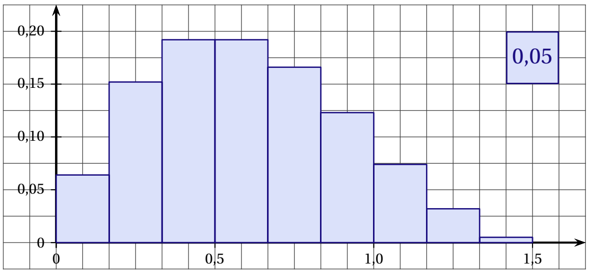
I INTRODUCTION

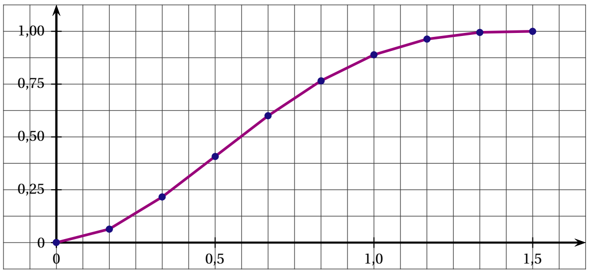
Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont dites continues.
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	[0; 10[	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[	[60; 70[	[70; 80[	[80; 90]
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.

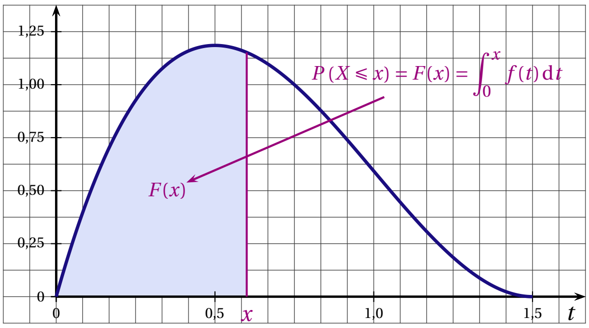


Histogramme

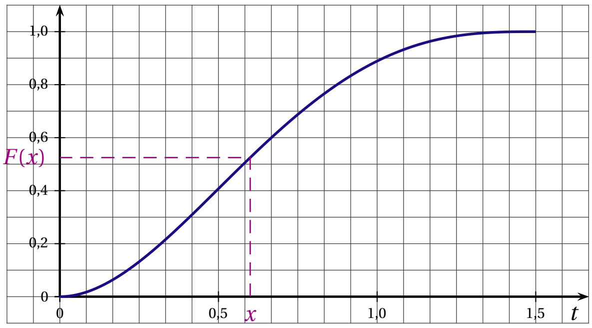


Polygone des fréquences cumulées

On modélise la situation à l'aide d'une variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations de cet hôpital avec $X \in [0; 1,5]$.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements étudiés sont ceux qui correspondent à des intervalles du type $X \in [0; 0,3]$, $0,5 \leqslant X \leqslant 1$ ou $X > 0,5$.
Le calcul de la probabilité $P(X = 0,345)$ que le temps d'attente soit exactement de 20 minutes et 42 secondes n'a pas de sens.
Dans le cas d'une variable aléatoire continue le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe représentative de la fonction de répartition F permettant de calculer des probabilités.
On suppose que la fonction F est définie sur l'intervalle $[0; 1,5]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est la fonction définie sur $[0; 1,5]$ par $f(t) = \dfrac{64t^3}{27} - \dfrac{64t^2}{9} + \dfrac{16t}{3}$. On dit que f est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X.



Fonction de densité



Fonction de répartition

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1,5]$, $F(x)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction de densité f, les axes du repère et la droite d'équation $t = x$.
On en déduit que :

— $P(X \leqslant 0,3) = F(0,3) = \displaystyle\int_0^{0,3} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,1808$.

— $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(0,5) = \displaystyle\int_{0,5}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{13}{27}$.

— $P(X > 0,5) = 1 - P(X \leqslant 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \displaystyle\int_0^{0,5} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{16}{27}$.

II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2 FONCTION DE DENSITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$ est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$.

— La fonction f est dérivable sur $[0;1{,}5]$ donc continue.

