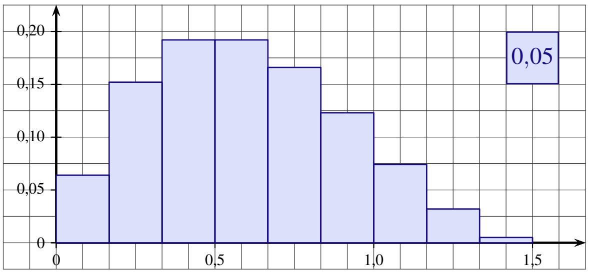
I INTRODUCTION

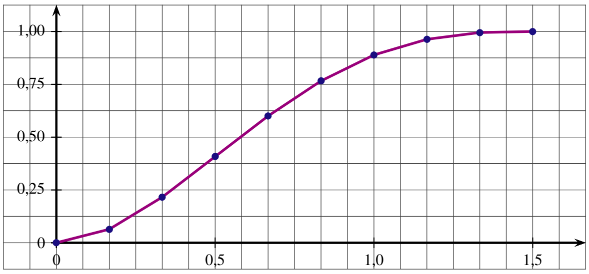
Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont dites continues.
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$	$[80;90]$
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.

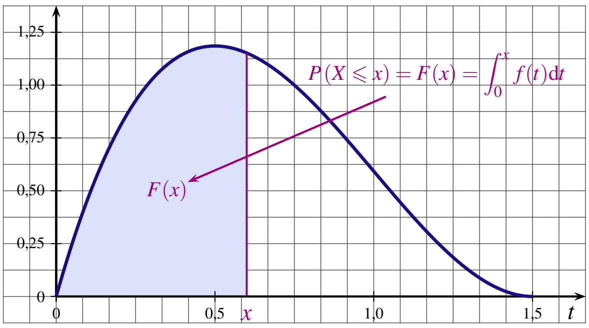


Histogramme

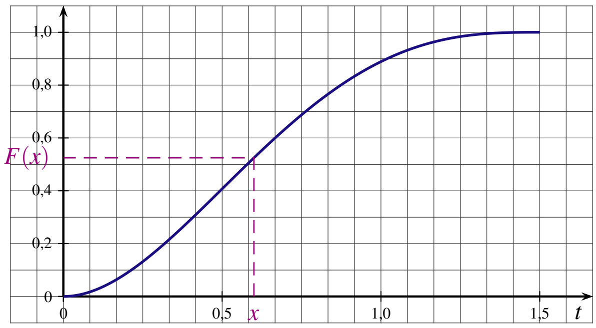


Polygone des fréquences cumulées

On modélise la situation à l'aide d'une variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations de cet hôpital avec $X \in [0;1,5]$.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements étudiés sont ceux qui correspondent à des intervalles du type $X \in [0;0,3]$, $0,5 \leqslant X \leqslant 1$ ou $X > 0,5$.
Le calcul de la probabilité $P(X = 0,345)$ que le temps d'attente soit exactement de 20 minutes et 42 secondes n'a pas de sens.
Dans le cas d'une variable aléatoire continue le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe représentative de la fonction de répartition F permettant de calculer des probabilités.
On suppose que la fonction F est définie sur l'intervalle $[0;1,5]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ où f est la fonction définie sur $[0;1,5]$ par $f(t) = \dfrac{64t^3}{27} - \dfrac{64t^2}{9} + \dfrac{16t}{3}$. On dit que f est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X.



Fonction de densité



Fonction de répartition

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1,5]$, $F(x)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction de densité f, les axes du repère et la droite d'équation $t = x$.
On en déduit que :

— $P(X \leqslant 0,3) = F(0,3) = \displaystyle\int_0^{0,3} f(t)\mathrm{d}t = 0,1808$.

— $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(0,5) = \displaystyle\int_{0,5}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{13}{27}$.

— $P(X > 0,5) = 1 - P(X \leqslant 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \displaystyle\int_0^{0,5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{16}{27}$.

II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2 FONCTION DE DENSITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$ est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$.

— La fonction f est dérivable sur $[0;1{,}5]$ donc continue.

— Pour tout réel t, $\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}=\dfrac{16t\left(4t^2-12t+9\right)}{27}=\dfrac{16t\,(2t-3)^2}{27}$.
Par conséquent, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;1{,}5]$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur sur $[0;1{,}5]$ par $F(t)=\dfrac{16t^4}{27}-\dfrac{64t^3}{27}+\dfrac{8t^2}{3}$ d'où

$$\int_0^{1,5} f(t)\mathrm{d}t = F(1{,}5)-F(0)=1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$

