I PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

1 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :
Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.
Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.
Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication?
Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ».

— 12% des articles ont a un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = 0{,}12$.

— 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = 0{,}06$ et $p(E) = 0{,}08$.

La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cup E) = p(F) + p(E) - p(F \cap E) \quad \text{d'où} \quad p(F \cap E) = 0{,}08 + 0{,}06 - 0{,}12 = 0{,}02$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2 FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?
Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;
Nous avons $p(V) = 0{,}85$ et $p_V(M) = 0{,}02$.
La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p(V \cap M) = 0{,}02 \times 0{,}85 = 0{,}017$$

II FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

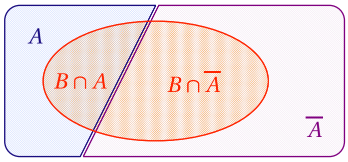
Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$



D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

2 PARTITION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

— Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
— Si les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = 1$$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

EXEMPLE

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

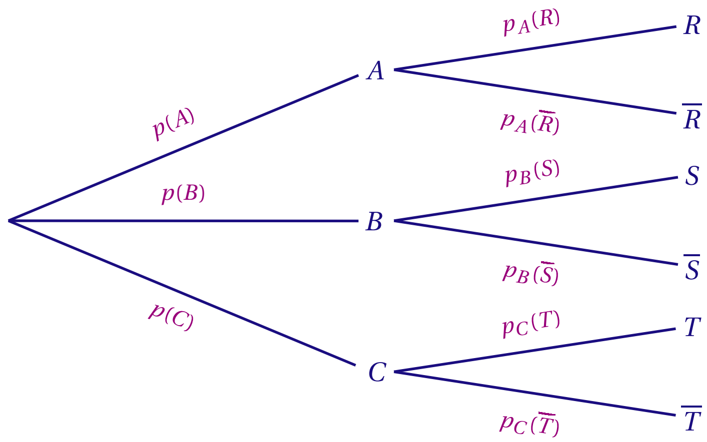
On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?
Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »
Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(S) + p_C(S) \times p(S) \\ &= 0{,}15 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

III REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



— La racine de l'arbre est l'univers Ω

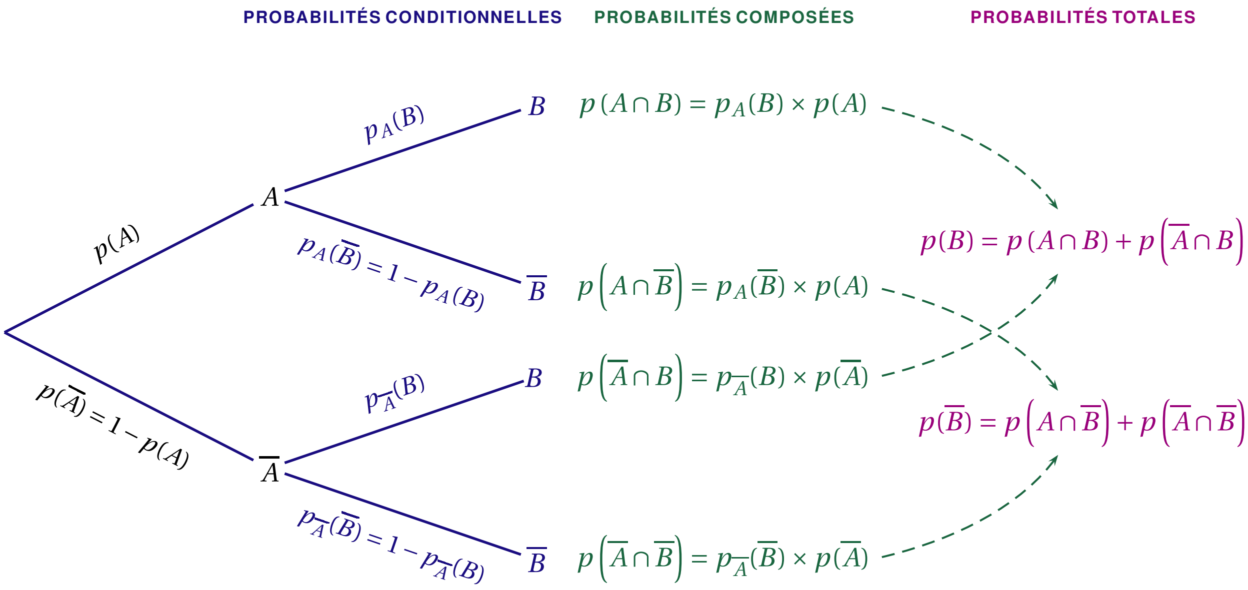
— Les évènements qui se trouvent aux extremités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A,B,C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S,\overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.

— Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.

— Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

RÈGLES

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
— La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.
— La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.



IV ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

1 INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 PROPRIÉTÉ

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$$

3 LOI BINOMIALE

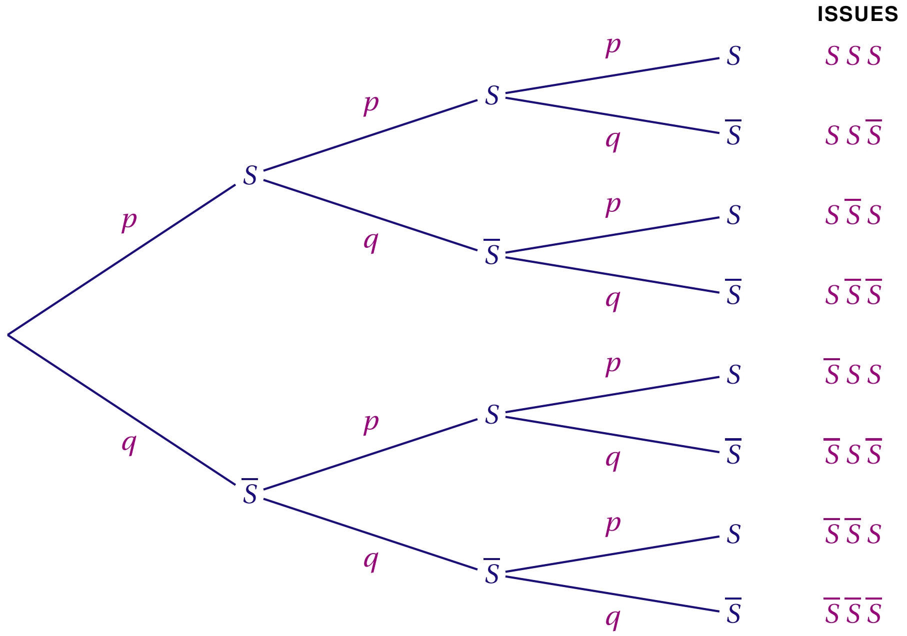
SCHÉMA DE BERNOULLI

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes s'appelle un schéma de Bernoulli.

EXEMPLE

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.
La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'echec est $p(\overline{S}) = 1 - p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{S\,S\,S;\ S\,S\,\overline{S};\ S\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,S\,S;\ S\,\overline{S}\,\overline{S};\ \overline{S}\,S\,\overline{S};\ \overline{S}\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

On répète successivement n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves de Bernoulli répétées.

Dans l'exemple précédent, il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins pour lesquels il y a deux succès

LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès de chaque épreuve est p.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
Cette loi est notée $\mathscr{B}(n;p)$. Elle est définie par :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$

Remarque :

L'évènement « obtenir au moins un succès » est l'évènement contraire de l'évènement F « obtenir n échecs consécutifs » d'où

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n$$

EXEMPLE

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathscr{B}(4;p)$ de paramètres 4 et p (avec $q = 1-p$) est :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	q^4	$4 \times p \times q^3$	$6 \times p^2 \times q^2$	$4 \times p^3 \times q$	p^4

EXERCICE 1

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

— 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test;

— 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test;

— 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.
2. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.

