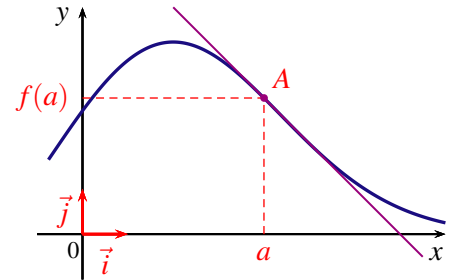


## I DÉRIVÉES

### 1 TANGENTE À UNE COURBE

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , dérivable en  $a$  où  $a$  est un réel de  $I$ , et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite passant par le point  $A(a; f(a))$  de la courbe  $C_f$  et de coefficient directeur  $f'(a)$  est appelée la tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $a$ .



Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , dérivable en  $a$  où  $a$  est un réel de  $I$ , et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan. L'équation réduite de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

### 2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

$f$ définie sur ...	$f(x)$	$f'(x)$	$f$ dérivable sur ...
$\mathbb{R}$	$k$	$0$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax + b$	$a$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x^n$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ pour $n$ entier $n \geq 2$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ pour $n$ entier $n \geq 1$
$]0; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

### 3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  :

$$\bullet (u + v)' = u' + v' \qquad \bullet (ku)' = k \times u' \qquad \bullet (uv)' = u'v + uv'$$

$$\bullet (u^2)' = 2uu' \qquad \bullet \text{Si } n \text{ est un entier non nul, } (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Si la fonction  $v$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$  (si  $v(x) \neq 0$  sur  $I$ )

$$\bullet \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad \bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

#### 4 DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

##### THÉORÈME 1

Soit  $f$  une fonction dérivable et monotone sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est constante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .
- Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

##### THÉORÈME 2

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $f'$  la dérivée de  $f$  sur  $I$ .

- Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

##### THÉORÈME 3

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un réel appartenant à  $I$ .

1. Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .
2. Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $x_0$  **en changeant de signe**, alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

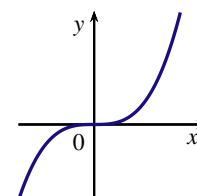
##### REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction cube définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  qui a pour dérivée la fonction  $f'$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f'(x) = 3x^2$ .

$f'(0) = 0$  et pour tout réel  $x$  non nul,  $f'(x) > 0$ .

La fonction cube est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et n'admet pas d'extremum en 0.

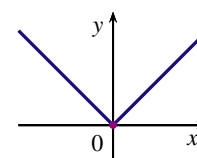


2. Une fonction peut admettre un extremum local en  $x_0$  sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction valeur absolue  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$ .

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

$f$  admet un minimum  $f(0) = 0$  or  $f$  n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - \frac{4x-3}{x^2+1}$ .

1. Calculer  $f'(x)$ .

Sur  $\mathbb{R}$   $f$  est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f = 1 - \frac{u}{v}$  d'où  $f' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}$ . Avec pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x - 3 & \text{d'où} & \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2 + 1 & \text{d'où} & \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,  $f'$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction  $f$

Les variations de la fonction  $f$  se déduisent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de  $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$  :

Pour tout réel  $x$ ,  $(x^2+1)^2 > 0$ . Par conséquent,  $f'(x)$  est du même signe que le polynôme du second degré  $4x^2-6x-4$  avec  $a=4$ ,  $b=-6$  et  $c=-4$ .

Le discriminant du trinôme est  $\Delta = b^2 - 4ac$  Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

Comme  $\Delta > 0$ , le trinôme admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \\ \text{et } x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2 \end{aligned}$$

Un polynôme du second degré est du signe de  $a$  sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$  ainsi que les variations de la fonction  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$2$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$		
$f(x)$	↗		5	↘		0	↗	

## II CONTINUITÉ

### 1 NOTION DE CONTINUITÉ

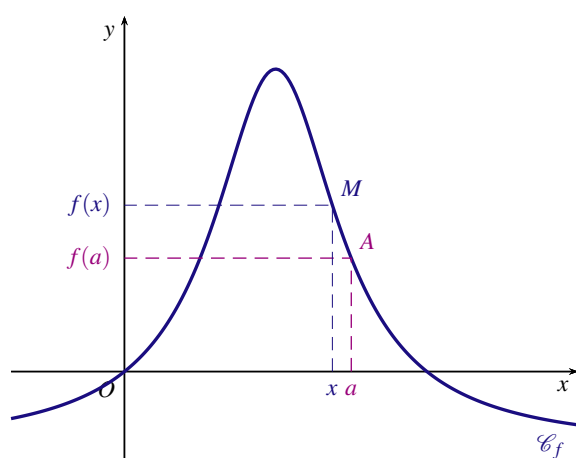
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .  
Intuitivement, dire que  $f$  est continue sur  $I$  signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

#### EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

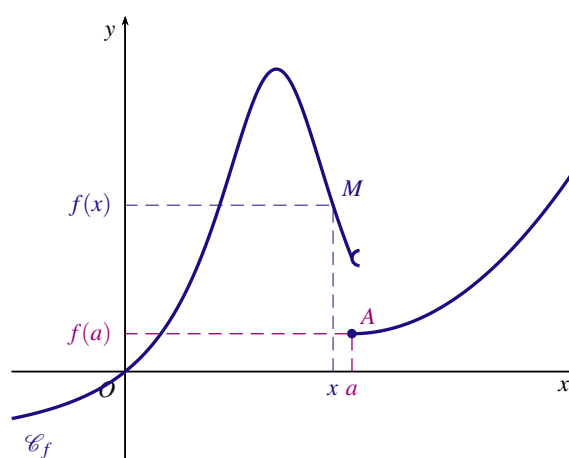
On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $A$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $a$ .

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , on considère le point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x$



La fonction  $f$  est continue.

Pour tout réel  $a$  de  $I$ , on peut rendre  $f(x)$  aussi proche que l'on veut de  $f(a)$  pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .



La fonction  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  présente un saut au point d'abscisse  $a$ .  
Le point  $M$  n'est pas proche du point  $A$  quand  $x$  est proche de  $a$ .

### 2 PROPRIÉTÉS

#### THÉORÈME (admis)

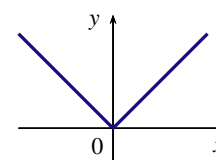
Toute fonction dérivable sur un intervalle  $I$  est continue sur cet intervalle.