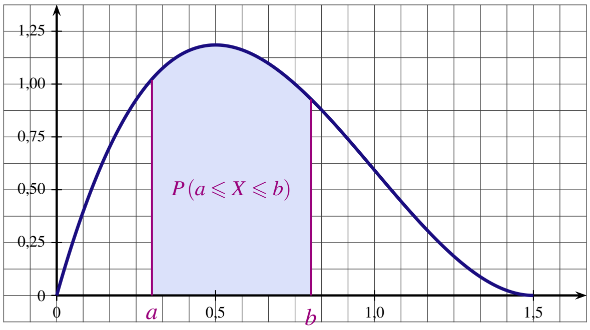
3 LOI DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X\in[a;b]$ est :

$$P(X\in[a;b])=P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

REMARQUE

$P(a\leqslant X\leqslant b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité étudiée dans l'exemple précédent.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0;1{,}5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X=a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$
2. $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$
3. $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X)=\int_a^b t\times f(t)\mathrm{d}t$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations dont la fonction de densité f est définie sur $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\frac{64t^3}{27}-\frac{64t^2}{9}+\frac{16t}{3}$.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{1,5}\frac{64t^4}{27}-\frac{64t^3}{9}+\frac{16t^2}{3}\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{64t^5}{135}-\frac{16t^4}{9}+\frac{16t^3}{9}\right]_0^{1,5}\\&=3{,}6-9+6\\&=0{,}6\end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen aux consultations est de 0,6 h soit 36 minutes.

5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I, J_1 et J_2 deux intervalles de I tel que $P(X\in J_1)\neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement $X\in J_2$ sachant que l'évènement $X\in J_1$ est réalisé est :

$$P_{X\in J_1}(X\in J_2)=\frac{P(X\in J_1\cap J_2)}{P(X\in J_1)}$$

EXEMPLE

Calculons la probabilité que le temps d'attente d'une personne soit inférieur à une heure sachant qu'elle a patienté plus d'une demi-heure.
Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_{X>0,5}(X<1)$. $J_1=]0{,}5;1{,}5]$, $J_2=[0;1[$ et $J_1\cap J_2=]0{,}5;1[$ d'où

$$P_{X>0,5}(X<1)=\frac{P(0{,}5<X<1)}{P(X>0{,}5)}=\frac{\frac{13}{27}}{\frac{16}{27}}=\frac{13}{16}=0{,}8125$$

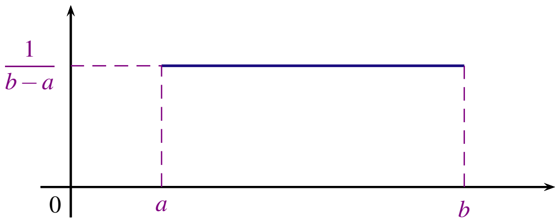
Ainsi, la probabilité que le temps d'attente d'une personne qui a patienté plus d'une demi-heure soit inférieur à une heure est égale à 0,8125.

III LOI UNIFORME

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

— f est continue et positive sur $[a;b]$.

— $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

✼ DÉMONSTRATION

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d$$
$$= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

✼ DÉMONSTRATION

Par définition :

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b$$
$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0,5;9,5]$ par $f(t)=\dfrac{1}{9,5-0,5}=\dfrac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X\leqslant 2)=\dfrac{2-0,5}{9}=\dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X\geqslant 3)=\dfrac{9,5-3}{9}=\dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T)=\dfrac{0,5+9,5}{2}=5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

IV LOI NORMALE

1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE

RAPPEL

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.
L'espérance mathématique est $E(X)=np$; l'écart-type est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

LA FONCTION DE GAUSS

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p.
On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n=\dfrac{X_n-E(X_n)}{\sigma_n}=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

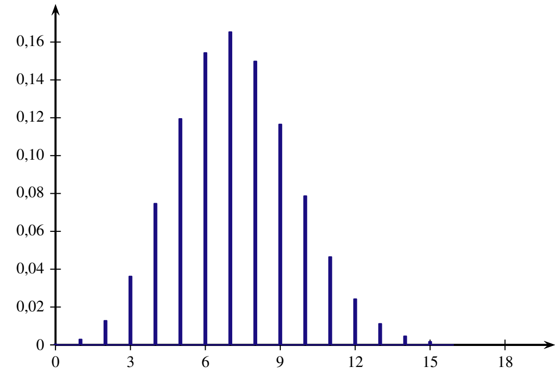
La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes :

$$z_k=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0\leqslant k\leqslant n$$

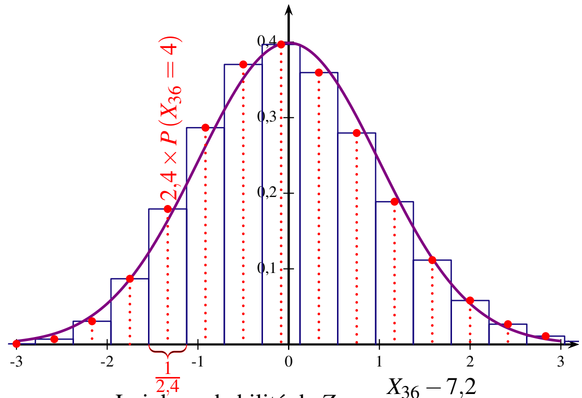
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :

$$P(Z_n=z_k)=P\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=P(X_n=k)=p_k$$

