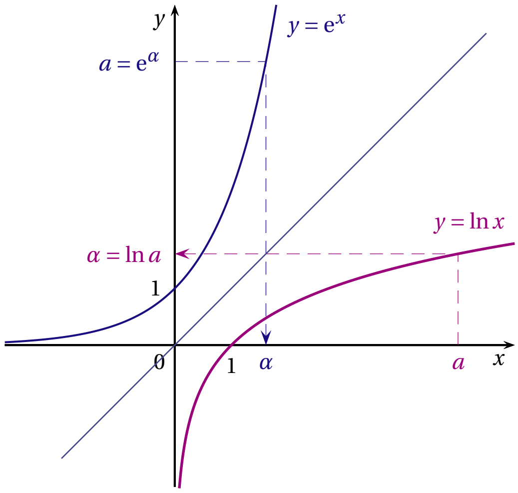
# I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel $x$, $e^x \in ]0;+\infty[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel $a$ strictement positif, il existe un unique réel $\alpha$ tel que $e^\alpha = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.




Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

## 1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x$ strictement positif, associe le réel $y$ tel que $e^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = e^y$$

REMARQUES

— On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de $x$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
— $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
— $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

## 2 CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

1. Pour tout réel $x$ strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel $x$, $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

✻ DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff e^y = x$. Soit $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel $x$, $e^x = y \iff x = \ln(y) = \ln(e^x)$. Soit $\ln(e^x) = x$.

EXEMPLES

$e^{\ln 5} = 5$; $\quad e^{-\ln 0{,}1} = \dfrac{1}{e^{\ln 0{,}1}} = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$; $\quad \ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln\left(e^{0{,}5}\right) = 0{,}5$; $\quad \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$.

### 3 VARIATION

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b$.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Ainsi, $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que $\ln a < \ln b$.

**CONSÉQUENCES**

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs :

$\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$

$\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

EXEMPLE

Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x$.
La fonction $f$ est dérivable et pour tout réel $x$, $f'(x) = e^x - 2$.
On a donc : $f'(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$.
On a également $f'(x) < 0 \iff e^x < 2 \iff x < \ln 2$.
Les variations de $f$ se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2-2\ln 2$ | $\nearrow$ | |

## II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

### 1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$ , $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$
D'autre part,

$$a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

D'où

$$e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$$

Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

REMARQUE

John Napier publia en 1614 une méthode de calcul transformant les multiplications en additions : les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre).

### 2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs et $n$ entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc
$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \iff \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et $n$ un entier relatif,
$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$
Donc $\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
4. Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc
$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

## III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

### 1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

— **On admet** que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

— Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$.
$f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.
Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$
Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

### 2 VARIATION

La fonction ln est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$.

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ .

Comme $\ln 1 = 0$, on en déduit les propriétés suivantes :

Pour tout réel $x$ strictement positif :

$\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$

$\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$

$\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$

D'où le tableau de variation de la fonction ln :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $\|\|$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | |

#### CONSÉQUENCE

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel $k$, l'équation $\ln x = k$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $x = e^k$.

## 3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

— $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(e;1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.

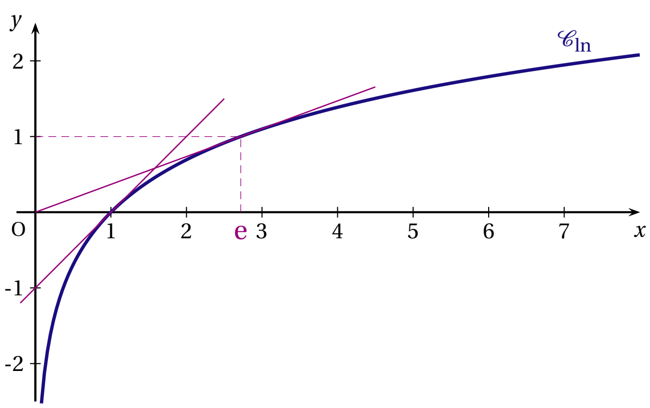
— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ est $\ln'(e) = \frac{1}{e}$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \iff y = \frac{1}{e}x$$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

— Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante.
Par conséquent, la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.



## EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln 10000-\ln 0{,}1+\ln 0{,}01$ ; $B=\ln(32)-7\ln(2)-4\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ; $C=8\ln(\sqrt{3})+5\ln(9)-\ln\left(9\sqrt{3}\right)$ ;

$D=\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ ; $E=2\ln\sqrt{8}-3\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ; $F=\dfrac{\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$ ;

$G=\dfrac{\ln 5-\ln 10}{2\ln\left(\sqrt{2}\right)}$ ; $H=\dfrac{\ln 100-2\ln 2}{\ln 5}$ ; $I=\dfrac{\frac{1}{3}\ln 9-4\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{3}}{\ln 3}$.

## EXERCICE 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right)+\mathrm{e}^{-\ln 2}$ ; $B=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln\left(\mathrm{e}^{2}\right)}-\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ ; $C=\ln\left(4\mathrm{e}^{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ ; $D=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{3}}\right)}{\ln 3}\times\dfrac{\ln 9}{\mathrm{e}^{2}}$

## EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à $10^{-3}$ près des solutions :

1. a) $\mathrm{e}^{x}=5$ ; b) $2\mathrm{e}^{x}=0{,}2$ ; c) $\mathrm{e}^{2x-1}-3=0$ ; d) $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}=0{,}25$ ; e) $2\mathrm{e}^{x^{2}}-4=0$.
2. a) $\mathrm{e}^{1-2x}=3\mathrm{e}^{x}$ ; b) $3\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^{2+3x}$ ; c) $\dfrac{5\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{2x}}=4$ ; d) $\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\left(\mathrm{e}^{2+3x}-2\right)=0$.

## EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $4\mathrm{e}^{2x+1}\leqslant 3$ ; b) $3\mathrm{e}^{-2x}>1$ ; c) $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{3}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}\leqslant 0$ ; d) $\dfrac{5\mathrm{e}^{2-3x}}{\mathrm{e}^{2x-1}}>2$ ; e) $3\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^{x}+2\leqslant 0$.

## EXERCICE 5

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel $x>1$, $\ln\left(x^{2}+x-2\right)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$
2. Pour tout réel $x$ strictement positif, $\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

## EXERCICE 6

1. Résoudre dans $]0;+\infty[$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à $10^{-3}$ près des solutions :
   a) $\ln x=-1$ ; b) $2\ln x+0{,}01=0$ ; c) $3\ln x=\mathrm{e}^{3}$ ; d) $2(\ln x)^{2}=1$ ; e) $\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)(\ln(2x)-2)=0$.
2. Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :
   a) $2\ln x\leqslant -2$ ; b) $\ln 2x\leqslant -2$ ; c) $\ln\dfrac{1}{x}-\ln x\geqslant 0$ ; d) $\ln(3x)-2\ln x<5$ ; e) $(\ln x)^{2}+\dfrac{3\ln x}{2}-1\geqslant 0$.

## EXERCICE 7

Résoudre les équations suivantes :

a) $15^{x}=1000$ ; b) $x^{15}=1000$ ; c) $0{,}8^{x}=16$ ; d) $x^{0{,}8}=16$.

## EXERCICE 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier $n$ solution de l'inéquation :

a) $1{,}05^{n}\geqslant 1{,}5$ ; b) $0{,}92^{n}\leqslant 0{,}75$ ; c) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^{n}\geqslant 2$ ; d) $0{,}2\geqslant\left(1-\dfrac{9}{100}\right)^{n}$.

## EXERCICE 9

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4% par an.
En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.

1. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015 + n)$. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 % ?