— Pour tout réel t, $\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}=\dfrac{16t\left(4t^2-12t+9\right)}{27}=\dfrac{16t\,(2t-3)^2}{27}$.
Par conséquent, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;1{,}5]$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur sur $[0;1{,}5]$ par $F(t)=\dfrac{16t^4}{27}-\dfrac{64t^3}{27}+\dfrac{8t^2}{3}$ d'où

$$\int_0^{1{,}5} f(t)\,\mathrm{d}t = F(1{,}5)-F(0)=1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$

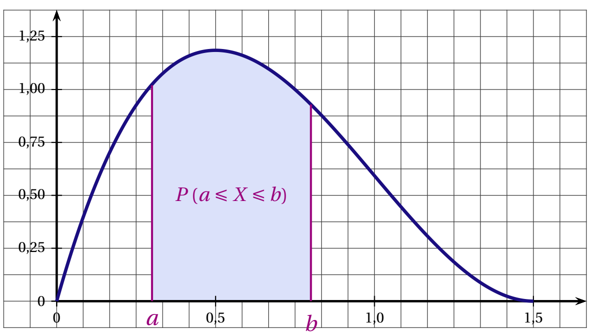
3 LOI DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X\in[a;b]$ est :

$$P(X\in[a;b])=P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

REMARQUE

$P(a\leqslant X\leqslant b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité étudiée dans l'exemple précédent.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0;1{,}5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X=a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$
2. $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$
3. $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X)=\int_a^b t\times f(t)\,\mathrm{d}t$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations dont la fonction de densité f est définie sur $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{1,5}\frac{64t^4}{27}-\frac{64t^3}{9}+\frac{16t^2}{3}\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{64t^5}{135}-\frac{16t^4}{9}+\frac{16t^3}{9}\right]_0^{1,5}\\&=3{,}6-9+6\\&=0{,}6\end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen aux consultations est de 0,6 h soit 36 minutes.

5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I, J_1 et J_2 deux intervalles de I tel que $P(X\in J_1)\neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement $X\in J_2$ sachant que l'évènement $X\in J_1$ est réalisé est :

$$P_{X\in J_1}(X\in J_2)=\frac{P(X\in J_1\cap J_2)}{P(X\in J_1)}$$

EXEMPLE

Calculons la probabilité que le temps d'attente d'une personne soit inférieur à une heure sachant qu'elle a patienté plus d'une demi-heure.
Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_{X>0,5}(X<1)$. $J_1=]0{,}5;1{,}5]$, $J_2=[0;1[$ et $J_1\cap J_2=]0{,}5;1[$ d'où

$$P_{X>0,5}(X<1)=\frac{P(0{,}5<X<1)}{P(X>0{,}5)}=\frac{\frac{13}{27}}{\frac{16}{27}}=\frac{13}{16}=0{,}8125$$

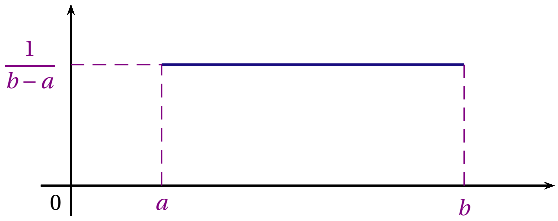
Ainsi, la probabilité que le temps d'attente d'une personne qui a patienté plus d'une demi-heure soit inférieur à une heure est égale à 0,8125.

III LOI UNIFORME

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

— f est continue et positive sur $[a;b]$.

— $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

❊ DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} P(c \leqslant X \leqslant d) &= \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d \\ &= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

❊ DÉMONSTRATION

Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0{,}5;9{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{1}{9{,}5-0{,}5}=\dfrac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X\leqslant 2)=\dfrac{2-0{,}5}{9}=\dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X\geqslant 3)=\dfrac{9{,}5-3}{9}=\dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T)=\dfrac{0{,}5+9{,}5}{2}=5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

IV LOI NORMALE

1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE

RAPPEL

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.
L'espérance mathématique est $E(X)=np$; l'écart-type est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

LA FONCTION DE GAUSS

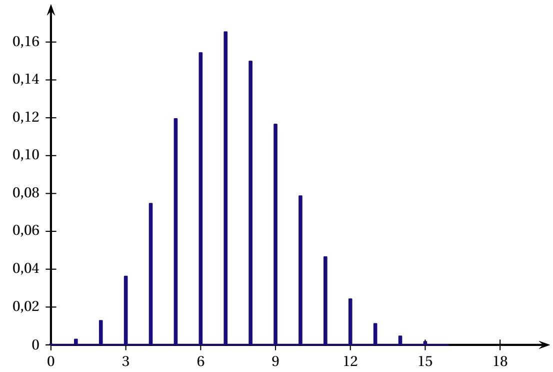
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p.
On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n=\dfrac{X_n-E(X_n)}{\sigma_n}=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes :

$$z_k=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0\leqslant k\leqslant n$$

