ACTIVITÉ 1

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=4$.

1. f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{5}{2}$.
2. f est la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x)=-0{,}4x+3{,}6$.

ACTIVITÉ 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+5}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal

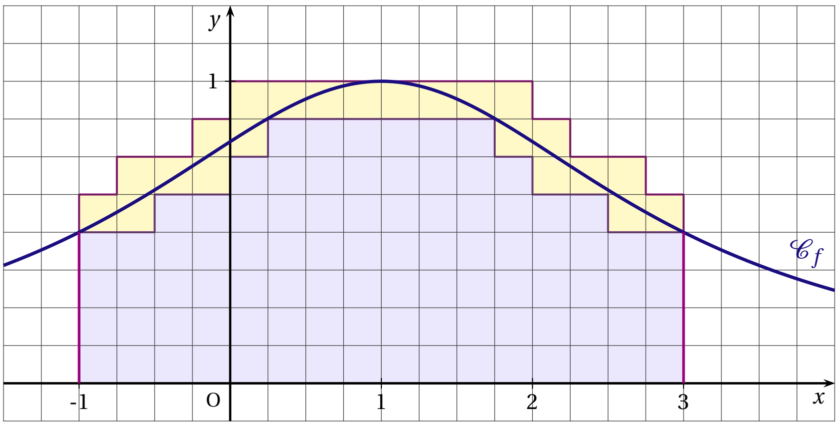
PARTIE A

1. Étudier le signe de $f(x)$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f

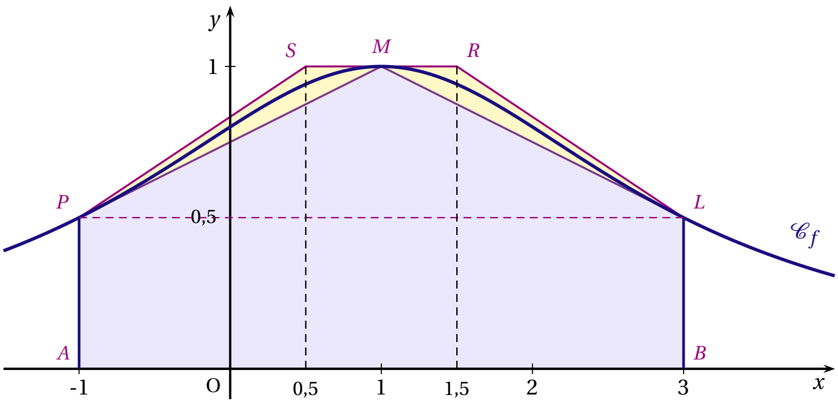
PARTIE B

On cherche à déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$.

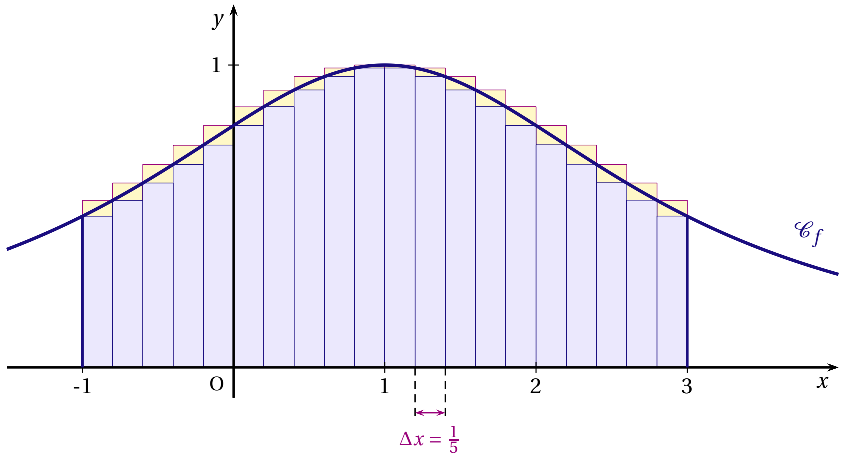
1. À l'aide du quadrillage, déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.



2. À l'aide des deux polygones, déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.



3. Encadrement par deux familles de rectangles.
   On subdivise l'intervalle $[-1;3]$ en 20 intervalles de même amplitude $\Delta x=0{,}2$.
   Sur chacun des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ avec $0\leqslant k<20$, le rectangle inscrit sous la courbe a pour longueur le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[x_k;x_{k+1}]$ et le rectangle circonscrit a pour longueur le maximum de la fonction f sur le même intervalle.



a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x_k	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{181}$	$\frac{25}{41}$	$\frac{100}{149}$	$\frac{25}{34}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{29}$				1

x_k	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	X
$f(x_k)$											X

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}_I$, somme des aires des rectangles inscrits et l'aire $\mathscr{A}_E$, somme des aires des rectangles circonscrits.

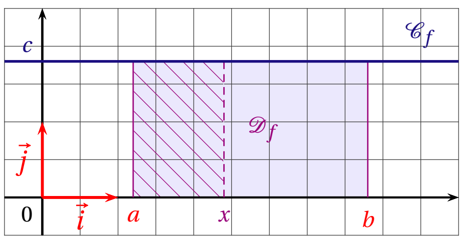
c) En déduire un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.