## EXERCICE 10

En 2014, le parc informatique d'une entreprise était de 200 ordinateurs.
Pour renouveler ce parc et tenir compte des besoins de l'entreprise, chaque année le gestionnaire supprime 10 % des ordinateurs les plus anciens et achète 30 ordinateurs neufs.
Le nombre d'ordinateurs du parc informatique de cette entreprise est modélisé par la suite $(u_n)$ où où le terme $u_n$ désigne le nombre d'ordinateurs disponibles au cours de l'année $(2014 + n)$.
Ainsi, la suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs en 2015 et en 2016.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 300$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 300 - 100 \times 0{,}9^n$.
3. En quelle année, le nombre d'ordinateurs disponibles dans cette entreprise sera-t-il supérieur à 250 ?

## EXERCICE 11

(*D'après sujet bac Centres Étrangers 2017*)

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m$^2$ au 1$^{\text{er}}$ janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m$^2$.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018.
   On modélise la situation par une suite $(u_n)$ où $u_n$ représente la superficie de terrain en m$^2$ envahi par la Renouée du Japon au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2017 + n$.
   La suite $(u_n)$ est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 4$.
2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017.
   Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.
   *On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.*

```
U ← ...
N ← 0
Tant que ......................
    U ← ...
    N ← N + 1
Fin tant que
```

3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 40$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et préciser le premier terme.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$.
   c) Justifier que $u_n = 80 \times 0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel $n$.
4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $80 \times 0{,}9^n + 40 \leqslant 60$.

b) En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017.

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

## EXERCICE 12

(*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017*)

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.
Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.
On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite $(u_n)$ dans laquelle, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est le nombre de vélos le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2017+n$.
Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 30$.

1. a) Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
   b) Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018 ?
2. On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel $n$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $v_0$.
   b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 50 \times 0{,}8^n + 150$.
   d) La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
   En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il ?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1$^{\text{er}}$ janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.
   Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.
   a) Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
   b) Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1$^{\text{er}}$ janvier 2017 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2025.

## EXERCICE 13

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2017*)

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375 % de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
On note $u_n$ la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013+n)$ avec $u_0 = 4\,000$.

2. a) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}996\,25 u_n + 10{,}2$.
   b) Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3\,995{,}2$.
3. Soit $(d_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $d_n = u_n - 2\,720$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $d_{n+1} = 0{,}99625 \times d_n$.

b) Quelle est la nature de la suite $(d_n)$ ? Calculer $d_0$.

c) Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $d_n$, en fonction de $n$; en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

4. a) Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.

   b) À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares? Préciser la démarche utilisée.

## EXERCICE 14

Une entreprise produit des articles, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut d'assemblage ou un défaut de finition, à l'exclusion de tout autre défaut.
Une étude statistique a permis de constater que sur l'ensemble de la production :

— 9 % des articles présentent les deux défauts.

— 15 % des articles présentent un défaut d'assemblage.

— 4 % des articles n'ayant pas un défaut d'assemblage ont un défaut de finition.

On choisit un article au hasard et on note :

— $A$ l'évènement : « l'article a un défaut d'assemblage »;

— $F$ l'évènement : « l'article a un défaut de finition ».

1. a) Calculer $p(F)$.

   b) Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup F$ : « l'article est de fabrication défectueuse ».

2. On prélève au hasard $n$ articles. On suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages successifs indépendants avec remise.

   a) On note $p_n$ la probabilité que l'un au moins de ces $n$ articles soit défectueux.
   Justifier que $p_n = 1 - 0{,}816^n$.

   b) Quel est le nombre minimal d'articles qu'il faut prélever pour que la probabilité que l'un au moins de ces articles soit défectueux soit supérieure à 0,98?

## EXERCICE 15

(*D'après sujet bac Asie 2017 modifié*)

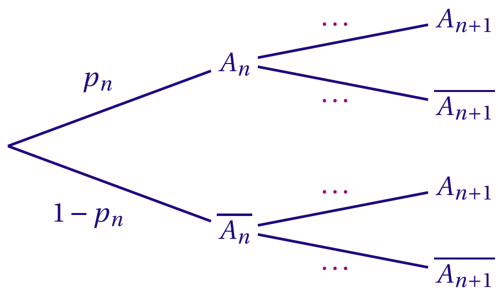
Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle », On admet que

— 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante;

— 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $A_n$ l'évènement « l'élève a choisi « Approfondissement » la $n$-ième semaine » et $p_n$ la probabilité de l'évènement $A_n$. On a alors $p_1 = 0{,}2$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.