#### REMARQUE

La réciproque du théorème est fautive :

Une fonction peut être continue en un réel  $a$  sans être dérivable en ce réel.

Par exemple la fonction valeur absolue  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$  est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



#### CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

### III CONTINUITÉ ET ÉQUATION

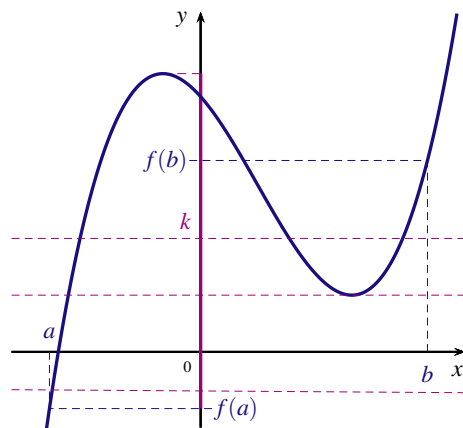
#### 1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME (admis)

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  et continue sur  $I$  alors elle vérifie la propriété suivante : quels que soient les réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I$ , pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution  $c$  appartenant à  $[a; b]$ .

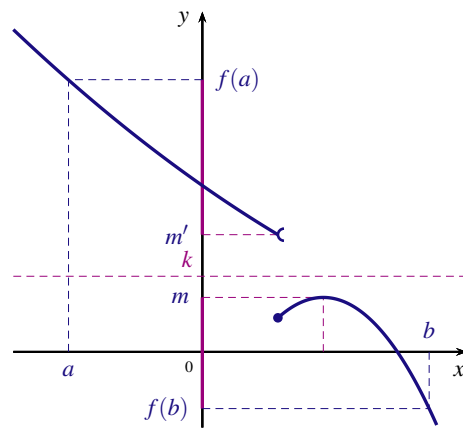
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  par une fonction continue est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue sur  $I$



L'image de l'intervalle  $[a; b]$  est un intervalle.  
Tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  est l'image d'au moins un élément de  $[a; b]$ .

$f$  n'est pas continue sur  $I$



L'image de l'intervalle  $[a; b]$  n'est pas un intervalle.  
Il existe des réels  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  pour lesquels l'équation  $f(x) = k$  n'a pas de solution.

#### 2 THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

COROLLAIRE

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a, b$  deux réels appartenant à  $I$ ,  $a < b$ .  
Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a; b]$ , alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une solution **unique**  $c$  appartenant à  $[a; b]$ .

\* DÉMONSTRATION

Soit  $k$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$

##### 1. Existence

Par hypothèse,  $f$  est continue sur  $[a; b]$  alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution  $c$  appartenant à  $[a; b]$ .

##### 2. Unicité

Supposons que l'équation  $f(x) = k$  admette deux solutions distinctes  $c_1$  et  $c_2$  appartenant à  $[a; b]$

Par hypothèse,  $f$  est strictement monotone sur  $[a; b]$  alors  $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$

Ce qui aboutit à une contradiction puisque  $f(c_1) = f(c_2) = k$

Donc  $c_1 = c_2$ , ce qui prouve que l'équation  $f(x) = k$  admet une solution unique dans  $[a; b]$

REMARQUES

- Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  et  $f(a) \times f(b) < 0$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[a; b]$

2. Le théorème s'applique aussi lorsque  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme  $[a; b[$ ,  $]a; b]$ ,  $]a; b[$ ,  $]a; +\infty[$ ,  $]a; +\infty[$ ,  $] -\infty; b]$  ou  $] -\infty; b[$ .

#### IV CONVEXITÉ

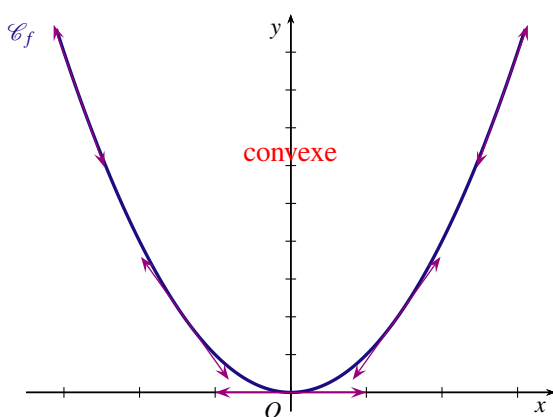
##### 1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

###### DÉFINITIONS

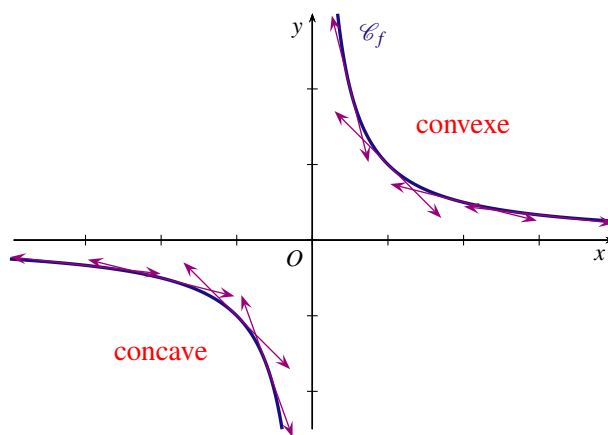
Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- Dire que la fonction  $f$  est convexe sur  $I$  signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction  $f$  est concave sur  $I$  signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

###### EXEMPLES



La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est convexe.

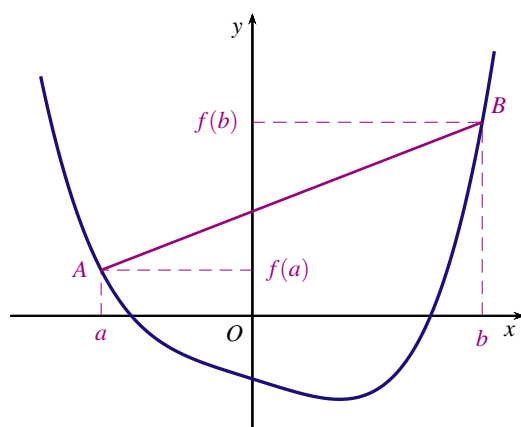


La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est concave sur  $] -\infty; 0[$  et convexe sur  $]0; +\infty[$

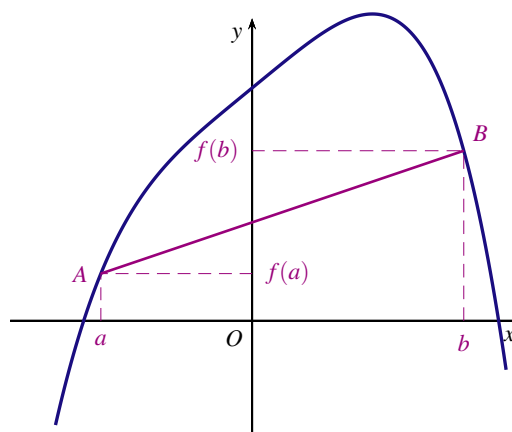
###### REMARQUE

Intuitivement, quels que soient les points  $A$  et  $B$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$

- Si le segment  $[AB]$  est au-dessus de la courbe alors  $f$  est convexe.
- Si le segment  $[AB]$  est au-dessous de la courbe alors  $f$  est concave.