ACTIVITÉ 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm, a et b sont deux réels tels que $a < b$.
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie et positive sur l'intervalle $[a;b]$.
$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\mathscr{D}_f$ le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

FONCTION CONSTANTE :

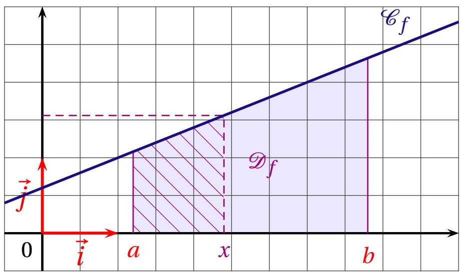
Soit c un réel positif. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c$.



1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on?

FONCTION AFFINE :

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont des réels fixés avec m non nul. f est supposée positive sur $[a;b]$.

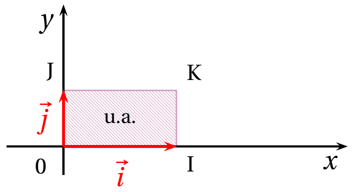


1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on?

I INTÉGRALE ET AIRE

1 UNITÉ D'AIRE

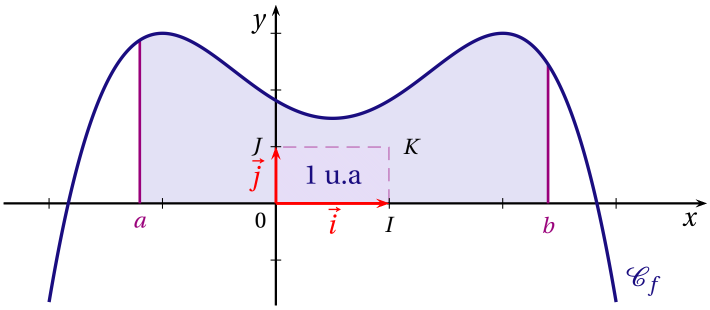
Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec I(0; 1), J(0; 1) et K(1; 1).



2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$
Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



REMARQUES

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

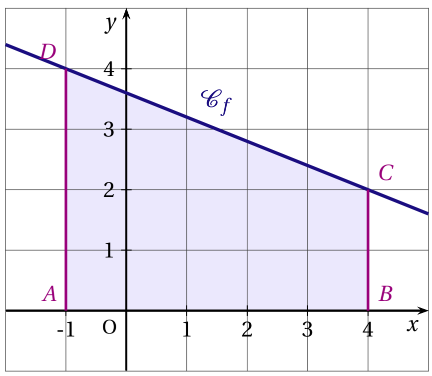
— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

— $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

EXEMPLES (*traités en activité*)

1. Calculons $\displaystyle\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$.
   La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x)=-0{,}4x+3{,}6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

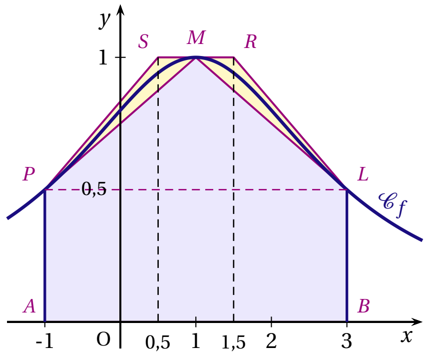
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$



2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+5}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

f est dérivable donc continue et strictement positive. Par conséquent, $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$.

a) Le domaine $\mathscr{D}_f$ est encadré par des surfaces délimitées par des polygones dont on peut calculer l'aire à l'aide d'un découpage en figures simples du plan : triangle, carré, rectangle trapèze.
Soient $\mathscr{A}_I$ l'aire du polygone inscrit $ABLMP$ et $\mathscr{A}_E$ l'aire du polygone circonscrit $ABLRSP$.



— $\mathscr{A}_I$ est égal à la somme des aires du rectangle $ABLP$ et du triangle LMP d'où $\mathscr{A}_I = 4\times 0{,}5+\dfrac{4\times 0{,}5}{2}=3$

— $\mathscr{A}_E$ est égal à la somme des aires du rectangle $ABLP$ et du trapèze $LRSP$ d'où $\mathscr{A}_E = 4\times 0{,}5+\dfrac{(4+1)\times 0{,}5}{2}=3{,}25$

On en déduit que $3 \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3{,}25$.

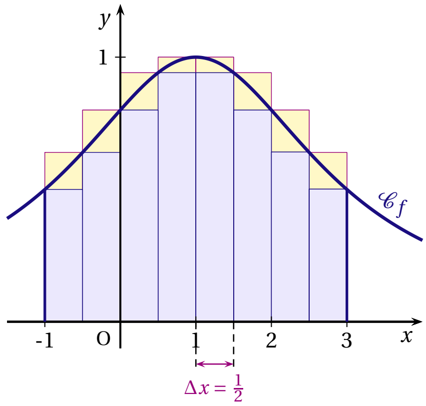
b) Encadrement par deux familles de rectangles

On subdivise l'intervalle $[-1;3]$ en n intervalles de même amplitude pour obtenir un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ à partir de l'aire de deux familles de rectangles.

Subdivision de l'intervalle $[-1;3]$ avec un pas $\Delta x=\dfrac{1}{2}$.