EXERCICE 2

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

— 12 % des bovins ont la maladie M;

— Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas;

— 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
   a) pour un animal d'être malade si il réagit au test;
   b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

EXERCICE 3

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

— 20 % des bovins d'un troupeau sont malades;

— 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif;

— 1 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 4

D'après une enquête sur le marché de l'emploi en France en 2016 :

— 51,8 % des personnes en emploi sont des hommes;

— 91,8 % des hommes en emploi travaillent à temps plein;

— 69,9 % des femmes en emploi travaillent à temps plein.

1. On consulte la fiche d'une personne en emploi en 2016.
   a) Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme qui travaille à temps partiel?
   b) Quelle est la probabilité que cette personne travaille à temps partiel?

2. On consulte la fiche d'une personne qui travaille à temps partiel, quelle est la probabilité que cette personne soit une femme?

EXERCICE 5

D'après une étude de la direction du tourisme concernant l'ensemble des résidents Français :
Est défini comme "voyage" , tout départ du domicile, retour à celui-ci avec au moins une nuit passée en dehors.
Ces voyages se décomposent en "séjours" de deux sortes :

- Séjours courts définis par le fait d'avoir passé entre une nuit et trois nuits en lieu fixe;
- Séjours longs définis par le fait d'avoir passé au moins quatre nuits en lieu fixe.

Le mode d'hébergement d'un séjour peut être marchand (hôtel, camping, gîte etc ...) ou non marchand.
On considère que sur l'ensemble des résidents Français qui ont effectué au moins un voyage :

— Les séjours courts représentent 55% de l'ensemble des séjours;
— 43% des séjours longs se font en hébergement marchand;
— 36,4% de l'ensemble des séjours se font en hébergement marchand.

On interroge au hasard, un résident Français ayant effectué un voyage et on note :

— L : « l'évènement la personne a fait un séjour long »;
— M : l'évènement « le mode d'hébergement du séjour est marchand »;

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long en hébergement marchand.
   b) En déduire la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour court en hébergement marchand.
4. Un résident Français effectue un séjour court, quelle est la probabilité qu'il choisisse un hébergement marchand?
5. On interroge au hasard, un résident Français ayant choisi un hébergement non marchand au cours de son séjour. Quelle est la probabilité que le séjour de cette personne soit un séjour long?

EXERCICE 6

PARTIE A

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 180 articles tirés de la production.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 180 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 180 articles le nombre d'articles défectueux.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a) « L'échantillon contient au moins un article défectueux »;
   b) « L'échantillon contient au plus six articles défectueux »;
   c) « L'échantillon contient plus de dix articles défectueux ».

PARTIE B

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

— sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,99 ;

— sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,96.

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.
On note les évènements suivants :

— D : « L'article présente des défauts » ;

— V : « L'article est mis en vente ».

$\overline{D}$ et $\overline{V}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements D et V.

1. a) Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.
   b) Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9615.
2. La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux.
   Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif?

EXERCICE 7

(*D'après sujet bac Antilles Septembre 2005*)

Dans cet exercice, A et B étant des évènements, $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A, $P(A)$ la probabilité de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

Une entreprise fabrique des appareils en grand nombre. Une étude statistique a permis de constater que 10 % des appareils fabriqués sont défectueux.
L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de ces appareils avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 80 % des appareils défectueux, mais il élimine également à tort 10 % des appareils non défectueux. Les appareils non éliminés sont alors mis en vente.
On prend au hasard un appareil fabriqué et on note D l'évènement « l'appareil est défectueux » et V l'évènement « l'appareil est mis en vente ».