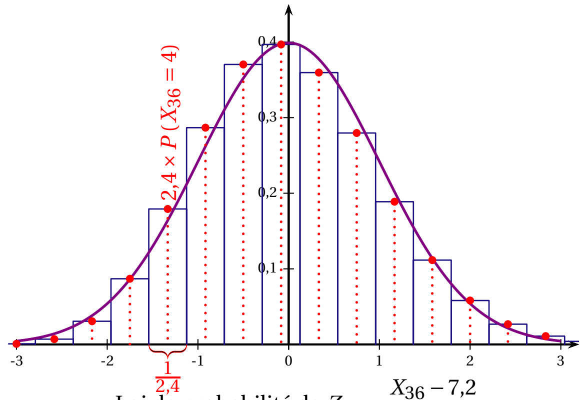
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :

$$P(Z_n=z_k)=P\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=P(X_n=k)=p_k$$

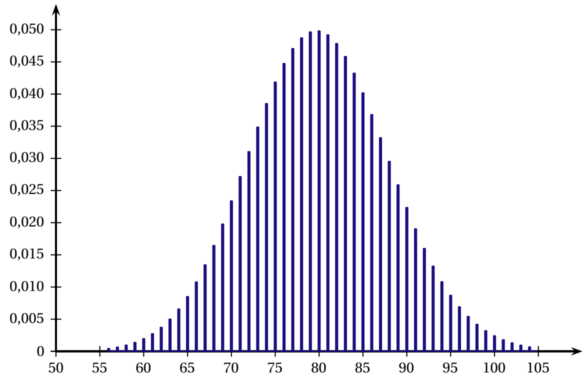
Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k, alors Z_n prend la valeur $\dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k.
On a représenté graphiquement ci-dessous, pour $X_n\in[E(X_n)-3\sigma_n;E(X_n)+3\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n=36$ et $n=400$ avec $p=0{,}2$.
La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n=z_k)=p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n\times P(X_n=k)$ et $\dfrac{1}{\sigma_n}$.



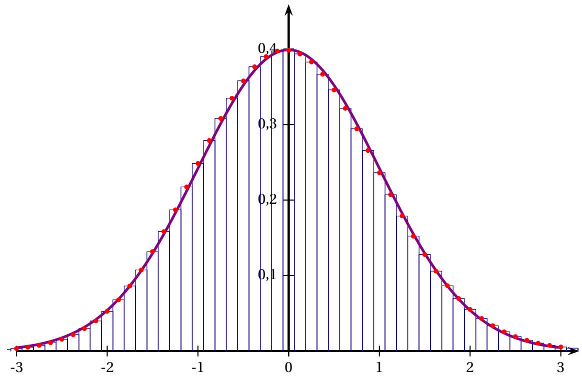
Loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0,2$



Loi de probabilité de $Z_{36} = \dfrac{X_{36} - 7,2}{2,4}$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,2$



Loi de probabilité de $Z_{400} = \dfrac{X_{400} - 80}{8}$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction de Gauss :

$$P(a \leqslant Z_n \leqslant b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

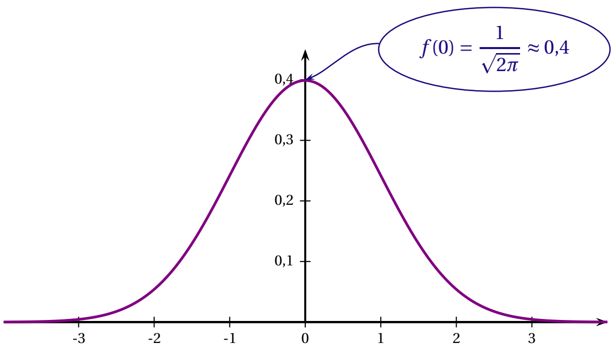
2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



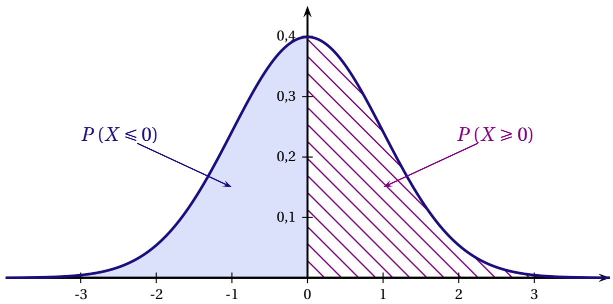
ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