2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.
3. On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $u_n = p_n - 0{,}4$.
   a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme $u_1$.
   b) En déduire pour tout entier naturel $n$ l'expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis l'expression de $p_n$ en fonction de $n$.
   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant où $N$ est un entier :

```
P ← 0,2
Pour I allant de 2 à N
      P ← 0,5P + 0,2
Fin Pour
```

   a) Donner la valeur de la variable $P$ à la fin de l'exécution de cet algorithme lorsque $N = 5$.
   b) Modifier l'algorithme afin qu'il calcule le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9.
   c) En résolvant une inéquation, déterminer à partir de combien de semaines, le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9 ?

## EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ :

a) $f(x) = x\ln x - x$ ; b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ ; c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$ ; d) $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln(x)$

## EXERCICE 17

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5x - 2x\ln(x)$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A$ d'abscisse e.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $T$ ?

## EXERCICE 18

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln(x)$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$.
2. Soit $a$ un réel strictement positif.
   a) Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ a pour équation

$$y = (2a\ln(a) + a)x - a^2(\ln(a) + 1)$$

   b) Déterminer $a$ pour que la tangente à la courbe au point d'abscisse $a$ passe par l'origine du repère.

## EXERCICE 19

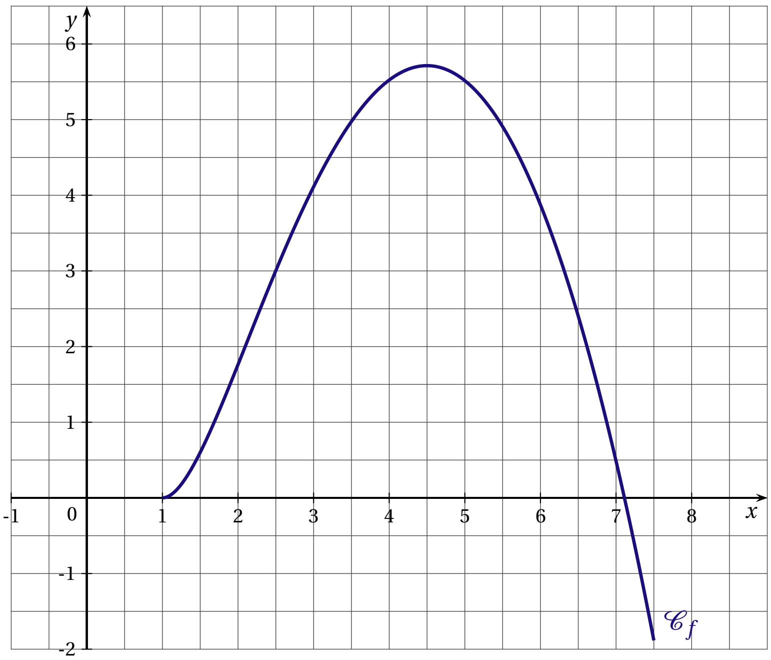
Soit $f$ la fonction définie sur $I = ]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Résoudre sur l'intervalle $I$, l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.
2. On désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
   b) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $I$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$. Donner la valeur arrondie au centième de $\alpha$.

## EXERCICE 20

**PARTIE A :** Étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;7{,}5]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9\ln(x) - 10$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.




1. a) Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1;7{,}5]$, on a $f'(x) = \dfrac{-2x^2+11x-9}{x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;7{,}5]$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur cet intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

**PARTIE B :** Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 750 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour $x$ centaines de pièces fabriquées et vendues $(1 \leqslant x \leqslant 7{,}5)$, est modélisé par $f(x)$, où $f$ est la fonction définie dans la partie **A**.

1. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.
2. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[7;7{,}5]$.
   b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer un intervalle d'amplitude $10^{-2}$ de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$a \leftarrow 7$
$b \leftarrow 7{,}5$
Tant que $b - a > 0{,}01$
    $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(m) < 0$
        ........................
    Sinon
        ........................
    Fin Si
Fin Tant que

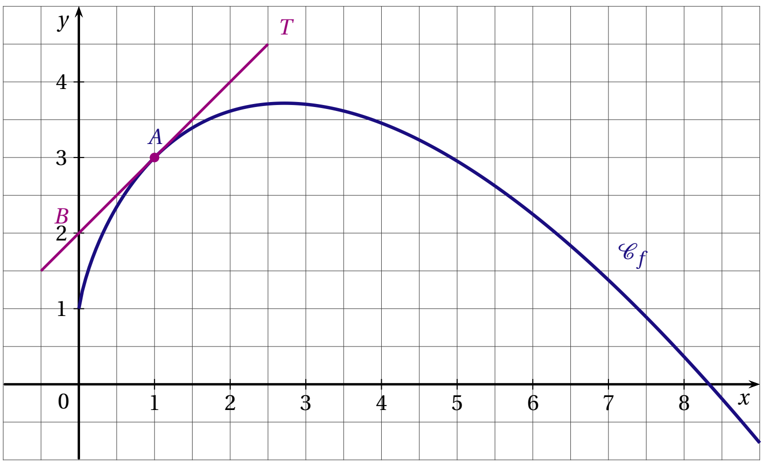
c) Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau ci-dessous.

| | $m = \dfrac{a+b}{2}$ | $f(m)$ à $10^{-3}$ près | $a$ | $b$ | $b-a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Initialisation | | | 7 | 7,5 | 0,5 |
| 1re boucle « Tant que » | 7,25 | | | | |
| 2e boucle « Tant que » | | | | | |
| ⋮ | | | | | |

d) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

## EXERCICE 21

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ strictement positif par $f(x) = 2x - x\ln(x) + 1$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La fonction $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on note $f'$ sa fonction dérivée et $f''$ sa fonction dérivée seconde.




1. La tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0;2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x) = 1 - \ln(x)$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x) \leqslant 0$.
   c) Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Étudier la convexité de la fonction $f$.

## EXERCICE 22

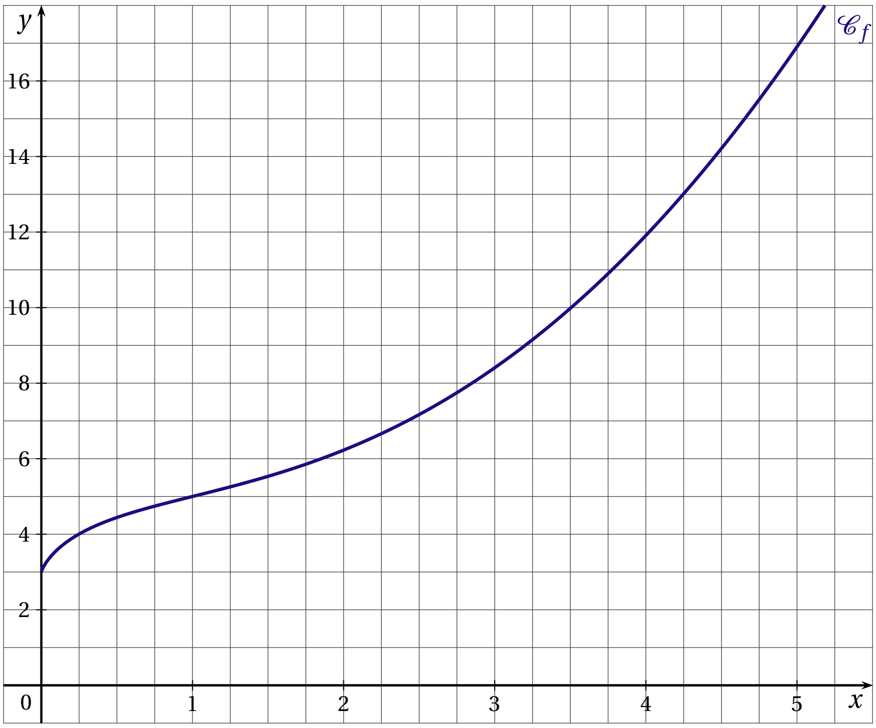
### PARTIE A

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par $f(x) = x(x - 2\ln x + 1) + 3$