$f$  est convexe.



$f$  est concave

**THÉORÈME** (admis)

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est convexe sur  $I$  si, et seulement si, sa fonction dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ .
- $f$  est concave sur  $I$  si, et seulement si, sa fonction dérivée  $f'$  est décroissante sur  $I$ .

CONSÉQUENCE

On note  $f''$  la dérivée seconde de la fonction  $f$ , c'est à dire la dérivée de la dérivée  $f'$ .

- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction  $f$  est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction  $f$  est concave.

EXEMPLE

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^5 - 5x^4$ .

Sa dérivée est la fonction  $f'$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$ .

Sa dérivée seconde est la fonction  $f''$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$ .

Les variations de  $f'$  se déduisent du signe de sa dérivée  $f''$ .

Notons que  $20x^2 \geq 0$  donc  $f''(x)$  est du même signe que  $x - 3$ . D'où le tableau :

$x$	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		-	0	+	
variations de $f'$					
convexité de $f$	<b>CONCAVE</b>			<b>CONVEXE</b>	

$f$  est concave sur  $]-\infty; 3]$  et convexe sur  $[3; +\infty[$ .

**2 POINT D'INFLEXION**

DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

S'il existe un point  $A$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que  $A$  est un point d'inflexion.

EXEMPLE

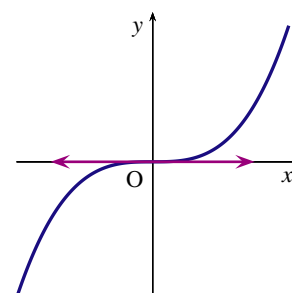
La courbe représentative de la fonction cube définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  admet comme point d'inflexion l'origine  $O(0;0)$  du repère.

Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction cube.

La tangente au point  $O$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  est l'axe des abscisses d'équation  $y = 0$ .

- Pour  $x \leq 0$ ,  $f(x) \leq 0$  donc la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessous de la tangente en  $O$  sur  $]-\infty; 0]$ .
- Pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq 0$  donc la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la tangente en  $O$  sur  $[0; +\infty[$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  traverse sa tangente en  $O$  donc  $O(0;0)$  est un point d'inflexion.



CONSÉQUENCES

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée  $f'$  change de sens de variation en  $a$  alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse  $a$ .
- Si la dérivée seconde  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $a$  alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse  $a$ .

EXEMPLE

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction  $f'$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$ .

Sa dérivée seconde est la fonction  $f''$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f''(x) = 20x^2(x - 3)$ .

L'équation  $f''(x) = 0$  admet deux solutions  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 3$ .

Notons que  $20x^2 \geq 0$  donc  $f''(x)$  est du même signe que  $x - 3$ .

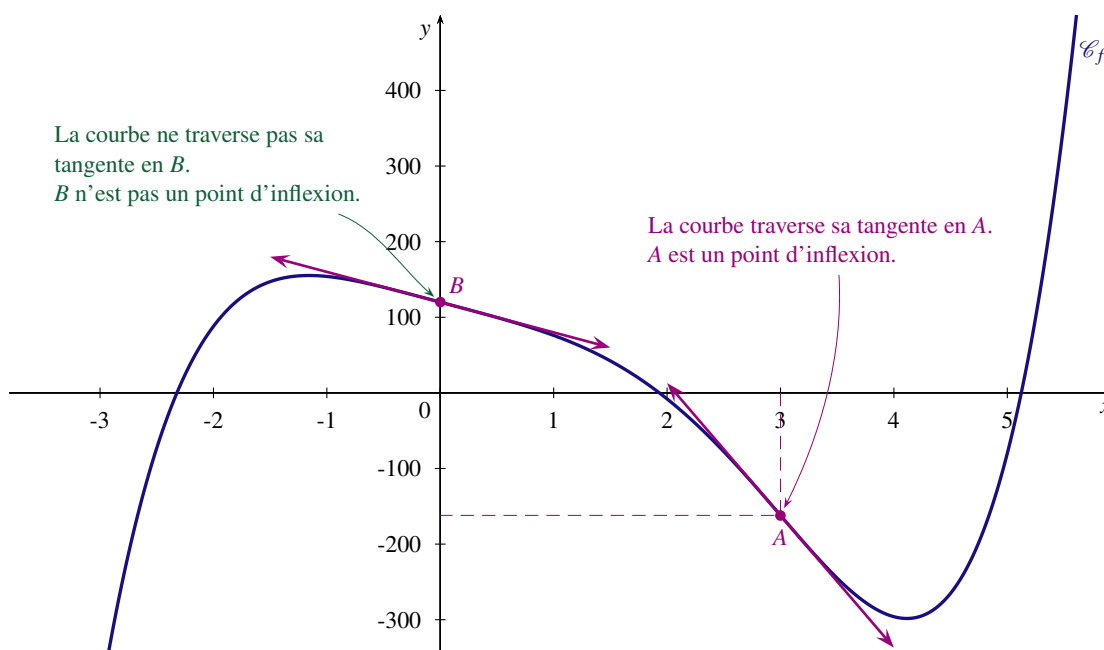
Les variations de  $f'$  se déduisent du signe de sa dérivée  $f''$ . D'où le tableau :

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
signe de $f''(x)$		-	0	+
variations de $f'$				

En tenant compte des changements de variation de la dérivée  $f'$  on en déduit que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un seul point d'inflexion, le point  $A(3; f(3))$ .