1. Construire un arbre pondéré rendant compte de cette situation.
2. a) Calculer $P(V \cap D)$ et $P\left(V \cap \overline{D}\right)$.
   En déduire que la probabilité qu'un appareil fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,83.
   b) Calculer la probabilité qu'un appareil mis en vente après contrôle soit défectueux.
   c) Vérifier que $P_V(D) \approx 0{,}24 \times P(D)$.
   Rédiger une phrase comparant les probabilités pour un acheteur d'acquérir un appareil défectueux suivant que l'entreprise applique ou non le test de contrôle.
3. Une entreprise décide d'appliquer le contrôle, tout en continuant à fabriquer le même nombre d'appareils. Elle fabriquait et vendait une quantité q_0 d'appareils au prix p_0.
   Les pourcentages demandés seront arrondis à l'unité.
   a) Quelle est, en fonction de q_0 la nouvelle quantité q_1 d'appareils mis en vente après contrôle ?
   b) De quel pourcentage la quantité vendue a-t-elle diminué ?
   c) Quel doit être le nouveau prix p_1 (en fonction de p_0 pour que l'entreprise maintienne son chiffre d'affaires ?
   Quel est alors le pourcentage d'augmentation du prix de vente ?

EXERCICE 8

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité.
Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

PARTIE A

On choisit au hasard successivement cinq pièces. On suppose que le nombre de pièces est suffisamment important pour que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.

1. Calculer la probabilité qu'un seul des cinq articles soit sans défaut.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des cinq articles soit sans défaut.

PARTIE B

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b.
On note :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b » ;

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires respectifs de A et B.

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0{,}05$; $p(B) = 0{,}06$.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
2. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
3. On prélève au hasard un article parmi ceux qui présentent le défaut a. Calculer la probabilité que cet article présente également le défaut b.
4. Un article sans défaut est vendu à 150€. Un article qui présente seulement le défaut a est vendu avec une remise de 30%, un article qui présente seulement le défaut b est vendu avec une remise de 40% et un article qui a les deux défauts n'est pas vendu.
   a) Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X, d'un article.
   b) Quel chiffre d'affaires l'entreprise peut-elle espérer réaliser sur la vente de 1000 articles ?

EXERCICE 9

PARTIE A

L'étude réalisée pour une entreprise de matériel informatique sur l'utilisation d'un modèle A de disque dur externe de son catalogue a permis d'établir que :

— 65% des acquéreurs utilisent le disque dur avec un ordinateur portable.

— 40% des acquéreurs qui utilisent le disque dur avec un ordinateur portable le font pour un usage professionnel.

— 28% des acquéreurs utilisent le disque dur avec un ordinateur fixe et pour un usage professionnel.

On choisit au hasard la fiche d'un client ayant acheté ce modèle de disque dur et on note :

— M l'évènement : « le client utilise le disque dur avec un ordinateur portable » ;

— T l'évènement : « le client utilise le disque dur pour un usage professionnel ».

1. Calculer la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui fait un usage professionnel du disque dur externe sachant qu'il l'utilise avec un ordinateur fixe.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur portable et pour un usage professionnel ?
4. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel ?
5. La fiche est celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur fixe ?

PARTIE B

Cette entreprise commercialise également un modèle B de disque dur mécanique. L'utilisation de ce modèle sur des serveurs a permis d'établir un taux de défaillance annuel de 2%.
Un client commande 50 disques durs du modèle B. Le nombre de disques durs fabriqués est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler le choix des 50 disques durs à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre disques durs susceptibles d'être en panne pendant l'année.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $P(X = 1)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des disques durs achetés présente une défaillance au cours de l'année ?

EXERCICE 10

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2017*)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.
À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.
Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

— A : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;
— R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

On rappelle que si E est un évènement, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. On choisit au hasard un client de l'agence.
   a) Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.
   b) Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.
3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.
   On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.
   a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   b) Déterminer la probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.
   c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.
4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.
   On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat.

EXERCICE 11

Avec 84,5 millions d'arrivées de visiteurs internationaux en 2015, la France est le pays le plus visité au monde.
Si on s'intéresse aux personnes résidentes à l'étranger qui sont en visite en France, on définit les notions suivantes :

— Les touristes sont les visiteurs non résidents passant au moins une nuit en France.

— Les excursionnistes sont les visiteurs non résidents qui ne passent pas de nuit en France.

Une enquête réalisée auprès des visiteurs résidents à l'étranger à leur sortie du territoire métropolitain a permis d'établir que :

— 79,2 % des visiteurs résident en Europe.