Sur chacun des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ avec $0\leqslant k<8$, le rectangle inscrit sous la courbe a pour longueur le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[x_k;x_{k+1}]$ et le rectangle circonscrit a pour longueur le maximum de la fonction f sur le même intervalle.
Compte tenu des variations de la fonction f et des valeurs calculées ci-dessous,

x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{17}$	1	$\frac{16}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{2}$



L'aire $\mathscr{A}_I$, somme des aires des rectangles inscrits est :

$$\mathscr{A}_I=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2449}{850}\approx 2{,}88$$

L'aire $\mathscr{A}_E$, somme des aires des rectangles circonscrits est :

$$\mathscr{A}_E=\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+\frac{16}{17}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{2}=\frac{1437}{425}\approx 3{,}38$$

On en déduit que $\dfrac{2449}{850}\leqslant \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant \dfrac{1437}{425}$.
En choisissant une subdivision de l'intervalle $[-1;3]$ plus fine, on augmente la précision de l'encadrement.

Avec un pas $\Delta x=0{,}1$ on obtient $3{,}091\leqslant \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3{,}192$.

Avec un pas $\Delta x=0{,}01$ on obtient $3{,}136\leqslant \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3{,}147$.

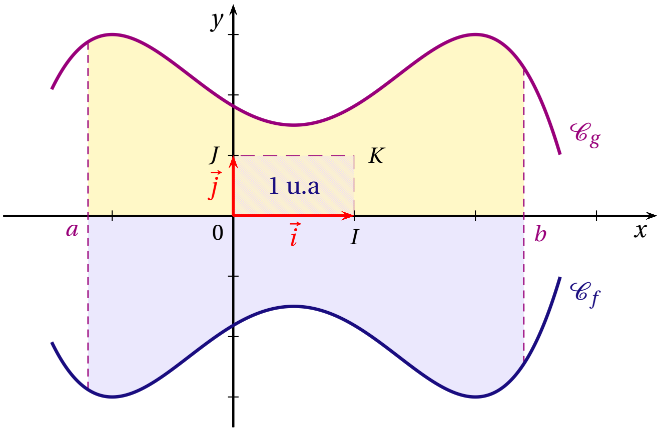
Remarque :

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{4}{x^2-2x+5}\right)\mathrm{d}x\approx 3{,}1415927$.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{4}{x^2-2x+5}\right)\mathrm{d}x=\pi$.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

4 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET DÉRIVÉE

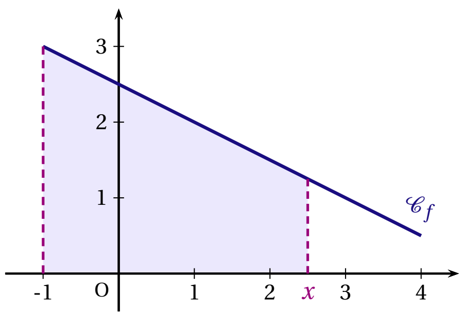
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

THÉORÈME *(admis)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$.
Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.
On a donc $F(x) = \dfrac{(3+(-0{,}5x+2{,}5))\times(x+1)}{2} = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5x}{2} + \dfrac{11}{4}$
La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $F'(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} = f(x)$.



II PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$
Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

PROPRIÉTÉ (*admise*)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

THÉORÈME

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

DÉMONSTRATION

— Soient F une primitive de la fonction f sur I et k est un réel.
Si pour tout réel x de I, G est la fonction définie par $G(x) = F(x) + k$, alors $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

— Soient G et F deux primitives de f sur I.
On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$, alors H est dérivable sur I et

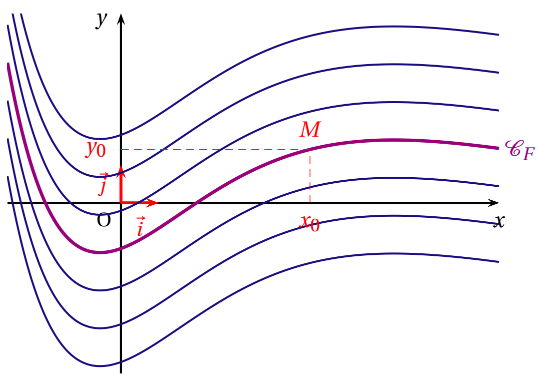
$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La dérivée H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I.
Ainsi, pour tout réel x de I, $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on connaît la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une primitive de f sur I, alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0; y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathscr{C}_F$ de la famille passant par ce point.



3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

✻ DÉMONSTRATION

Si G est une primitive de f sur I, alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel.
La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.
Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

III CALCUL DE PRIMITIVES

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	sur $\mathbb{R}$

2 LINÉARITÉ

— Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

— Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I.

✻ DÉMONSTRATION

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ et αF sont dérivables sur I.

— $(F+G)' = F' + G' = f + g$ donc $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

— $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$.

La fonction u définie par $u(x) = x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x) = \frac{x^3}{3}$.

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln x$. Donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction v définie par $v(x) = -\frac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x) = -3\ln x$.

Donc la fonction $f = u + v$ admet comme primitive la fonction $F = U + V$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3\ln x$.

3 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F est donnée par…
$f = u'u$	$F = \dfrac{1}{2}u^2$
$f = u'u^n \quad n$ entier, $n > 0$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$
$f = \dfrac{u'}{u^2} \quad u$ ne s'annule pas sur I	$F = -\dfrac{1}{u}$
$f = \dfrac{u'}{u^n} \quad (n$ entier, $n \geqslant 2)$ u ne s'annule pas sur I	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.
Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.
On a : $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2x) \times \mathrm{e}^{1-x^2}$ soit $f = -\dfrac{1}{2} \times u'\mathrm{e}^u$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + c$ où c est un réel à déterminer.
Or $F(1) = 0 \iff -\dfrac{1}{2} + c = 0 \iff c = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + \dfrac{1}{2}$.