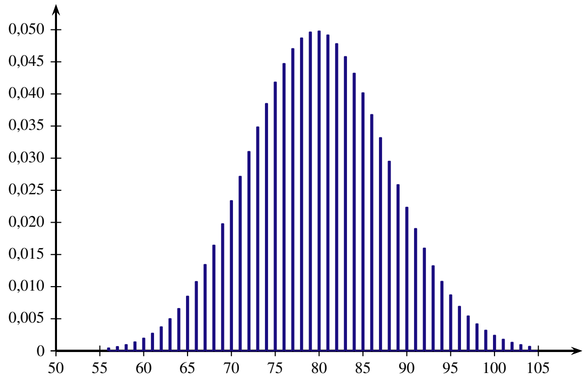
Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k, alors Z_n prend la valeur $\dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k.
On a représenté graphiquement ci-dessous, pour $X_n\in[E(X_n)-3\sigma_n;E(X_n)+3\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n=36$ et $n=400$ avec $p=0,2$.
La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n=z_k)=p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n\times P(X_n=k)$ et $\dfrac{1}{\sigma_n}$.



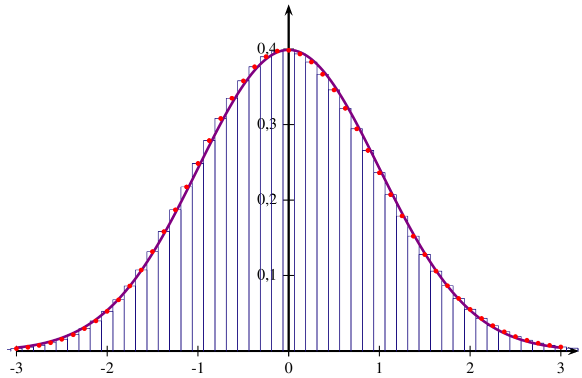
Loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0,2$



Loi de probabilité de $Z_{36} = \dfrac{X_{36} - 7,2}{2,4}$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,2$



Loi de probabilité de $Z_{400} = \dfrac{X_{400} - 80}{8}$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction la fonction de Gauss :

$$P(a \leqslant Z_n \leqslant b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

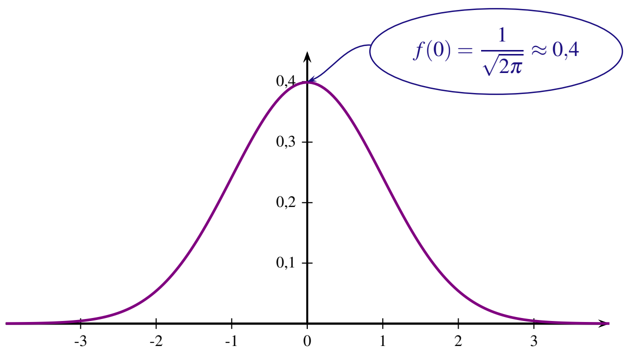
2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



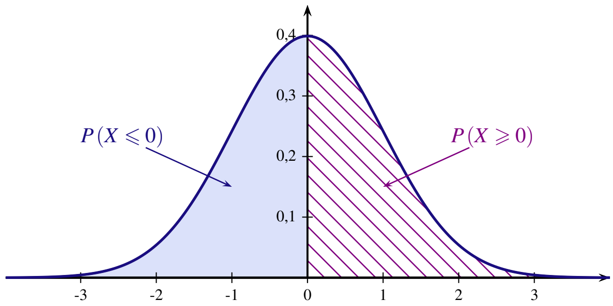
ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

PROPRIÉTÉ

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales, d'où $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0)$.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

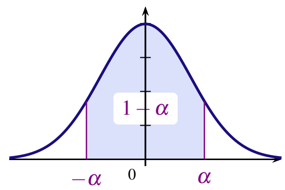
$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$



Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$.

