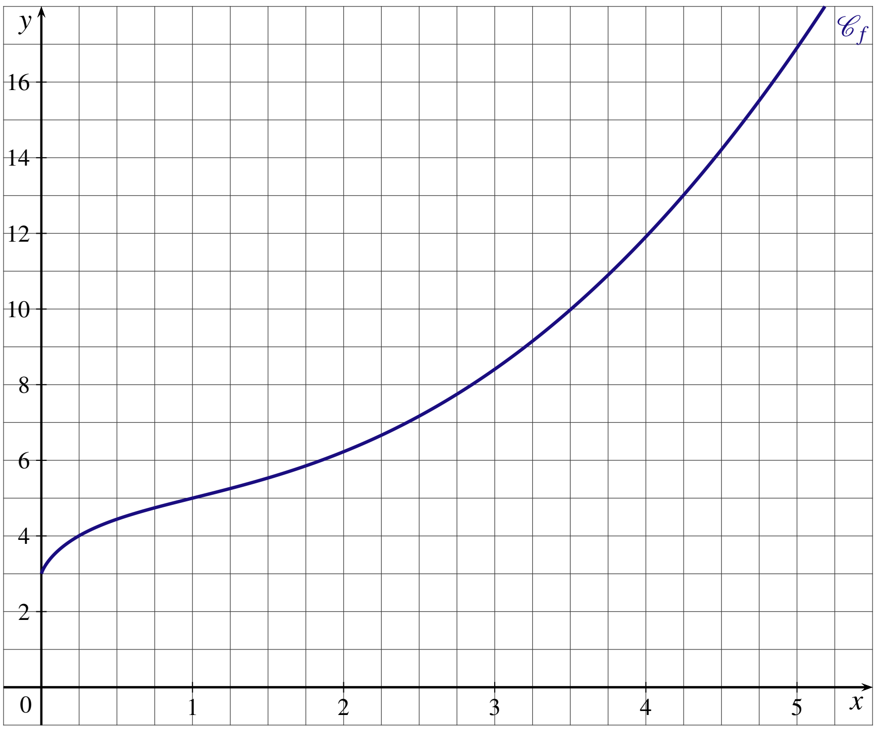
Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(x - 2\ln x + 1) + 3$

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f'.
3. En déduire que la fonction f est monotone.

PARTIE B

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet sur $]0;+\infty[$ une seule tangente passant par l'origine du repère. Tracer cette tangente dans le repère précédent.
2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite T.

PARTIE C

Sur l'intervalle $]0\,;\,5]$, le coût de production, en milliers d'euro, pour x milliers d'articles fabriqués chaque jour par une usine, est modélisé par $f(x)$.

On note $C_M(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ le coût moyen de production avec $x \in]0\,;\,5]$.

Quel doit être le prix de vente minimal d'un article pour assurer la rentabilité de cette production ?