IV INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b) - F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$; ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.
En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ d'où

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \left(x - \frac{1}{x} + \frac{\mathrm{e}}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{\mathrm{e}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln(1) - \frac{\mathrm{e}}{1}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \mathrm{e} - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

V PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.
Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$.
On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} \left(-x^2 + 3x + 1\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{3}\\ &= \left(-9 + \frac{27}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2\right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

✻ DÉMONSTRATION

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a))\\ &= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(t)\,\mathrm{d}t &= \alpha F(b)-\alpha F(a)\\ &= \alpha\,(F(b)-F(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

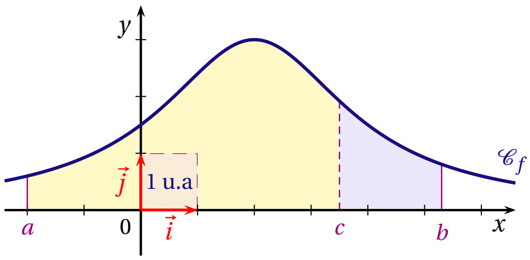
❊ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (F(c)-F(a))+(F(b)-F(c))\\ &= F(b)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$.



4 ORDRE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a\leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

❊ DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $f(x)-g(x)\leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f-g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a\leqslant b$ et $f-g\leqslant 0$ alors

$$\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0 \iff \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$

Attention la réciproque est fausse :

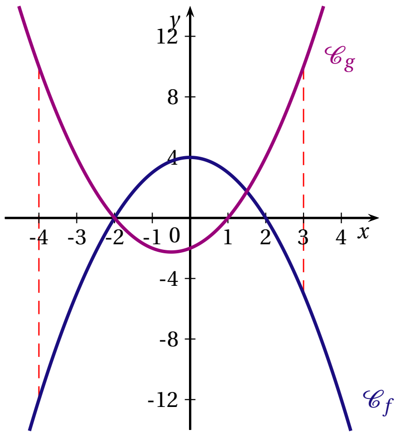
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$ et $g(x)=x^2+x-2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x &= \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}\\ &= \left(12-\frac{27}{3}\right)-\left(-16+\frac{64}{3}\right)\\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-4}^{3}\\ &= \left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}-6\right)-\left(-\frac{64}{3}+\frac{16}{2}+8\right)\\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x)\leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



VI INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a<b$). Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$, alors :

$$m\times(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\times(b-a)$$

✻ DÉMONSTRATION

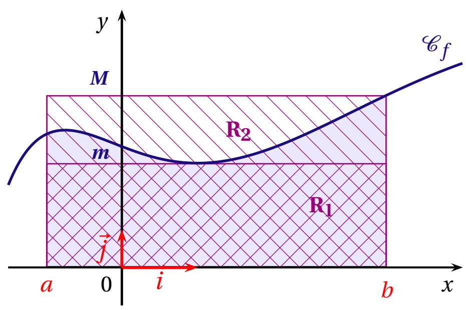
Les fonctions définies sur $[a;b]$ par $x\longmapsto m$ et $x\longmapsto M$ sont constantes donc continues.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$ ($a<b$), $m\leqslant f(x)\leqslant M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\begin{aligned}\int_a^b m\ \mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\ \mathrm{d}x &\iff m\int_a^b \mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x\\ &\iff m\times(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\times(b-a)\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

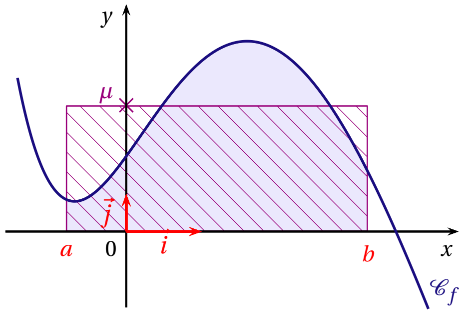
Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
R_1 de côtés m et $b-a$;
R_2 de côtés M et $b-a$.



2 VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$.

EXERCICE 1

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+3x-1$ et $g(x)=-2x+3$.
   Vérifier que g est la dérivée de f. Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
2. Dans chacun des cas suivants, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f sur l'intervalle I.

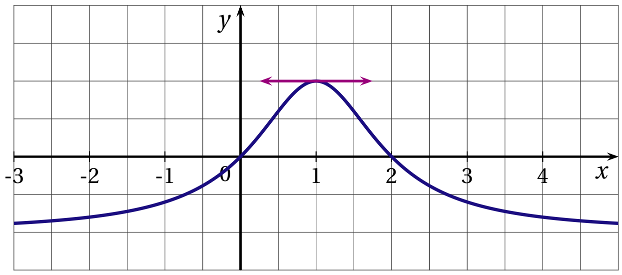
   a) $f(x)=3x-2 \quad (I=\mathbb{R})$
   b) $f(x)=2x^2+x-1 \quad (I=\mathbb{R})$
   c) $f(x)=x^3 \quad (I=\mathbb{R})$
   d) $f(x)=\dfrac{3}{x^2} \quad (I=]0;+\infty[)$
   e) $f(x)=\dfrac{2}{x} \quad (I=]0;+\infty[)$
   f) $f(x)=\mathrm{e}^{0,5x} \quad (I=\mathbb{R})$

EXERCICE 2

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$
Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

EXERCICE 3

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie par $F(x)=\dfrac{2}{x^2-2x+2}$. On a tracé ci-dessous, la courbe représentative d'une autre primitive G de f.