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

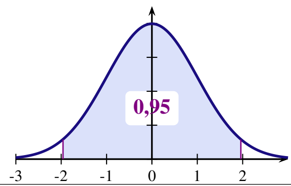
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$$

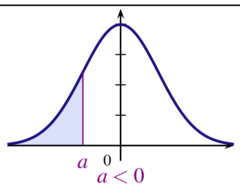
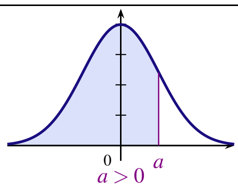
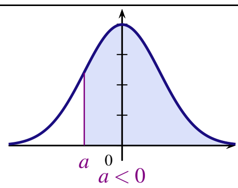
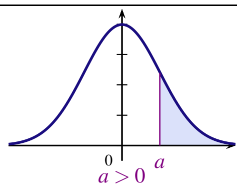


CALCULS

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(X \geqslant a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a > 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X \leqslant a)$	$0{,}5 + P(a \leqslant X < 0)$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

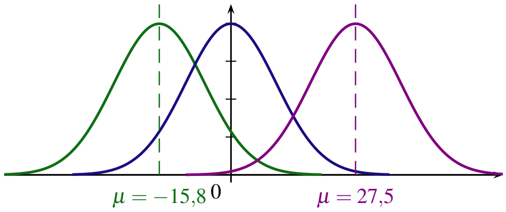
3 LOI NORMALE

DÉFINITION

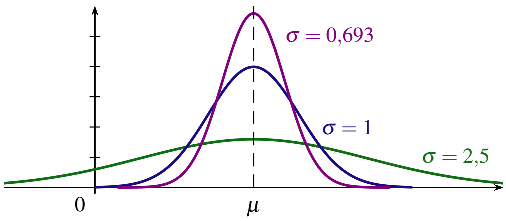
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

REMARQUES :

- Si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors sa variance $V(X)=\sigma^2$.
- La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
- L'espérance μ de la loi normale est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\mu$.



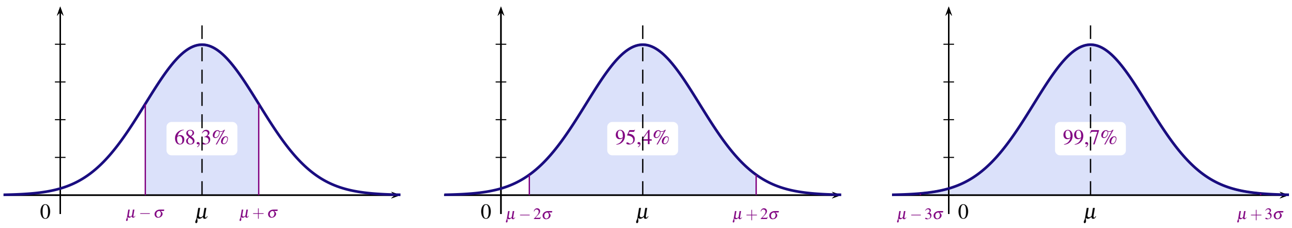
- L'écart-type $\sigma>0$ de la loi normale est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.



INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE

Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

- $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0{,}683$.
- $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0{,}954$.
- $P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$.



$X\in[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ $X\in[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$ $X\in[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$

LOI NORMALE ET CALCULATRICES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a\leqslant X\leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X\leqslant k)=\alpha$ avec $\alpha\in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche $\overset{\text{distrib}}{\text{var}}$	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	`normalFrep`(a,b,μ,σ) ou `normalCdf`(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd `normCD` (a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leqslant k) = \alpha$	`FracNormale`(α,μ,σ) ou `invNorm`(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN `InvNormCD`(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

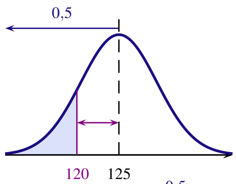
EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;20{,}25)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

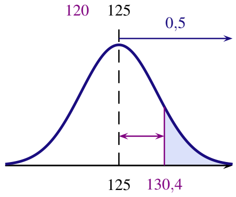
1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \geqslant 130{,}4)$; $P(X \geqslant 118{,}7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0{,}02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0{,}81$.

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0{,}495$.

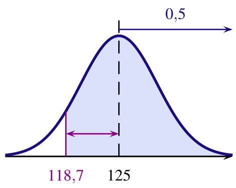
   b)
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0{,}5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}133 \end{aligned}$$



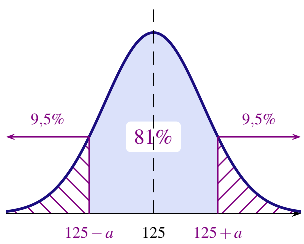
   c)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130{,}4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &= 0{,}5 - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &\approx 0{,}115 \end{aligned}$$



   d)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118{,}7) &= P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0{,}5 + P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}919 \end{aligned}$$



2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0{,}871$ pour $a \approx 130{,}09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or
$$P(X \geqslant b) = 0{,}02 \iff 1 - P(X < b) = 0{,}02 \iff P(X < b) = 0{,}98$$
   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134{,}242$.
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81$.
   La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(125;4{,}5^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
   On en déduit que :