En effet :

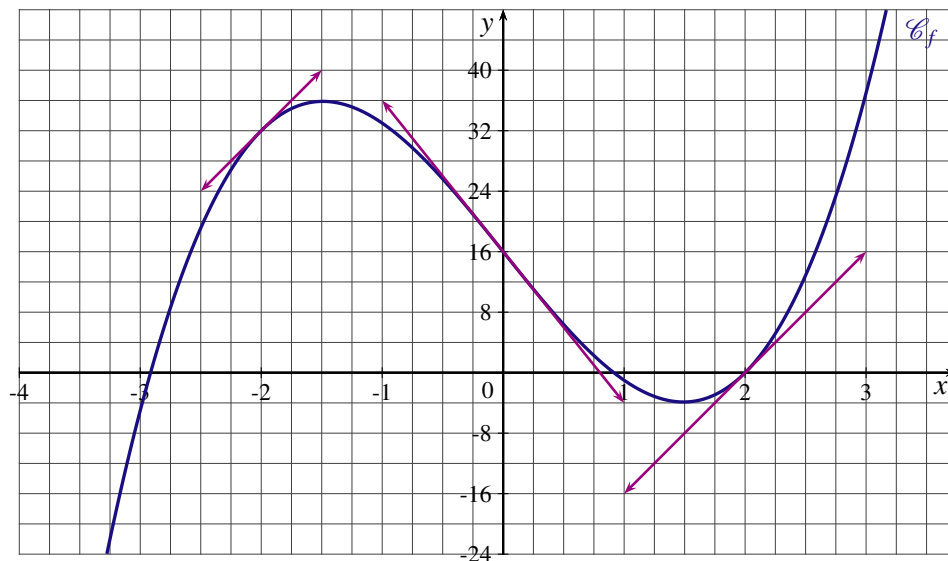
- $f''(0) = 0$  mais, sur l'intervalle  $] -\infty; 3[$   $f''(x) \leq 0$  donc le point  $B(0; 120)$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction  $f$  est concave sur  $] -\infty; 3[$ ).
- $f''$  s'annule en 3 en changeant de signe donc le point  $A(3; -162)$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ . (La fonction  $f$  est concave sur  $] -\infty; 3[$  et convexe sur  $] 3; +\infty[$ ).





### EXERCICE 1

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Certaines tangentes à la courbe ont également été représentées.



#### PARTIE A

On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . À partir du graphique :

- Déterminer  $f'(-2)$ ,  $f'(0)$  et  $f'(2)$ .
- Donner une estimation des solutions de l'équation  $f'(x) = 0$ .

#### PARTIE B

La fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$ .

- Calculer  $f'(x)$ .
- Calculer  $f'(-2)$ ,  $f'(0)$  et  $f'(1,5)$ , puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la partie A.
- Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  est parallèle à l'axe des abscisses.
- Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .

### EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{15x + 60}{x^2 + 9}$ . On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ .

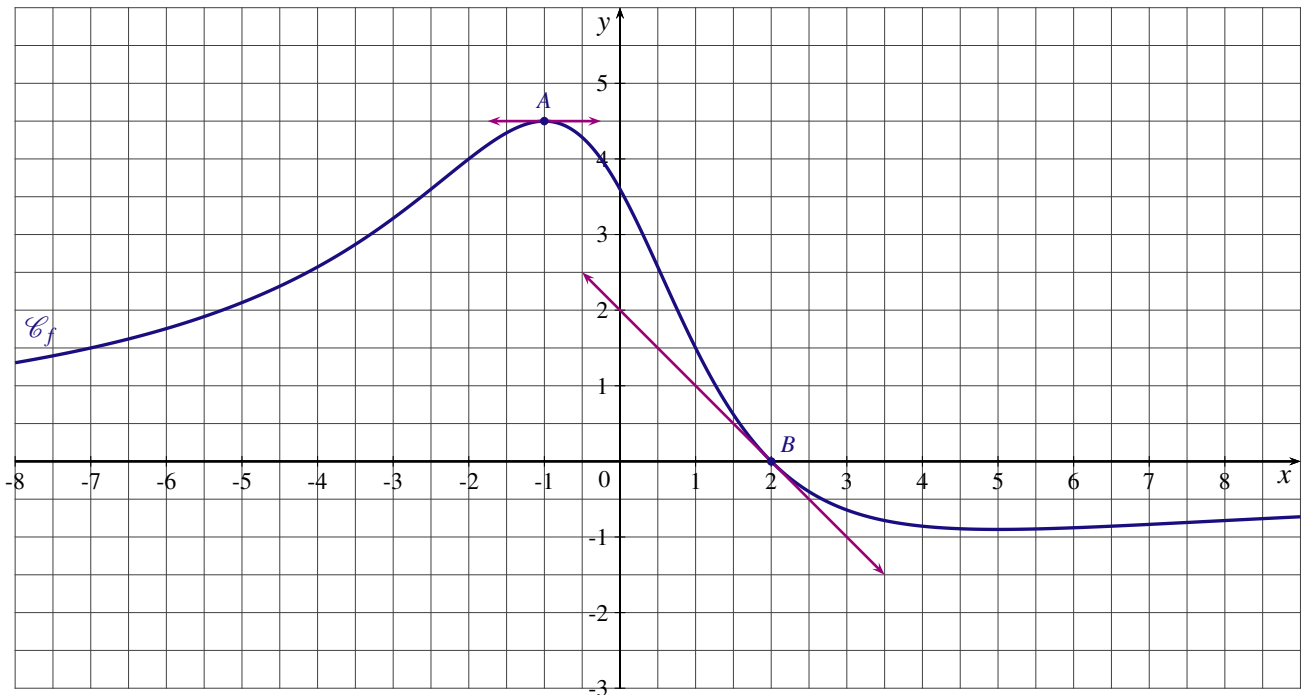
- Calculer  $f'(x)$ .
- Étudier le signe de  $f'(x)$ .
- Donner le tableau des variations de  $f$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $-4$ .

### EXERCICE 3

#### PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On sait que :

- La tangente au point  $A\left(-1; \frac{9}{2}\right)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente au point  $B(2; 0)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par le point de coordonnées  $(0; 2)$ .



On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer  $f'(-1)$  et  $f'(2)$ .
2. La tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1 a pour équation  $y = -2x + \frac{7}{2}$ .  
Déterminer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fautive en justifiant votre choix.
  - a)  $f'(0) \times f'(3) \leq 0$ .
  - b)  $f'(-3) \times f'(1) \leq 0$ .