1. Calculer $f'(x)$, où $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.
2. Étudier les variations de la fonction $f'$.
3. En déduire que la fonction $f$ est monotone.

### PARTIE B

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal.




1. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet sur $]0;+\infty[$ une seule tangente passant par l'origine du repère.
   Tracer cette tangente dans le repère précédent.
2. a) Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A$ d'abscisse 1.
   b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $T$.

### PARTIE C

Sur l'intervalle $]0 ; 5]$, le coût de production, en milliers d'euro, pour $x$ milliers d'articles fabriqués chaque jour par une usine, est modélisé par $f(x)$.
On note $C_M(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ le coût moyen de production avec $x \in ]0 ; 5]$.
Quel doit être le prix de vente minimal d'un article pour assurer la rentabilité de cette production ?

## EXERCICE 23

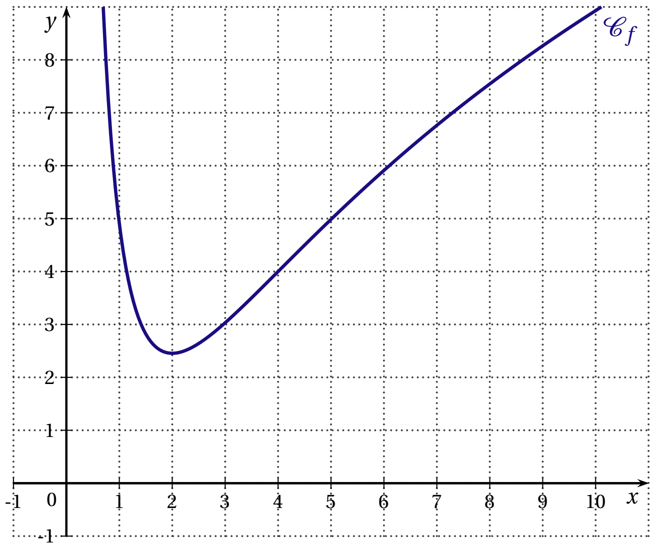
Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par $f(x) = 8\ln(x) + \dfrac{16}{x} - 16\ln(2)$.
Sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}_f$, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.

### PARTIE A

1. On note $f'$ la dérivée de $f$. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction $f$.

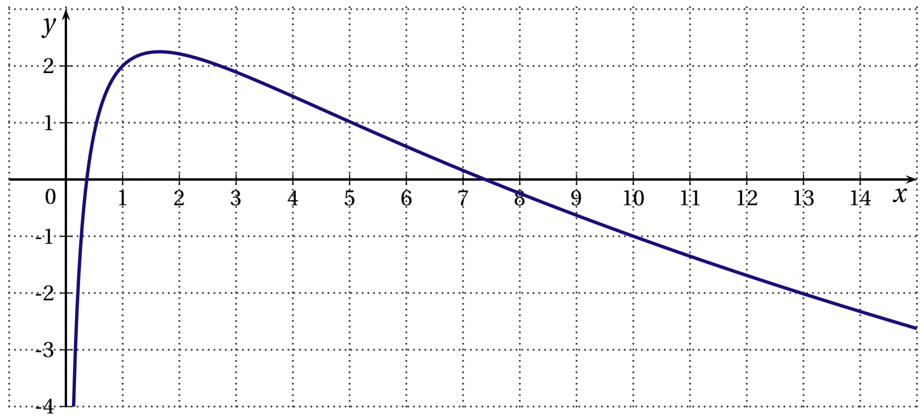
**PARTIE B**

1. La droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point $A$ d'abscisse $a$.
   a) Justifier que $a$ est solution de l'équation $\dfrac{8(a-2)}{a^2} = 1$.
   b) Déterminer la valeur de $a$.
2. Étudier la convexité de la fonction $f$.
3. Déduire des deux questions précédentes, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant x$




## EXERCICE 24

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel $x$ de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative $C_f$ est donnée ci-dessous.