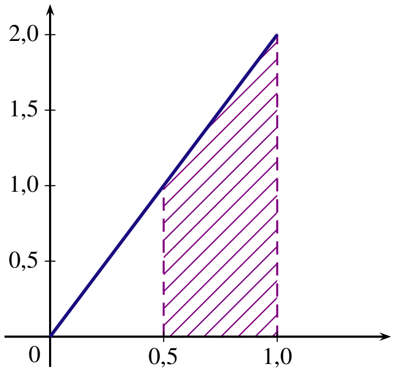
$$\begin{aligned} P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81 &\iff 1 - 2 \times P(X < 125 - a) = 0{,}81 \\ &\iff P(X < 125 - a) = \frac{1 - 0{,}81}{2} = 0{,}095 \end{aligned}$$

   Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119{,}102$ d'où $a \approx 8{,}898$ et $125 + a \approx 130{,}898$.
   Donc $I = [119{,}102; 130{,}898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119{,}1; 130{,}9]$)

EXERCICE 1

(*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2016*)

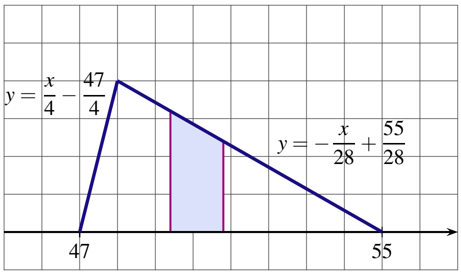
La fonction f est définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2x$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f.
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1. a) Quelle est la valeur, en unité d'aire, de la surface hachurée ? Préciser la démarche utilisée.
   b) Interpréter ce résultat en terme de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47;55]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{47}{4} & \text{si } 47 \leqslant x < 48 \\ -\dfrac{x}{28} + \dfrac{55}{28} & \text{si } 48 \leqslant x \leqslant 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47;55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
   On a $C \in [47;55]$.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49{,}4;50{,}8]$.
   b) Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum ?
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable C. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2\mathrm{e}-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1{,}2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

EXERCICE 4

On s'intéresse à la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

1. a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction ln.

   b) Trouver un nombre réel $a>1$ tel que $\displaystyle\int_1^a \ln x\,\mathrm{d}x=1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;a]$.

2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1;a]$.

   a) Calculer $p(X\leqslant 2)$.

   b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

EXERCICE 5

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

EXERCICE 6

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?
2. Calculer la probabilité que le point M :

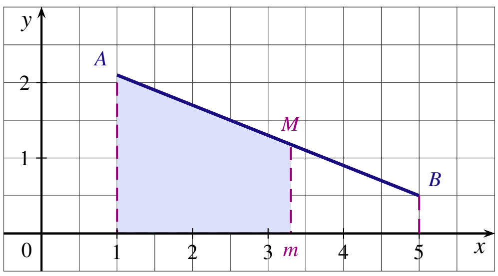
   a) soit le milieu I du segment $[AB]$;

   b) soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;

   c) soit plus près du point B que du milieu I.

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le segment $[AB]$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1;5]$ par $f(x)=-0{,}4x+2{,}5$. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note m son abscisse.



1. Soit E l'évènement « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$ est inférieure à 4 ».

   a) Justifier que la situation relève d'une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ que l'on précisera.

   b) Calculer la probabilité de l'évènement E.

2. Calculer la probabilité de l'évènement F « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$ est supérieure à 1 ».

EXERCICE 8

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X. Quelle est son espérance mathématique ?
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-240}{12}$ par la loi normale centrée réduite. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $P(225 \leqslant X \leqslant 270) = P(-1{,}25 \leqslant Z \leqslant 2{,}5)$.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270 ?
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

EXERCICE 9

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(180;10{,}5^2\right)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(170 \leqslant X \leqslant 200)$; $P(X \leqslant 150)$; $P(X \geqslant 160)$; $P(X \geqslant 190)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X < a) = 0{,}875$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 10

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

La compagnie aérienne Truc-Air utilise pour ses vols moyen-courriers des avions pouvant transporter 200 passagers.
Suite à une étude qui a permis d'établir que 10% des clients qui ont réservé un vol ne se présentent pas à l'embarquement, la direction commerciale a décidé de pratiquer le « surbooking ».

PARTIE A

La compagnie accepte pour un vol donné, 210 réservations.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$.
2. On choisit d'approcher la loi binomiale de X par une loi normale d'espérance $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X)$. Soit Y l'approximation normale de X.
   a) Déterminer $P(Y \leqslant 200)$.
   b) Déterminer un intervalle I de centre 189 tel que $P(Y \in I) \approx 0{,}95$.
3. La compagnie prend-elle un risque important en acceptant 210 réservations pour ce vol ?