**PARTIE B**

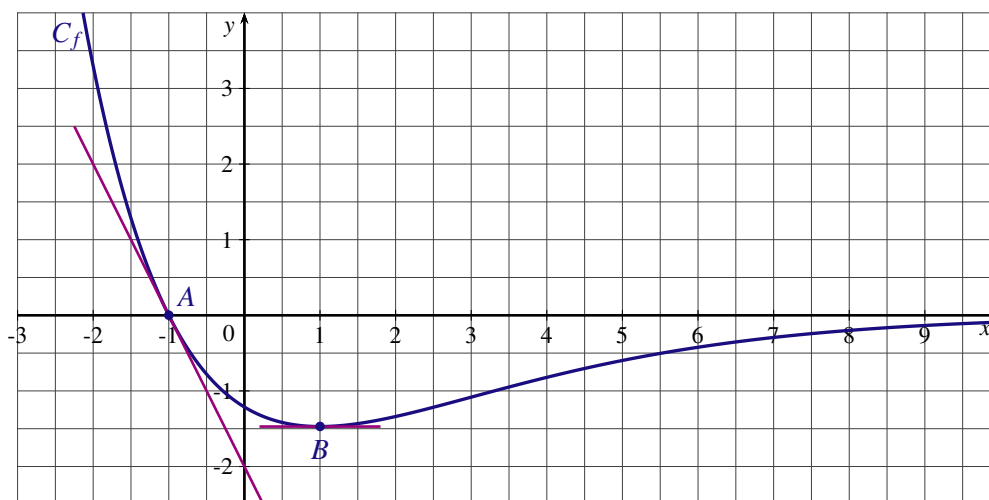
La fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{18 - 9x}{x^2 + 5}$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{9(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 + 5)^2}$ .
2. a) Étudier le signe de  $f'(x)$ .  
b) Donner le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. Déterminer une équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $(-2)$ .

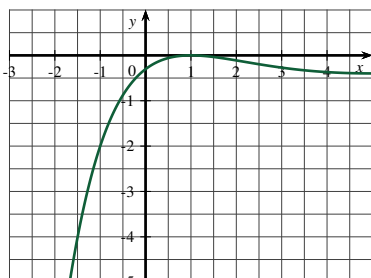
**EXERCICE 4**

La courbe  $C_f$  ci-dessous représente une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . On sait que :

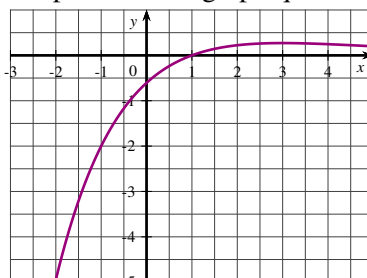
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées  $(0; -2)$ ;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;



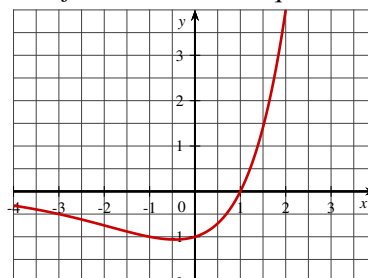
- À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer  $f'(-1)$  et  $f'(1)$ .
- Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f'$ . Déterminer laquelle.



courbe  $C_1$



courbe  $C_2$



courbe  $C_3$

### EXERCICE 5

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $\left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$  par  $f(x) = 8x^2 - 2x - \frac{9}{2x+3}$ .

- On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Montrer que  $f'(x) = \frac{8x(8x^2 + 23x + 15)}{(2x+3)^2}$ .
- Étudier les variations de la fonction  $f$ .

### EXERCICE 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$ . On note  $C_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .
- Étudier les variations de  $f$ .
- Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 1.

### EXERCICE 7

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.

Soit  $x$  le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction  $C$  définie pour tout  $x$  élément de l'intervalle  $[0; 15]$  par  $C(x) = \frac{16x^2 + 11x + 60}{x + 14}$ .

La courbe représentative de la fonction  $C$ , notée  $\mathcal{C}_T$ , est donnée en annexe ci-dessous.

- Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par  $R(x) = 8x$

- a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe  $\mathcal{D}$  représentative de la fonction  $R$ .
  - b) Par lecture graphique :
    - les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production  $x$  pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
    - la production  $x_0$  pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction  $B$  définie sur l'intervalle  $[0; 15]$  par  $B(x) = R(x) - C(x)$ .
- a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.
  - b) Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 15]$  on a  $B'(x) = \frac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x + 14)^2}$ .
  - c) Étudier les variations de la fonction  $B$ .
  - d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de  $x$  milliers d'articles est donné par  $C'(x)$  où  $C'$  est la dérivée de la fonction  $C$ .
- Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

ANNEXE



**EXERCICE 8**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction  $f$  est donné ci-dessous :

$x$	-3	1	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	$-\infty$

Diagramme de variation : Le tableau ci-dessus est complété par des flèches indiquant la direction de la fonction. Une flèche monte de  $-\infty$  à 2 entre  $x = -3$  et  $x = 1$ . Une flèche descend de 2 à 1 entre  $x = 1$  et  $x = 5$ . Une flèche descend de  $+\infty$  à  $-\infty$  entre  $x = 5$  et  $x = +\infty$ .

- La fonction  $f$  est-elle continue sur  $] -3; +\infty[$  ?
  - Donner deux intervalles où  $f$  est continue mais pas monotone.
  - Donner deux intervalles où  $f$  est continue et strictement monotone.
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
  - L'équation  $f(x) = 1$  admet-elle une solution unique ?
- On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
  - L'équation  $f'(x) = 0$  n'a pas de solution sur  $]5; +\infty[$
  - $f'(-2) \times f'(0) \leq 0$
  - $f'(-2) \times f'(3) \leq 0$