PROPRIÉTÉ

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales, d'où $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0)$.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$

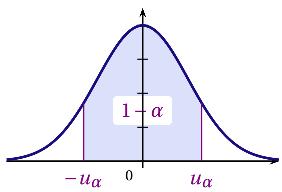


Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

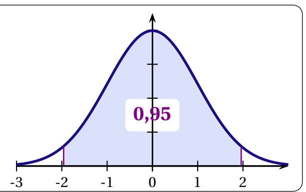
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$$

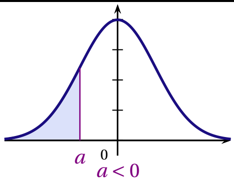
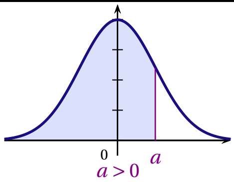
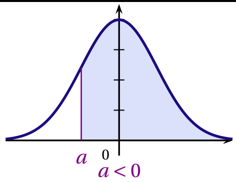
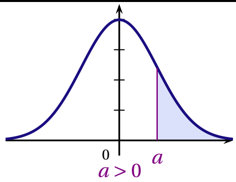


CALCULS

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(X \geqslant a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a<0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a>0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a<0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a>0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5-P(a<X<0)$	$0{,}5+P(0<X \leqslant a)$	$0{,}5+P(a \leqslant X<0)$	$0{,}5-P(0<X<a)$

3 LOI NORMALE

DÉFINITION

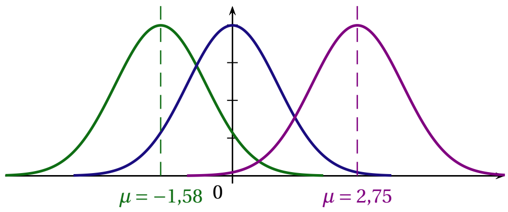
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

REMARQUES :

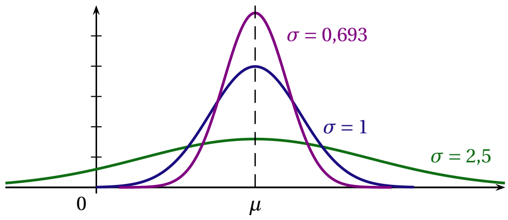
— Si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors sa variance $V(X)=\sigma^2$.

— La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

— L'espérance μ de la loi normale est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\mu$.



— L'écart-type $\sigma>0$ de la loi normale est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.



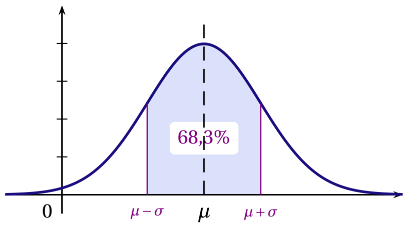
INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE

Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

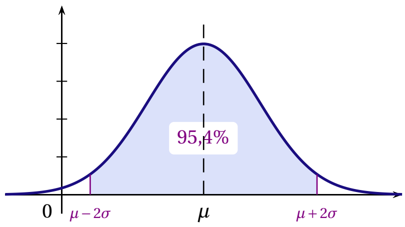
— $P\left(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\right) \approx 0{,}683$.

— $P\left(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma\right) \approx 0{,}954$.

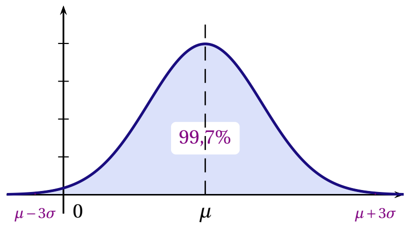
— $P\left(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma\right) \approx 0{,}997$.



$X \in [\mu-\sigma;\mu+\sigma]$



$X \in [\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$



$X \in [\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$

LOI NORMALE ET CALCULATRICES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a \leqslant X \leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	normalFrep(a,b,μ,σ) ou normalCdf(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd normCD(a,b,σ,μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leqslant k) = \alpha$	FracNormale(α,μ,σ) ou invNorm(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN InvNormCD(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

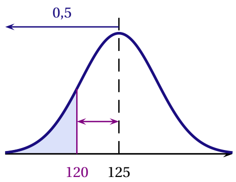
EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;20{,}25)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

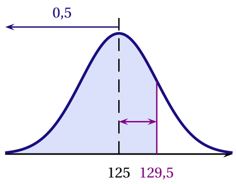
1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \leqslant 129{,}5)$; $P(X \geqslant 130{,}4)$; $P(X \geqslant 118{,}7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0{,}02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0{,}81$.