1. Donner l'expression de $G(x)$.
2. Déterminer $f(1)$.

EXERCICE 4

Dans chaque cas, trouver une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x^3-1-\dfrac{1}{x^2}$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3x}$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\mathrm{e}^{-x}$.

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2x-1$ et $F(-2)=0$.
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ et $F(1)=-1$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)^2$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$.
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ et $F(0)=-\dfrac{1}{2}$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ et $F(-1)=\dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 6

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

1. $A=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x+1\right)\,\mathrm{d}x$
2. $B=\displaystyle\int_{2}^{6}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}-1\right)\,\mathrm{d}x$
3. $C=\displaystyle\int_{-2}^{1}2\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $D=\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}2\mathrm{e}^{x}\times\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\,\mathrm{d}x$
5. $E=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 7

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On sait que $f(2)=-4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0			4		$+\infty$
signe de $f(x)$	$\|\|$		$-$	0	$+$	

PARTIE A

1. Soit F la primitive de la fonction fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4)=\dfrac{1}{2}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F.
   a) Donner le tableau de variations de la fonction F.
   b) On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;3)$.
   Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

PARTIE B

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{16}{x^3}$

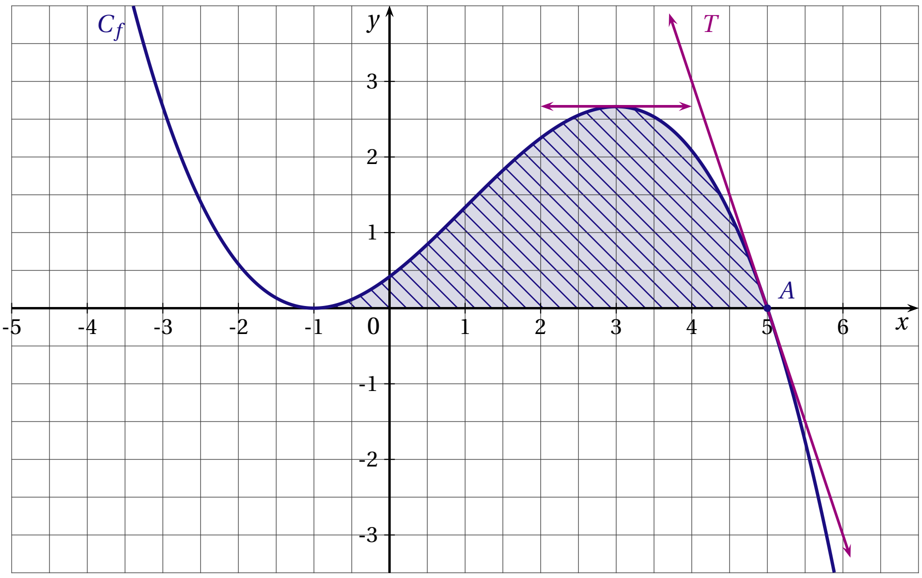
1. a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4)=\dfrac{1}{2}$.
   b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y=-4x+11$.
2. Étudier la convexité de la fonction F

EXERCICE 8

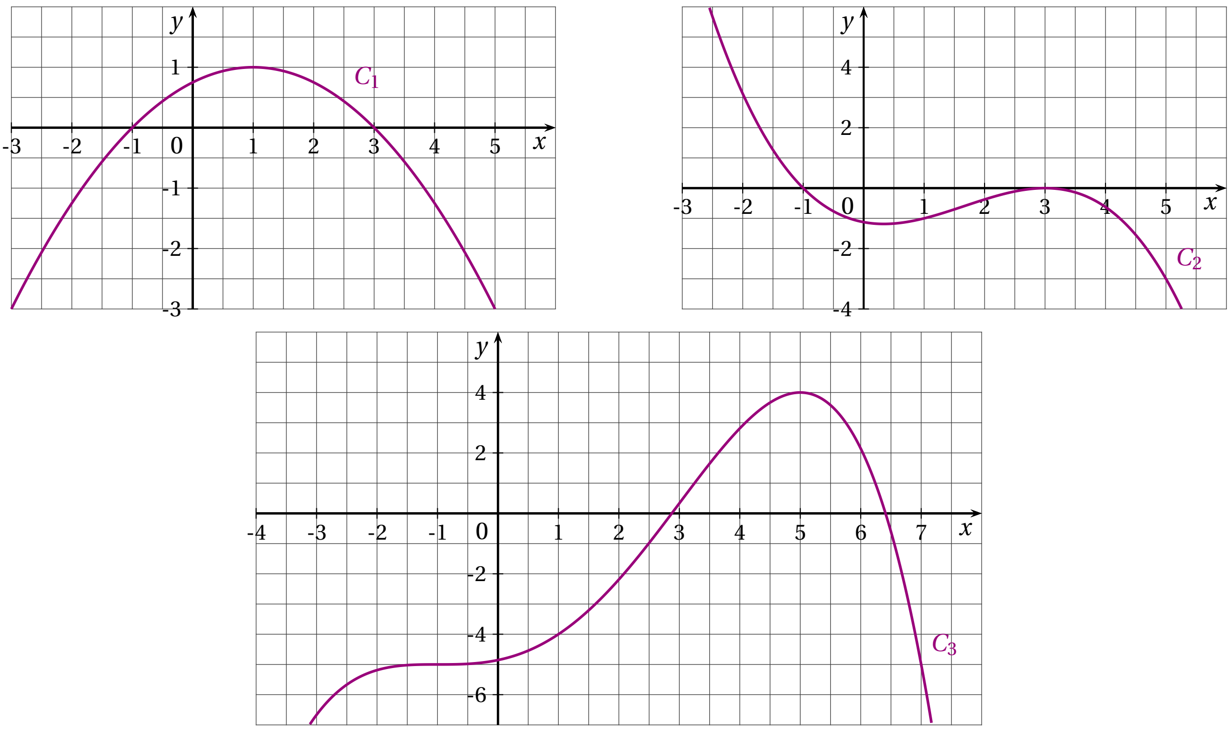
1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
2. Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2;2]$?