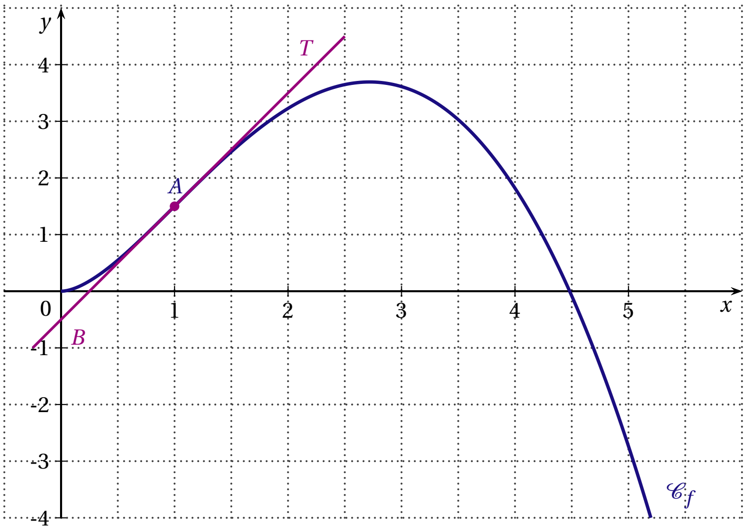

1. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
   b) Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. a) On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.
   c) En déduire les variations de $f$. On précisera la valeur exacte du maximum de $f$ et la valeur exacte de $x$ pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.

4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + X)(2 - X) = 2$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

## EXERCICE 25

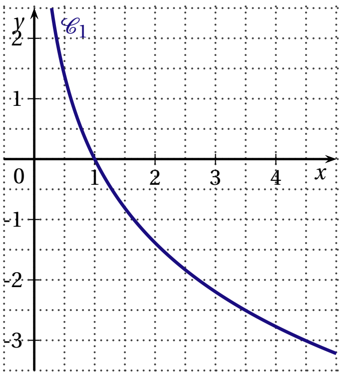
### PARTIE A

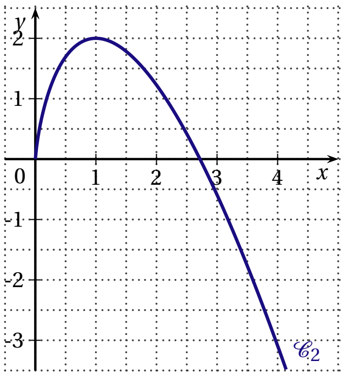
La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous dans un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $I = ]0; +\infty[$.

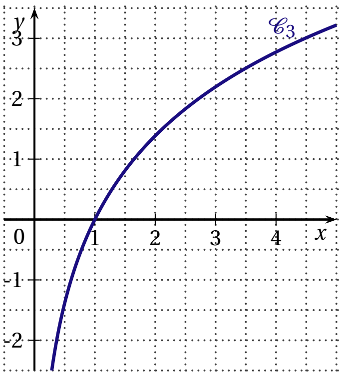



La tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

1. On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$, déterminer $f'(1)$.
2. Que représente le point $A$ pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?
3. Une seule des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée seconde $f''$ : laquelle ?




### PARTIE B

La fonction $f$ de la partie A est définie sur $I = ]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x) = 2x \times (1 - \ln(x))$.
   b) Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. On note $f''$ la dérivée seconde de $f$ sur $]0; +\infty[$. Calculer $f''(x)$ puis, étudier la convexité de la fonction $f$.