PARTIE B

La compagnie accepte pour un vol donné n réservations.
On note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;0{,}9)$.
On cherche à déterminer le nombre maximal de réservations pour que la probabilité de l'évènement « $X_n \leqslant 200$ » soit supérieure à 0,95.
On admet que la loi de probabilité de X_n peut être approchée par une loi normale d'espérance $\mu = E(X_n) = 0{,}9n$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X_n) = 0{,}3\sqrt{n}$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$ qui suit la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $X_n \leqslant 200$ équivaut à $Z_n \leqslant \dfrac{200 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$.
   b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-3} près, du réel k tel que $P(Z_n \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.
   c) En déduire que n est solution de l'inéquation $0{,}9n + 0{,}4935\sqrt{n} - 200 \leqslant 0$.
2. a) On pose $x = \sqrt{n}$ avec $x \geqslant 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $0{,}9x^2 + 0{,}4935x - 200 \leqslant 0$.
   b) En acceptant le risque maximum de 5% de voir plus de 200 passagers se présenter à l'embarquement, quel est le nombre maximal de réservations que cette compagnie peut prendre pour ce vol ?

EXERCICE 11

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245 ; 255]$.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité $P(X = 3)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres.
   Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité ?

EXERCICE 12

L'admission en première année d'un groupe d'écoles a lieu après une épreuve écrite et une épreuve orale selon les modalités suivantes :

— À l'issue de l'épreuve écrite, 60% des candidats sont déclarés admissibles à l'oral.

— $\dfrac{1}{3}$ des candidats admissibles sont admis à la fin de l'épreuve orale.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat soit admis.
2. On suppose que n candidats se sont inscrits.

a) Déterminer en fonction de n, la probabilité p_n qu'au moins un candidat soit admis.

b) Quel est le plus petit nombre n de candidats inscrits pour que $p_n > 0{,}999$?

3. Les épreuves d'admission ont lieu dans plusieurs centres, chaque centre gérant l'admission d'un groupe de 225 candidats.

   On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 225 candidats associe le nombre de candidats admis.

   On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 6$.

   a) Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit compris entre 35 et 60.

   b) Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit inférieur à 30.

EXERCICE 13 *(D'après sujet bac Liban 2014)*

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.
Il note aussi que :

— 70 % des familles laissent un pourboire ;

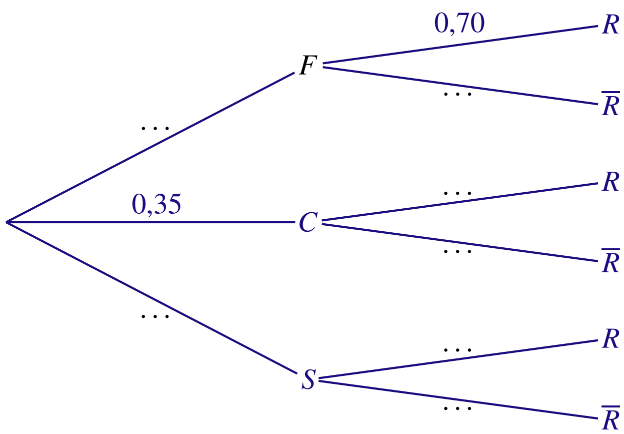
— 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;

— 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.
On s'intéresse aux évènements suivants :
F : « la table est occupée par une famille »
S : « la table est occupée par une personne seule »
C : « la table est occupée par un couple »
R : « le serveur reçoit un pourboire »
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A, sachant B.

PARTIE A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. a) Calculer $P(F \cap R)$.

   b) Déterminer $P(R)$.

4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}5$.
Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2}.

1. Calculer :
   a) la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
   b) $P(X \geqslant 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.

EXERCICE 14 (*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2015*)

Pierre a des pommiers dans son verger. Il décide de faire du jus de pomme avec ses fruits.
Dans sa récolte :

— il dispose de 80 % de pommes de variété A et de 20 % de pommes de variété B.

— 15 % des pommes de variété A et 8 % des pommes de variété B sont avariées et devront être jetées.

On prend une pomme au hasard dans la récolte et on note :

— A l'évènement « la pomme est de variété A » ;

— B l'évènement « la pomme est de variété B » ;

— J l'évènement « la pomme est jetée » ;

— $\overline{J}$ l'évènement contraire de l'évènement J.

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.

PARTIE A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la pomme soit de variété A et soit jetée.
3. Montrer que la probabilité qu'une pomme soit jetée est égale à 0,136.
4. Calculer la probabilité qu'une pomme soit de variété A sachant qu'elle a été jetée.

PARTIE B

Une pomme pèse en moyenne 150 g.
On modélise le poids d'une pomme en grammes par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. Déterminer la probabilité que la pomme ait un poids inférieur à 150 g.
2. Déterminer $p(120 \leqslant X \leqslant 170)$. Interpréter ce résultat.