EXERCICE 9

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4;3)$.
On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.



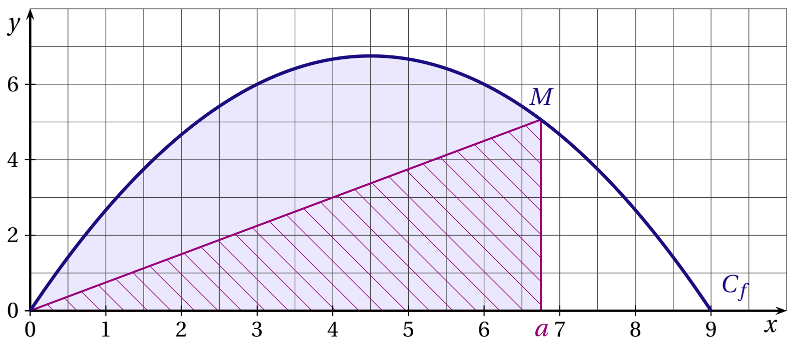
1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F.
   a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.



   b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.
   c) La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion ?

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = 3x - \dfrac{x^2}{3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

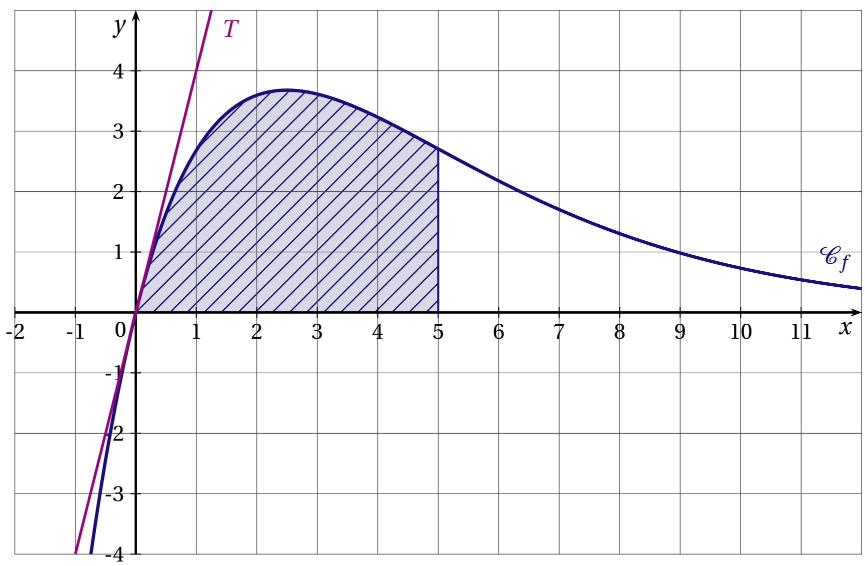


L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de a du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.
3. Déterminer a pour que $\mathscr{A}=2T$.

EXERCICE 11

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1)\leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12\leqslant F(5)-F(0)\leqslant 18$.

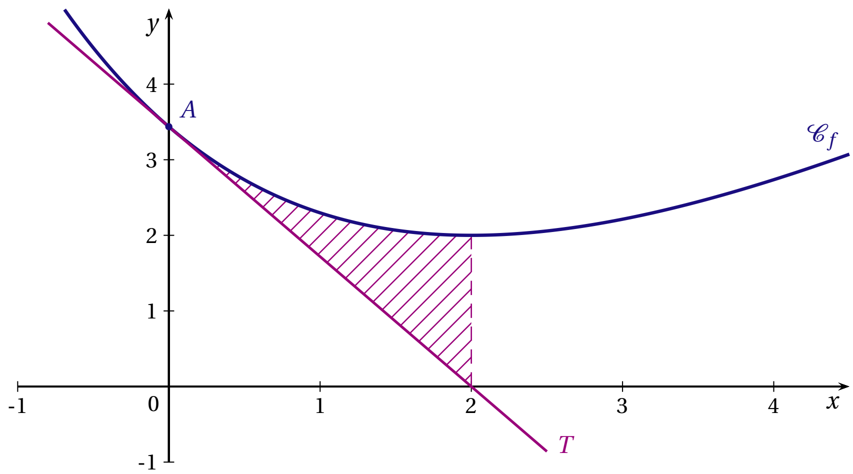
PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=4x\text{e}^{-0,4x}$.

1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.
   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} -0,4a &= 4 \\ a-0,4b &= 0 \end{cases}$
   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
2. On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\mathrm{e}^{1-0,5x}+x-2$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.(*Unités graphiques* : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées)



1. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) En déduire la position relative de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=2$.
   Donner une valeur approchée arrondie au centième près de cette aire en cm^2.