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0{,}495$.

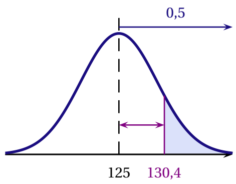
   b)
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0{,}5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}133 \end{aligned}$$



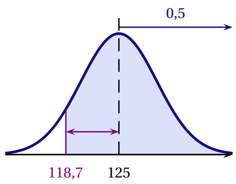
   c)
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 129{,}5) &= P(X \leqslant 125) + P(125 < X \leqslant 129{,}5) \\ &= 0{,}5 + P(125 < X \leqslant 129{,}5) \\ &\approx 0{,}841 \end{aligned}$$



   d)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130{,}4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &= 0{,}5 - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &\approx 0{,}115 \end{aligned}$$



   e)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118{,}7) &= P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0{,}5 + P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}919 \end{aligned}$$

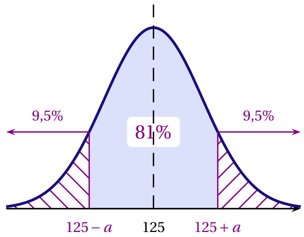


2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0{,}871$ pour $a \approx 130{,}09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or

$$P(X \geqslant b) = 0{,}02 \iff 1 - P(X < b) = 0{,}02 \iff P(X < b) = 0{,}98$$

   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134{,}242$.
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(125;4{,}5^2\right)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
On en déduit que :



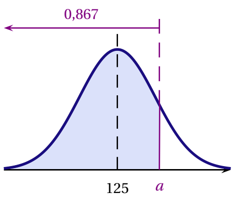
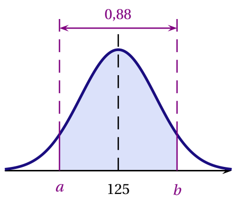
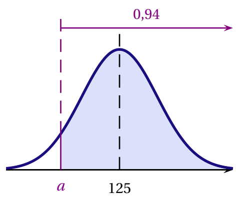
$$P\,(125-a \leqslant X \leqslant 125+a) = 0{,}81 \iff 1-2\times P\,(X<125-a) = 0{,}81$$
$$\iff P\,(X<125-a) = \frac{1-0{,}81}{2} = 0{,}095$$

Soit en utilisant la calculatrice $125-a \approx 119{,}102$ d'où $a \approx 5{,}898$ et $125+a \approx 130{,}898$.
Donc $I = [119{,}102;130{,}898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119{,}1;130{,}9]$)

REMARQUE

Trouver l'intervalle associé à une probabilité donnée avec la calculatrice **TI-83** Premium CE (système d'exploitation 5.3)
La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}5$

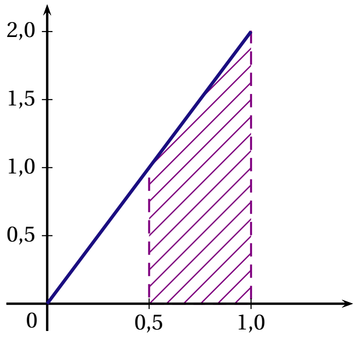
Menu 2nde puis sur la touche distrib var option 3 : invNormale (

$P\,(X \leqslant a) = 0{,}867$	$P\,(a \leqslant X \leqslant b) = 0{,}88$	$P\,(X \geqslant a) = 0{,}94$
		
invNormale aire : 0.867 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR DROIT	invNormale aire : 0.88 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR DROIT	invNormale aire : 0.94 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR DROIT
$a \approx 130$	$a \approx 118$ et $b \approx 132$	$a \approx 118$

EXERCICE 1

(*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2016*)

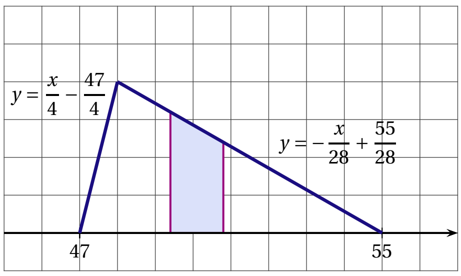
La fonction f est définie sur $[0;1]$ par $f(x)=2x$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f.
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1. a) Quelle est la valeur, en unité d'aire, de la surface hachurée ? Préciser la démarche utilisée.
   b) Interpréter ce résultat en terme de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47;55]$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{47}{4} & \text{si } 47 \leqslant x < 48 \\ -\dfrac{x}{28}+\dfrac{55}{28} & \text{si } 48 \leqslant x \leqslant 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47;55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
   On a $C \in [47;55]$.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49{,}4;50{,}8]$.
   b) Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum ?
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable C. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{0{,}5x}}{2}\,dx$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\dfrac{e^{0{,}5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1{,}2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

EXERCICE 4

On s'intéresse à la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

1. a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction ln.

   b) Trouver un nombre réel $a>1$ tel que $\displaystyle\int_1^a \ln x\,\mathrm{d}x=1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;a]$.