PARTIE C

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes.
Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[8;9{,}5]$.
Déterminer la probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

EXERCICE 15 (*D'après sujet bac Amérique du Sud 2016*)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

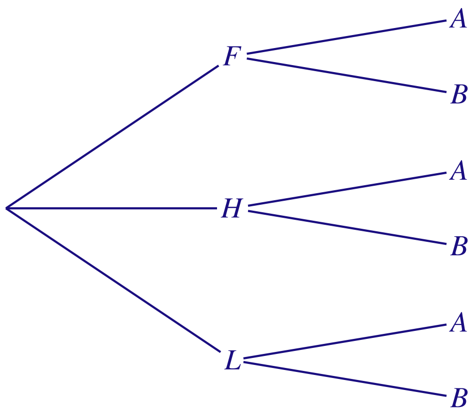
L'entreprise Éclairage vend des ampoules à deux magasins de bricolage : Atelier et Bricolo.
Cette entreprise propose trois types d'ampoules : les ampoules fluocompactes qui représentent 30 % du stock, les ampoules halogènes qui représentent 25 % du stock et les ampoules à LED qui représentent 45 % du stock.
On sait que :

— 65 % des ampoules fluocompactes sont achetées par le magasin Atelier ;
— 70 % des ampoules halogènes sont achetées par le magasin Bricolo ;
— 50 % des ampoules à LED sont achetées par le magasin Atelier.

On prélève au hasard une ampoule provenant du stock de l'entreprise Éclairage.
On considère les évènements suivants :

F : « l'ampoule est une ampoule fluocompacte » ;
H : « l'ampoule est une ampoule halogène » ;
L : « l'ampoule est une ampoule à LED » ;
A : « l'ampoule est achetée par le magasin Atelier » ;
B : « l'ampoule est achetée par le magasin Bricolo ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :

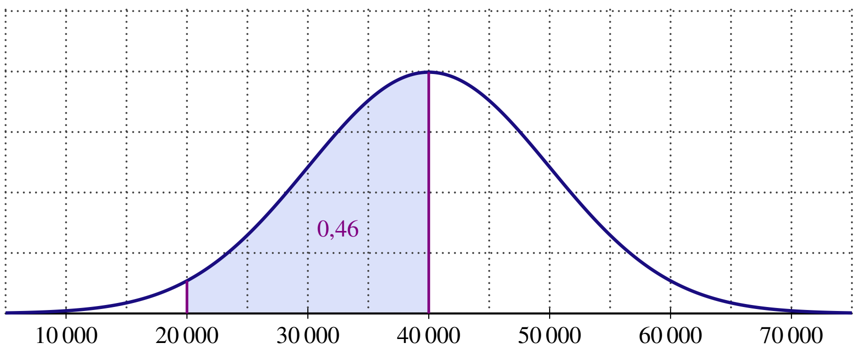


2. Calculer $p(F \cap A)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer la probabilité qu'une ampoule soit achetée par le magasin Bricolo.

PARTIE B

Une norme de qualité stipule qu'une marque peut commercialiser ses ampoules si leur durée de vie est supérieure à 20 000 heures avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque ÉclaireBien. On admet que X suit la loi normale dont la fonction de densité est tracée ci-après.
   L'aire grisée comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 0,46.



À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

a) Donner l'espérance mathématique de X.

b) Déterminer $p(20000 < X < 60000)$.

c) Déterminer si la marque ÉclaireBien pourra commercialiser ses ampoules. Justifier la réponse.

2. On note Y la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque BelleLampe.
On admet que Y suit la loi normale d'espérance 42 000 et d'écart-type 15 000.

a) Justifier que la marque BelleLampe ne pourra pas commercialiser ses ampoules.

b) Déterminer le nombre a, arrondi à l'unité, tel que $p(Y < a) = 0{,}05$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 16

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2016*)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.
Une étude statistique a permis d'établir que :

— 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.

— 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

— 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

— 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

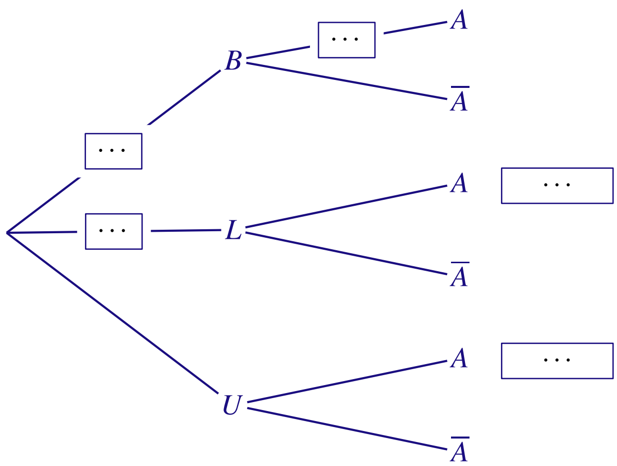
— B : le client a loué une berline.

— L : le client a loué un véhicule de luxe.

— U : le client a loué un véhicule utilitaire.

— A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé.



2. Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise ?

3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.

4. Calculer $P_L(A)$, la probabilité que le client ait souscrit une assurance sans franchise sachant qu'il a loué une voiture de luxe.