EXERCICE 13

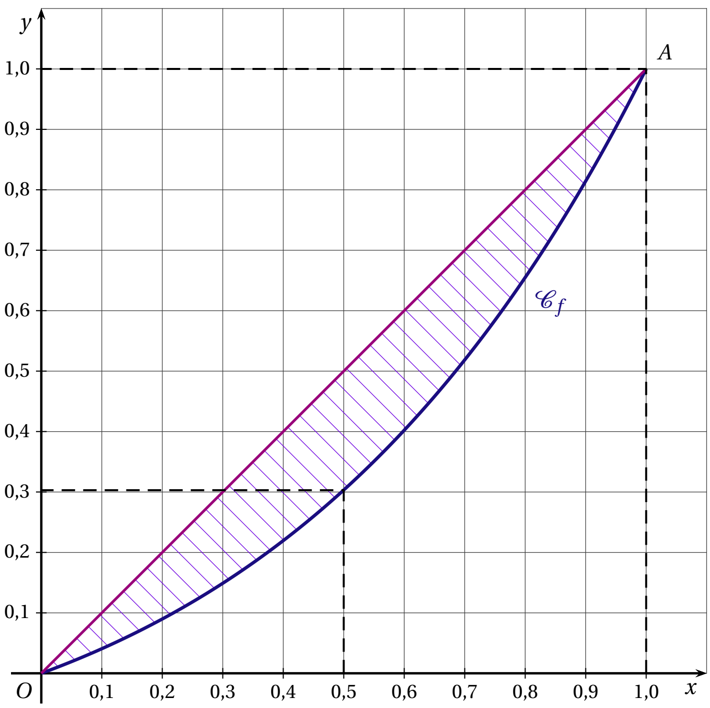
PARTIE A

Soit f une fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{x-1}$.

1. Montrer que pour tout réel $x\in[0;1]$, $f(x)\leqslant x$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0,5$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0;1]$.
5. Vérifier que la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $F(x)=(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ est une primitive de la fonction f.

PARTIE B

La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f, est la courbe de Lorenz qui modélise la répartition des salaires d'une entreprise.



— sur l'axe des abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;

— sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale correspondante.

Par exemple $f(0,5) \approx 0,303$ signifie que : « environ 30,3% de la masse salariale est détenue par la moitié des employés ayant les salaires les plus faibles ».

1. Déterminer la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles qui détiennent 50 % de la masse salariale. (*On donnera le résultat arrondi à* 0,1% *près*.)
2. On mesure l'inégalité de la répartition en comparant l'écart entre la situation d'équité parfaite et la situation réelle. On définit alors l'indice de Gini noté γ par $\gamma = 2 \times \mathscr{A}$, où $\mathscr{A}$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré compris entre le segment $[OA]$ et la courbe de Lorenz $\mathscr{C}_f$.

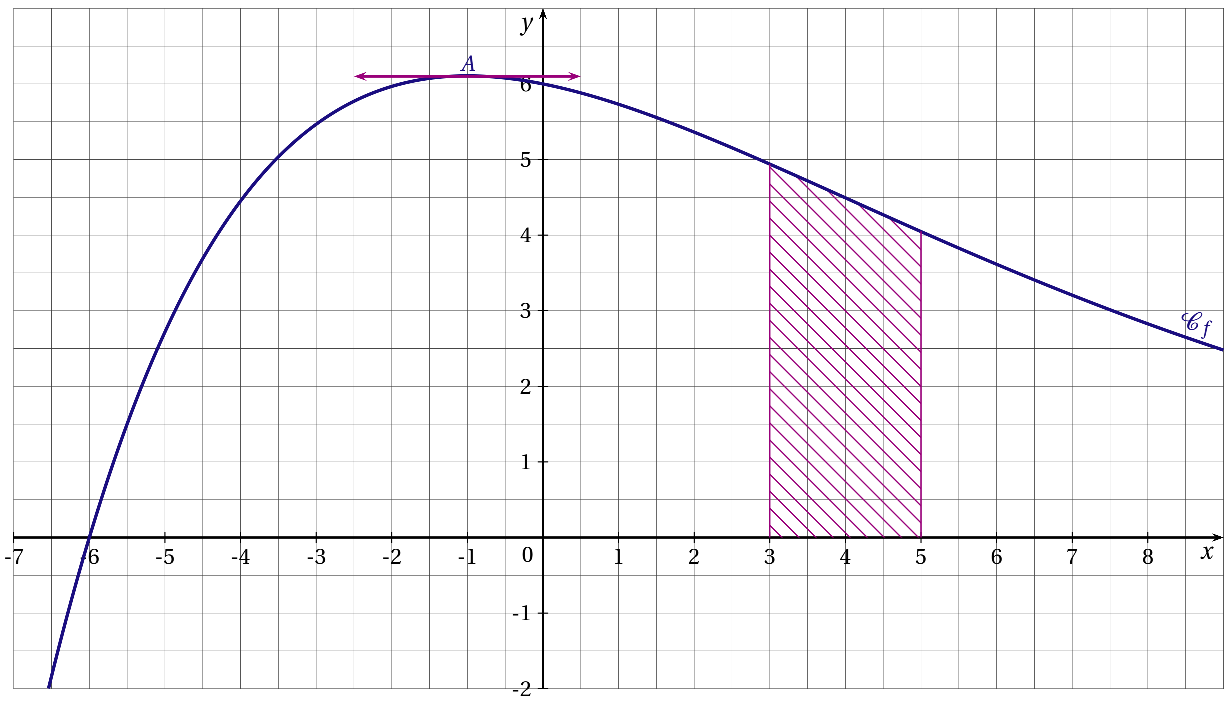
   a) Montrer que $\gamma = 1 - 2 \times \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) Calculer γ. (*On donnera la valeur exacte de* γ *et la valeur arrondie à* 10^{-3} *près*.)