**EXERCICE 9**

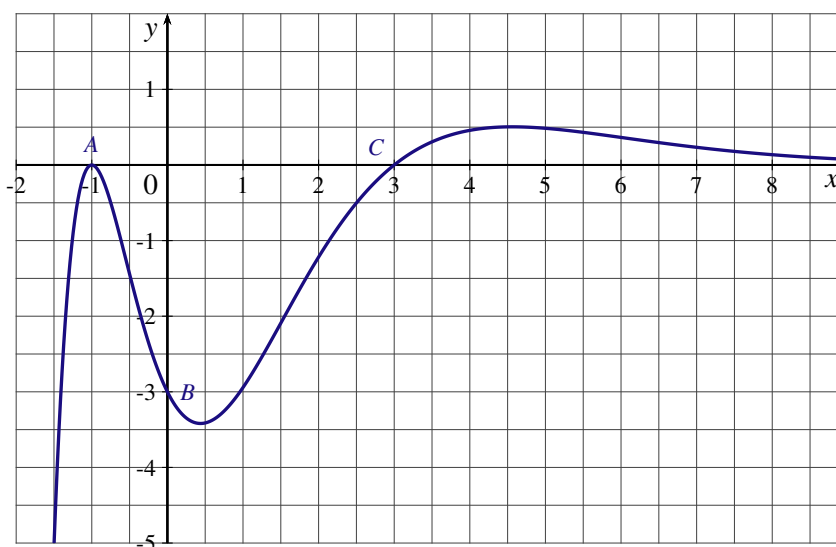
Soit  $f$  la fonction définie  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$ . On note  $f'$  sa dérivée.

- Calculer  $f'(x)$ .
- Donner le tableau des variations de la fonction  $f$ .
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .  
À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à  $10^{-3}$  près, des solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

**EXERCICE 10**

On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$ , dans un repère orthonormé.

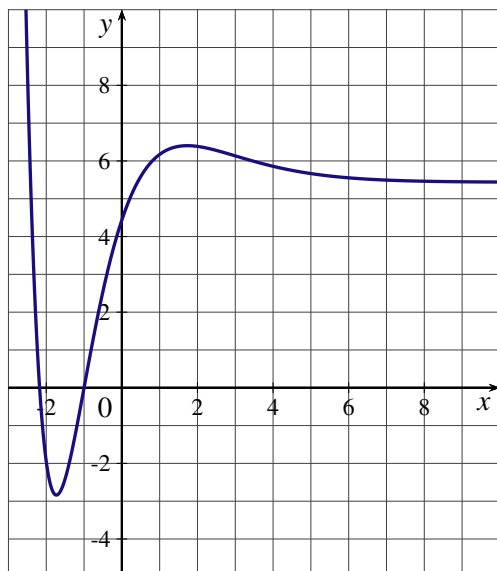
Les points  $A(-1;0)$ ,  $B(0;-3)$  et  $C(3;0)$  appartiennent à la courbe.



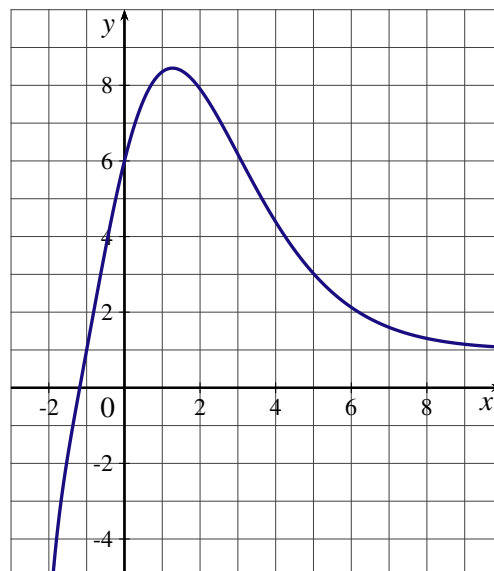
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction  $f$  admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction  $f$  : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

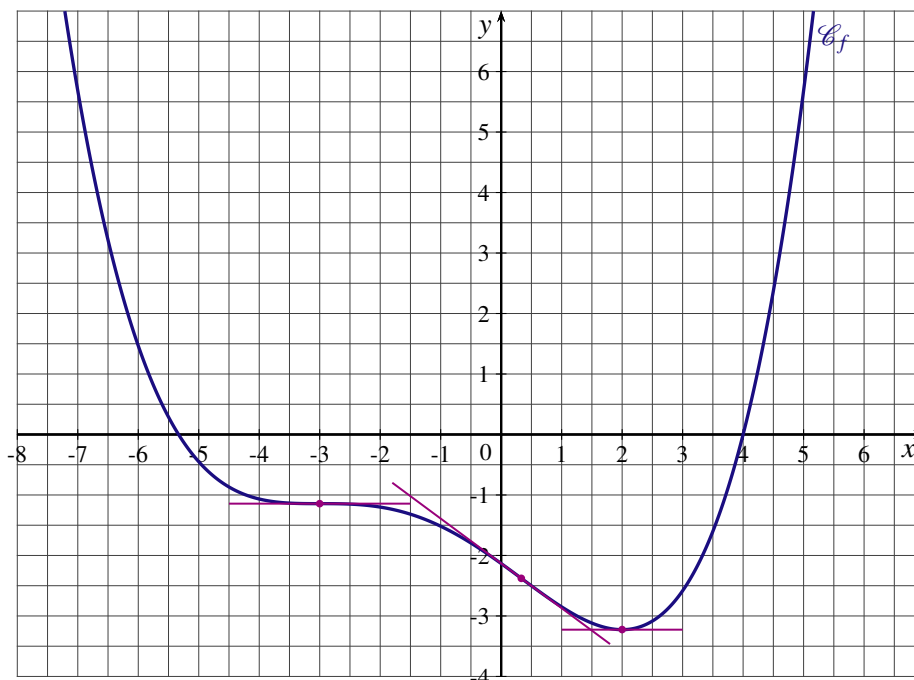


Courbe 2



**EXERCICE 11**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la dérivée seconde de la fonction  $f$ .

À partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles  $<$ ,  $=$  ou  $>$  est approprié :

$f(-6) \dots 0$	$f'(-6) \dots 0$	$f(-1) \dots f(3)$	$f'(-1) \dots f'(3)$
$f'(-6) \dots f'(-1)$	$f'(-3) \dots 0$	$f'(2) \dots 0$	$f'(-7) \dots f'(3)$
$f''(-6) \dots f''(-1)$	$f''(-3) \dots 0$	$f''(2) \dots 0$	$f''(-1) \dots f''(1)$

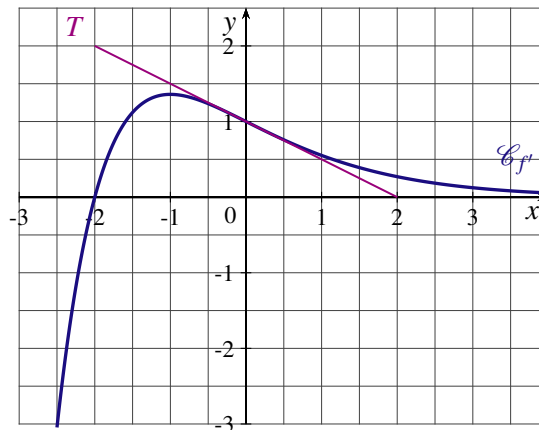
**EXERCICE 12**

Soit  $P(t)$  la population d'une ville où  $t$  est en années et  $P(t)$  est en milliers d'habitants.  
Que signifient les énoncés suivants en ce qui concerne les signes de la dérivée et de la dérivée seconde ?