2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1\,;a]$.

   a) Calculer $p(X\leqslant 2)$.

   b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

EXERCICE 5

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

EXERCICE 6

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?
2. Calculer la probabilité que le point M :

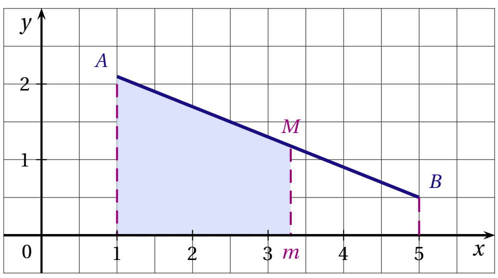
   a) soit le milieu I du segment $[AB]$;

   b) soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;

   c) soit plus près du point B que du milieu I.

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le segment $[AB]$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1;5]$ par $f(x)=-0{,}4x+2{,}5$. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note m son abscisse.



1. Soit E l'évènement « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$ est inférieure à 4 ».

   a) Justifier que la situation relève d'une loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ que l'on précisera.

   b) Calculer la probabilité de l'évènement E.

2. Calculer la probabilité de l'évènement F « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=m$ est supérieure à 1 ».

EXERCICE 8

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X. Quelle est son espérance mathématique ?
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-240}{12}$ par la loi normale centrée réduite. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $P(225 \leqslant X \leqslant 270) = P(-1,25 \leqslant Z \leqslant 2,5)$.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270 ?
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

EXERCICE 9

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(180;10,5^2\right)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(170 \leqslant X \leqslant 200)$; $P(X \leqslant 150)$; $P(X \geqslant 160)$; $P(X \geqslant 190)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X < a) = 0,875$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 10

L'admission en première année d'un groupe d'écoles a lieu après une épreuve écrite et une épreuve orale selon les modalités suivantes :

— À l'issue de l'épreuve écrite, 60% des candidats sont déclarés admissibles à l'oral.
— $\dfrac{1}{3}$ des candidats admissibles sont admis à la fin de l'épreuve orale.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat soit admis.
2. On suppose que n candidats se sont inscrits.
   a) Déterminer en fonction de n, la probabilité p_n qu'au moins un candidat soit admis.
   b) Quel est le plus petit nombre n de candidats inscrits pour que $p_n > 0,999$?
3. Les épreuves d'admission ont lieu dans plusieurs centres, chaque centre gérant l'admission d'un groupe de 225 candidats.
   On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 225 candidats associe le nombre de candidats admis.
   On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 6$.
   a) Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit compris entre 35 et 60.
   b) Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit inférieur à 30.

EXERCICE 11

PARTIE A

Un magasin vend deux sortes d'articles électroménager ou informatique. Pour chaque article une extension de garantie est proposée lors de l'achat.
Une étude statistique sur les factures des ventes réalisées a permis d'établir que :

— L'électroménager représente 40 % des ventes.

— L'extension de garantie a été souscrite pour 12 % des appareils d'électroménager vendus et pour 24 % des appareils du rayon informatique vendus.

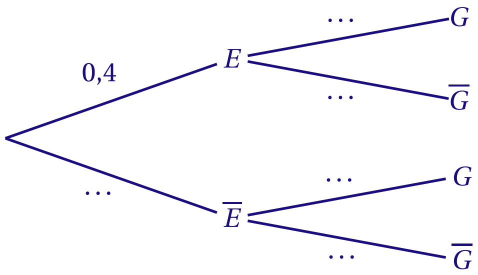
On prélève au hasard la facture d'un appareil vendu. On note :

— E l'évènement « la facture est celle d'un appareil électroménager »

— G l'évènement « une extension de garantie a été souscrite »

On rappelle que si A et B sont deux évènements, la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2. Calculer la probabilité que la facture choisie soit celle d'un appareil électroménager vendu avec une extension de garantie.
3. Montrer que $P(G) = 0{,}192$.
4. Calculer $P_G(\overline{E})$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} près.