EXERCICE 14

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(-1)$.
2. Déterminer le signe de $f'(4)$.
3. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine hachuré.

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
On note f' sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel x, on a $f'(x) = (-0,2x-0,2)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que $f''(x) = (0,04x-0,16)\mathrm{e}^{-0,2x}$, pour tout réel x.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.
   c) Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.
3. a) Démontrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (-5x-55)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

PARTIE C : Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1;8]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 4 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie B, déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \qquad \text{sur } [1;8]$$

   Calculer $E(4)$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 15

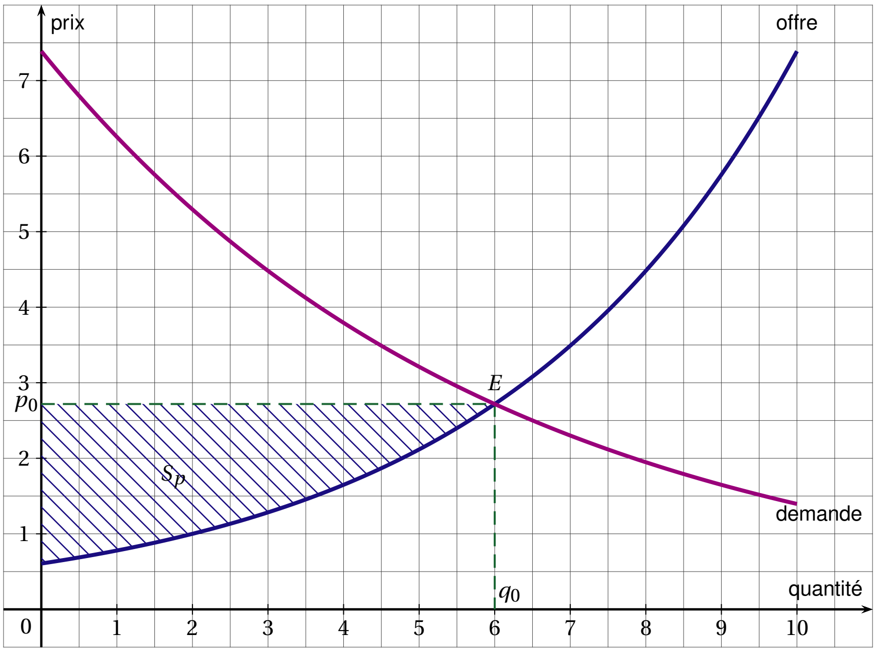
Les fonctions d'offre et de demande d'un produit sont définies sur $[0;10]$ par :

— fonction d'offre $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}$;

— fonction demande $g(x) = \mathrm{e}^{2-\frac{x}{6}}$.

Où x est la quantité en milliers d'articles et $f(x)$ et $g(x)$ sont des prix unitaires en euros.

1. Étudier les variations des fonctions f et g.
2. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont données ci-dessous. Au point E d'équilibre du marché, le prix p_0 en euro demandé par les consommateurs est égal au prix d'offre des producteurs et la quantité échangée sur le marché en milliers d'articles est égale à q_0.



   Calculer la quantité d'équilibre q_0 en nombre d'articles et le prix d'équilibre p_0 arrondi au centime d'euro près.
3. On considère les nombres $I = \displaystyle\int_0^{q_0} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = p_0 q_0$. Donner une interprétation graphique de $I - J$.
4. On admet que la quantité d'équilibre q_0 est de 6 milliers d'articles.

   a) Exprimé en milliers d'euros, le surplus des consommateurs, est donné par $S_d = \displaystyle\int_0^{6} g(x)\,\mathrm{d}x - 6\mathrm{e}$. Déterminer le surplus des consommateurs arrondi à l'euro près.

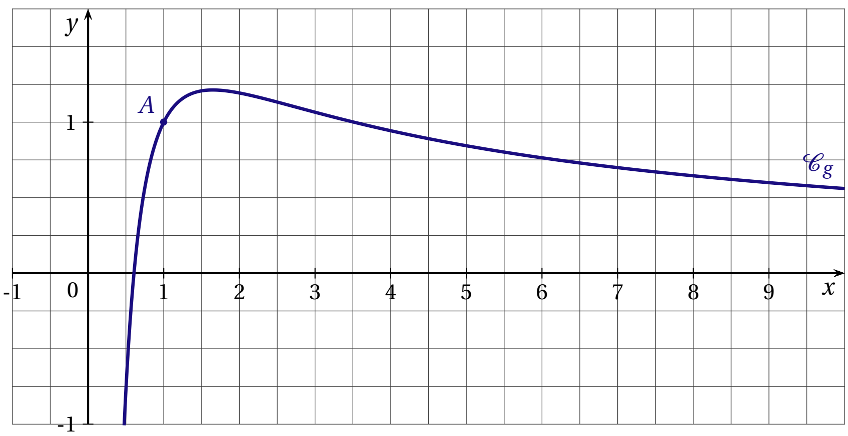
   b) L'aire S_p du domaine hachuré représente en milliers d'euros, le surplus des producteurs. Déterminer le surplus des producteurs arrondi à l'euro près.

EXERCICE 16

PARTIE A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.

On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



1. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Montrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
4. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On pourra remarquer que $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$.
   b) Soit $I = \frac{1}{4}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.

PARTIE B - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.
On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.
Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
2. Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?