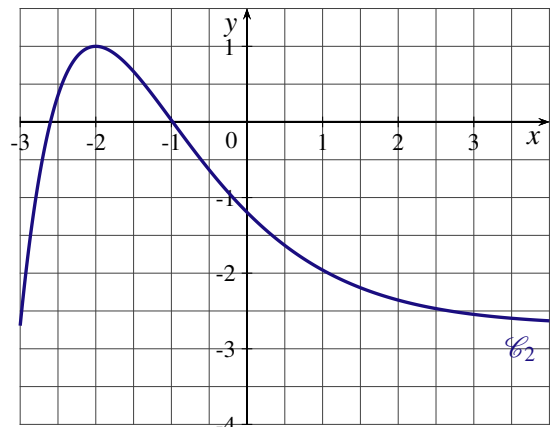
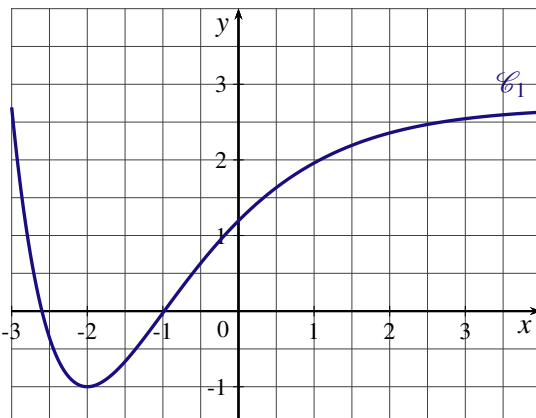
1. « La population a augmenté de moins en moins vite ».
2. « La population est restée stable les trois premières années ».
3. « La population diminue plus rapidement ».
4. « La population a augmenté au même taux ».

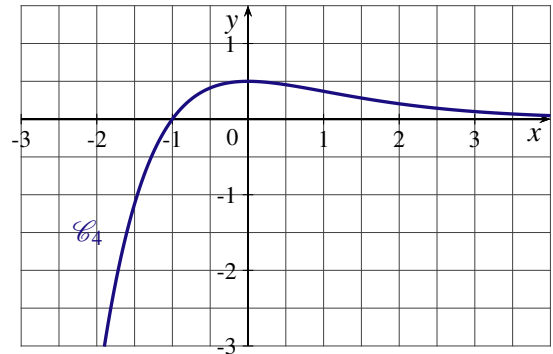
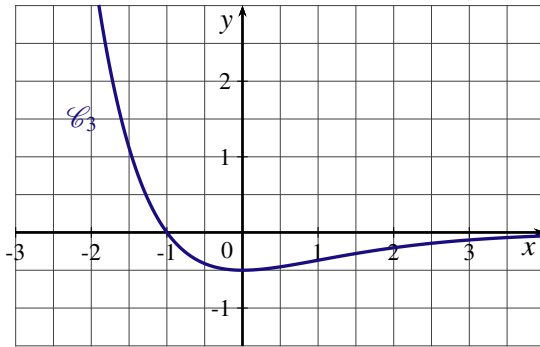
**EXERCICE 13**

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.  
La courbe représentative de la fonction dérivée notée  $\mathcal{C}_{f'}$  est donnée ci dessous.  
La droite  $T$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_{f'}$  au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique :
  - a) Résoudre  $f'(x) = 0$ .
  - b) Résoudre  $f''(x) = 0$ .
  - c) Déterminer  $f''(0)$ .
2. Une des quatre courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$  ci-dessous est la courbe représentative de la fonction  $f$  et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde  $f''$ .





- Déterminer la courbe qui représente  $f$  et celle qui représente la dérivée seconde  $f''$ .
- Déterminer les intervalles sur lesquels  $f$  est convexe ou concave.
- La courbe représentative de la fonction  $f$  admet-elle un point d'inflexion ?

### EXERCICE 14

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

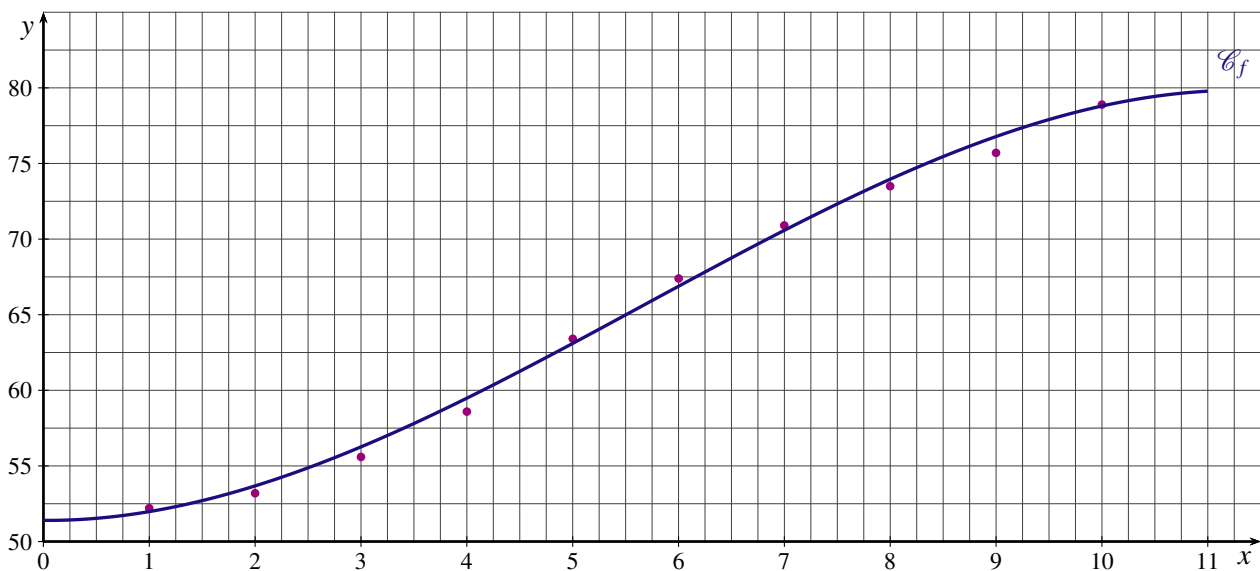
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement $y_i$	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 11]$  par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où  $x$  est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



- Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
  - Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
- Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .
  - Déterminer les intervalles sur lesquels  $f$  est convexe ou concave.
  - La courbe  $\mathcal{C}_f$  a-t-elle un point d'inflexion ?
- Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction  $f$ .  
Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?