À la fin d'un mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures, associe son montant en euros.
On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 125$.

1. Calculer $P(400 \leqslant M \leqslant 900)$.
2. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 300 euros le magasin propose le paiement en trois fois sans frais.

   Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais.

EXERCICE 12

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Pour contacter une compagnie d'assurance, deux possibilités sont offertes :

— se rendre en agence ;

— à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients qui se rendent à l'agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.
À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

— 380 se sont rendus en agence ;

— parmi les clients qui se sont rendus en agence, 95 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil ;

— parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'ils n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

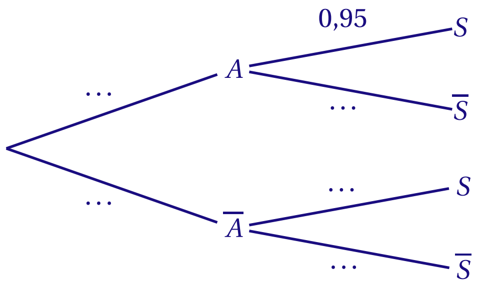
On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

— A : « Le client s'est rendu en agence »

— S : « Le client est satisfait de l'accueil »

On rappelle que l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$, que la probabilité de l'évènement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $P_B(A)$.
Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-3}, si nécessaire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
3. Montrer que la probabilité de S est 0,888.
4. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

PARTIE B

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros.
L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres ?
2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.
3. Calculer $P(X > 1000)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2}.
4. À l'aide de la calculatrice, estimer la valeur du nombre réel a, arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geqslant a) = 0{,}04$.
   Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 13

(D'après sujet bac Amérique du Nord 2017)

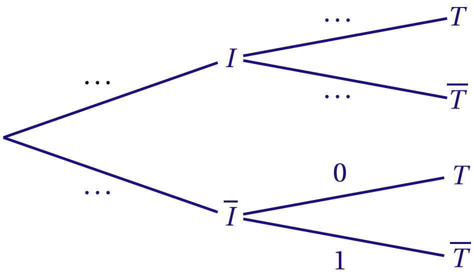
D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.
On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1er janvier 2016.
On considère les évènements :

— I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;

— T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

PARTIE A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

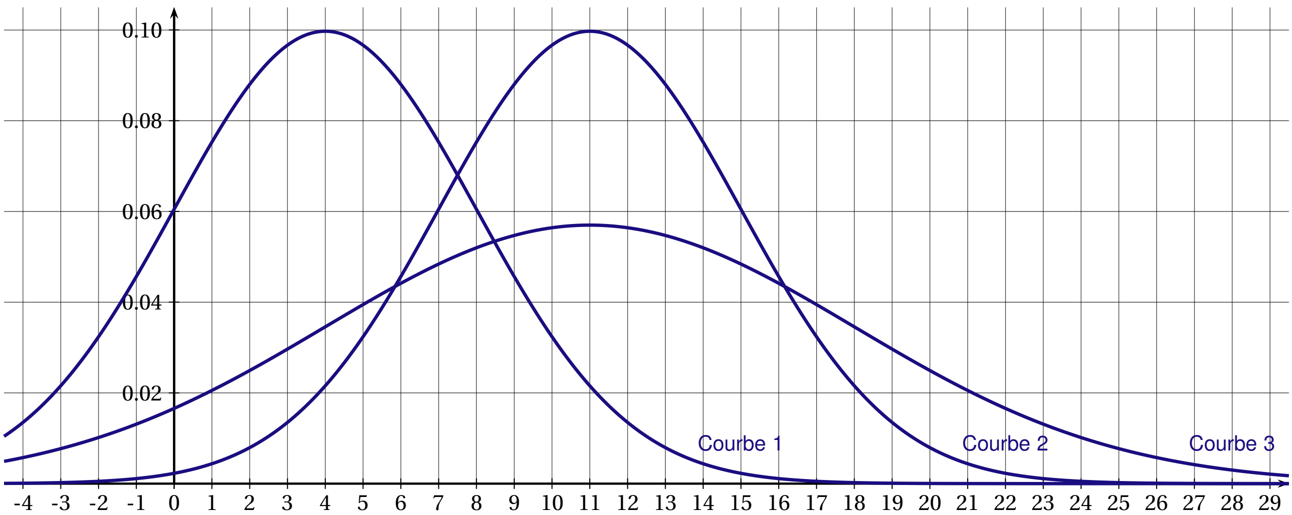


2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
3. Montrer que $p(T) = 0{,}002$.