PARTIE B

Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;20]$.

1. Quelle est la probabilité d'attendre plus de douze minutes ?
2. Préciser le temps d'attente moyen.

PARTIE C

Cette agence de location propose l'option retour du véhicule dans une autre agence.
Une étude statistique a établi que le nombre mensuel de véhicules rendus dans une autre agence peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 220$ et d'écart-type $\sigma = 30$.
Si pour un mois donné, le nombre de véhicules rendus dans une autre agence dépasse 250 véhicules, l'agence doit prévoir un rapatriement des véhicules.
À l'aide de la calculatrice, déterminer, à 0,01 près, la probabilité que l'agence doive prévoir un rapatriement de véhicules.

EXERCICE 17

(*D'après sujet bac Liban 2016*)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.
Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.
On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux évènements suivants :

— C : « le jeune choisi est un collégien » ;

— L : « le jeune choisi est un lycéen » ;

— T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

Rappel des notations

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé. On note aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
5. a) Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
   b) Compléter l'arbre construit dans la question 2.

PARTIE B

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS (messages textes) par jour, soit environ 2 500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$.
Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les probabilités arrondies au millième.

1. Calculer la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3 000 SMS par mois.
2. Calculer $p(X \geqslant 4000)$.

3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}8$, déterminer la valeur de a. On arrondira le résultat à l'unité.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 18 (*D'après sujet bac Polynésie 2016*)

Les parties A et B sont indépendantes

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.
Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.
Par ailleurs :

— 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;

— 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;

— 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.
On considère les évènements suivants :

— K : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl » ;

— L : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa » ;

— M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ;

— A : « la demande de prêt est acceptée ».

On rappelle que pour tout évènement E, on note $P(E)$ sa probabilité et on désigne par $\overline{E}$ son événement contraire.
Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
3. Montrer que $P(A) \approx 0{,}735$.
4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

PARTIE B

Dans cette partie, on s'intéresse à la durée moyenne d'un prêt immobilier.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque prêt immobilier, associe sa durée, en années.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

1. Calculer la probabilité que la durée d'un prêt soit comprise entre 13 et 27 ans.
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près du nombre réel a tel que $P(X > a) = 0{,}1$.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 19 (*D'après sujet bac Pondichéry 2016*)

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

PARTIE A

On dispose des renseignements suivants à propos du baccalauréat session 2015 :

— 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel ;

— 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.

Source : DEPP (juillet 2015)

On choisit au hasard un candidat au baccalauréat de la session 2015 et on considère les évènements suivants :

— G : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ;

— T : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ;

— S : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ;

— R : « Le candidat a été reçu ».

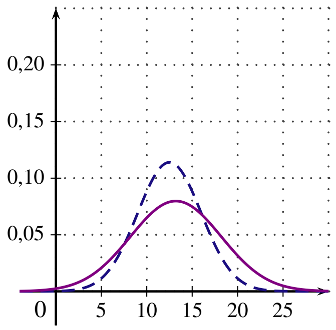
Pour tout évènement A, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.
De plus, si B est un autre évènement, on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. Préciser les probabilités $P(G)$, $P(T)$, $P_T(R)$ et $P_G(R)$.
2. Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente. Cet arbre pourra être complété par la suite.
3. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est égale à 0,181 2.
4. Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.
   a) Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est égale à 0,248 45.
   b) Sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

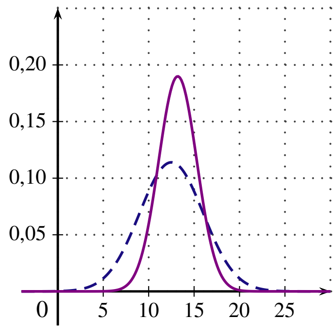
PARTIE B

À l'issue des épreuves du baccalauréat, une étude est faite sur les notes obtenues par les candidats en mathématiques et en français.
On admet que la note de mathématiques peut être modélisée par une variable aléatoire X_M qui suit la loi normale de moyenne 12,5 et d'écart-type 3,5.
De même la note de français peut être modélisée par une variable aléatoire X_F qui suit la loi normale de moyenne 13,2 et d'écart-type 2,1.

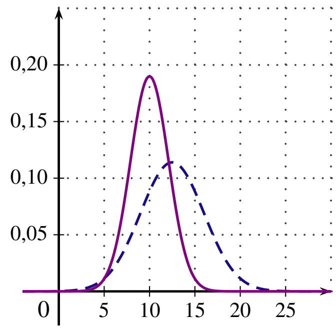
1. Déterminer $P(9 \leqslant X_M \leqslant 16)$ en donnant le résultat arrondi au centième.
2. Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté en pointillé la fonction densité associée à la variable aléatoire X_M.
   La fonction densité associée à X_F est représentée sur un seul de ces graphiques.
   Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3