### EXERCICE 15

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses.

2. On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ .

a) Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$ .

b) Donner le tableau des variations de la fonction  $f$ .

3. a) Étudier la convexité de la fonction  $f$ .

b) La courbe représentative de la fonction  $f$  a-t-elle un point d'inflexion ?

4. Montrer que l'équation  $f'(x) = \frac{1}{2}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à  $10^{-2}$  près, de  $\alpha$ .

### EXERCICE 16

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = -x^3 + 16,5x^2 - 30x + 110$ .

On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la dérivée seconde.

1. a) Déterminer  $f'(x)$ .

b) Étudier les variations de la fonction  $f$ .

2. a) Déterminer  $f''(x)$ .

b) Étudier la convexité de la fonction  $f$ .

### PARTIE B

La fonction  $f$ , définie dans la partie A, modélise sur l'intervalle  $[0; 12]$ , le cours d'une action sur une année.  $x$  est le temps écoulé exprimé en mois et  $f(x)$  est le cours de l'action en euros.

1. Sur un an, quel a été le cours le plus bas de cette action ? le cours le plus haut ?

2. À quel moment la croissance du cours de cette action s'est-elle ralentie ?

### EXERCICE 17

#### PARTIE A

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 20x + 8$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan.

1. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

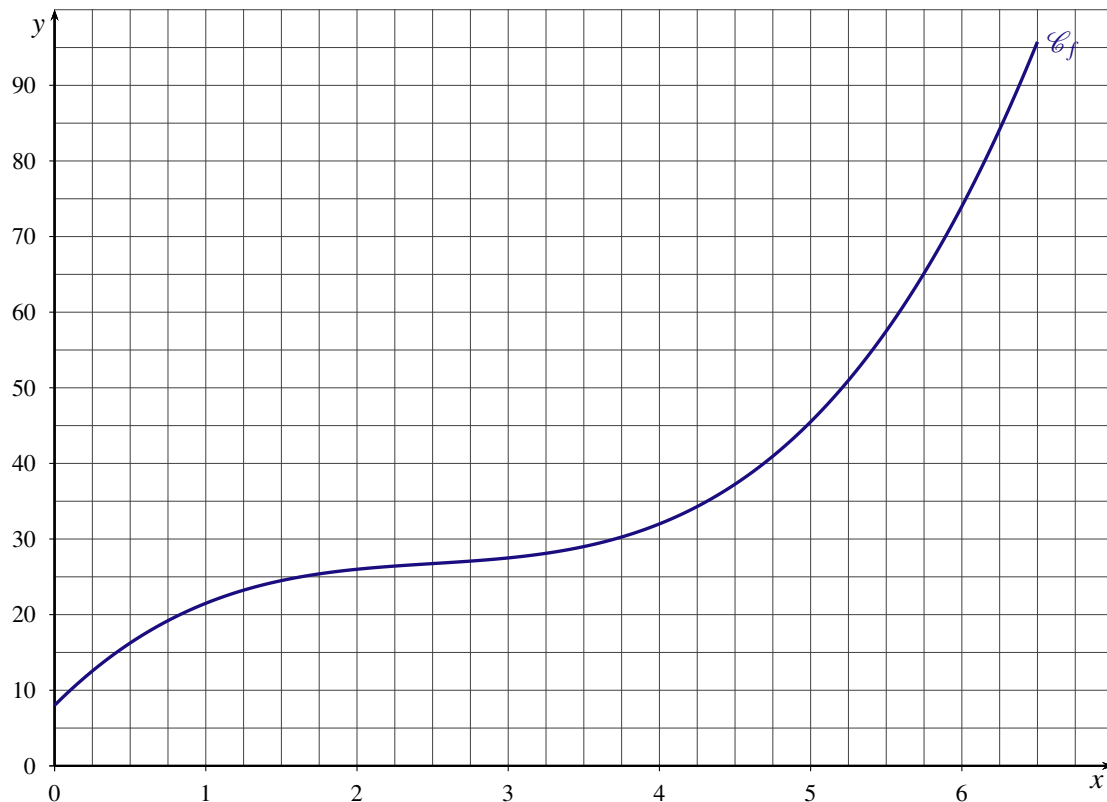
2. a) Étudier la convexité de la fonction  $f$ .

b) La courbe  $\mathcal{C}_f$  a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

#### PARTIE B

La fonction  $f$  modélise sur l'intervalle  $]0; 6,5]$  le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où  $x$  désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle  $]0; 6,5]$ , est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
  - a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production  $x$  pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
  - b) la production  $x_0$  pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction  $B$  définie sur l'intervalle  $]0 ; 6,5]$  par  $B(x) = 13,25x - f(x)$ .
  - a) Étudier les variations de la fonction  $B$  sur  $]0 ; 6,5]$ .
  - b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de  $x$  milliers d'articles est donné par  $f'(x)$  où  $f'$  est la dérivée de la fonction  $f$ .  
Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

### PARTIE C

Le coût moyen de production  $C$  mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction  $C$  définie sur l'intervalle  $]0;6,5]$  par  $C(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

1. Soit  $A$  le point d'abscisse  $a$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
  - a) Montrer que le coefficient directeur de la droite  $(OA)$  est égal au coût moyen  $C(a)$
  - b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction  $C$
2. On désigne par  $C'$  la dérivée de la fonction  $C$ .
  - a) Montrer  $C'(x) = \frac{(x-4)(2x^2 + 0,5x + 2)}{x^2}$ .
  - b) Étudiez les variations de la fonction  $C$ .
  - c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.