PARTIE B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



EXERCICE 14 (*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017*)

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.
Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.
Ils ont également constaté, en observant les années précédentes, que :

— 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course;

— 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course;

— 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

PARTIE A

À la fin de la course, on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis. On note :

— V l'évènement « Le coureur a choisi le parcours vert »;

— B l'évènement « Le coureur a choisi le parcours bleu »;

— R l'évènement « Le coureur a choisi le parcours rouge »;

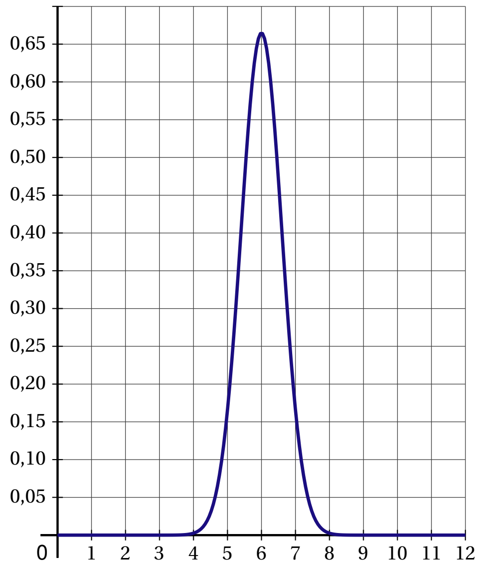
— A l'évènement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $V \cap A$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert?
4. Démontrer que $P(B \cap A) = 0{,}012$.
5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

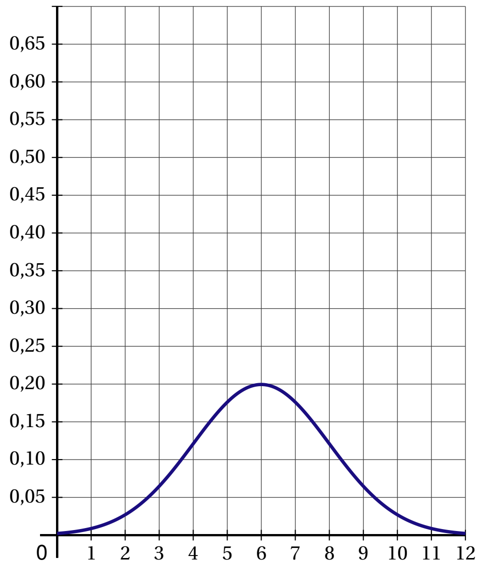
PARTIE B

Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



graphique 1



graphique 2

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.
   a) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h?

b) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?

EXERCICE 15

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

La compagnie aérienne Truc-Air utilise pour ses vols moyen-courriers des avions pouvant transporter 200 passagers.
Suite à une étude qui a permis d'établir que 10% des clients qui ont réservé un vol ne se présentent pas à l'embarquement, la direction commerciale a décidé de pratiquer le « surbooking ».

PARTIE A

La compagnie accepte pour un vol donné, 210 réservations.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$.
2. On choisit d'approcher la loi binomiale de X par une loi normale d'espérance $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X)$. Soit Y l'approximation normale de X.
   a) Déterminer $P(Y \leqslant 200)$.
   b) Déterminer un intervalle I de centre 189 tel que $P(Y \in I) \approx 0{,}95$.
3. La compagnie prend-elle un risque important en acceptant 210 réservations pour ce vol ?

PARTIE B

La compagnie accepte pour un vol donné n réservations.
On note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0{,}9)$.
On cherche à déterminer le nombre maximal de réservations pour que la probabilité de l'évènement « $X_n \leqslant 200$ » soit supérieure à 0,95.
On admet que la loi de probabilité de X_n peut être approchée par une loi normale d'espérance $\mu = E(X_n) = 0{,}9n$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X_n) = 0{,}3\sqrt{n}$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$ qui suit la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $X_n \leqslant 200$ équivaut à $Z_n \leqslant \dfrac{200 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$.
   b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-3} près, du réel k tel que $P(Z_n \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.
   c) En déduire que n est solution de l'inéquation $0{,}9n + 0{,}4935\sqrt{n} - 200 \leqslant 0$.
2. a) On pose $x = \sqrt{n}$ avec $x \geqslant 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $0{,}9x^2 + 0{,}4935x - 200 \leqslant 0$.
   b) En acceptant le risque maximum de 5% de voir plus de 200 passagers se présenter à l'embarquement, quel est le nombre maximal de réservations que cette compagnie peut prendre pour ce vol ?