— Un tiers des visiteurs résidents européen sont touristes et les trois quarts des résidents non européens sont touristes.

On interroge au hasard un visiteur résident à l'étranger à sa sortie du territoire et on note :

— E l'évènement « le visiteur réside en Europe » ;

— T l'évènement « le visiteur est un touriste ».

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le visiteur réside en Europe et soit un touriste.
3. Montrer que la probabilité que le visiteur soit un touriste est égale à 0,42.
4. Le visiteur interrogé est un touriste, calculer la probabilité, arrondie au millième près, que ce touriste réside en Europe.

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats seront arrondis si nécessaire au millième près.

L'enquête a permis d'établir que 8,4% des touristes résident en Amérique.
On a interrogé au hasard trente touristes à leur sortie du territoire métropolitain.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de touristes résidents en Amérique.

1. On considère que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner la probabilité $P(X = 2)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des touristes interrogés réside en Amérique ?

EXERCICE 12

Une entreprise agroalimentaire fabrique des plats cuisinés destinés à la consommation. Ces préparations culinaires sont d'abord conditionnées dans des emballages sous vide puis étiquetées.
Le conditionnement de ces préparations peut présenter deux défauts : un emballage sous vide défectueux ou l'absence de la date limite de consommation sur l'étiquette.

PARTIE A

Une étude statistique a permis de constater que :

— 6 % des préparations ne sont pas correctement emballées ;

— la date limite de consommation est absente sur l'étiquette de 18 % des préparations qui ne sont pas correctement emballées et sur 3 % des préparations correctement emballées.

On prélève au hasard une préparation destinée à la vente et on considère les évènements suivants :

— E : « le plat est correctement emballé » ;

— D : « l'étiquette comporte une date limite de consommation ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap \overline{D}$.
2. Montrer que la probabilité d'une date limite de consommation absente sur l'étiquette est égale à 0,039.
3. La date limite de consommation ne figure pas sur l'étiquette, quelle est la probabilité que la préparation soit correctement emballée ?

PARTIE B

Les préparations culinaires correctement emballées sont commercialisées par l'entreprise.
On rappelle que parmi celles-ci, 3 % n'ont pas de date limite de consommation.

Un supermarché passe une commande de 60 plats cuisinés. Le stock est suffisamment important pour assimiler cette commande à un tirage aléatoire avec remise.
Pour un lot de 60 préparations, on note X la variable aléatoire égale au nombre de préparations sur lesquelles on note l'absence de date limite de consommation.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité $P(X=0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

   b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geqslant 1)$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geqslant 6)$.

EXERCICE 13

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si nécessaire à 10^{-4} près.

D'après un document de l'Assurance Maladie concernant les accidents du travail de l'année 2015 on constate que :

— L'indice de fréquence des accidents du travail pour l'ensemble des salariés est de 33,9 accidents du travail pour 1000 salariés.

— Avec 8 % des salariés, la branche d'activité du Bâtiment et travaux publics est celle qui a l'indice de fréquence des accidents du travail le plus fort (61,9 accidents du travail pour 1000 salariés).

On consulte au hasard le dossier d'assurance maladie d'un salarié et on note :

— B l'évènement « le dossier est celui d'un salarié du Bâtiment » ;

— A l'évènement « le dossier est celui d'un salarié victime d'un accident du travail ».

PARTIE A

1. Donner les probabilités suivantes $P(A)$, $P(B)$ et $P_B(A)$.
2. Calculer la probabilité que le dossier soit celui d'un salarié du Bâtiment victime d'un accident du travail.
3. Le dossier est celui d'un salarié victime d'un accident du travail. Quelle est la probabilité que ce soit celui d'un salarié du Bâtiment ?

PARTIE B

Lors d'un accident du travail, un taux d'incapacité permanente supérieur à 10 % ($IP \geqslant 10\%$) a pour conséquence l'attribution d'une rente.
En 2015, 2,7% des accidents du travail ont donné droit à l'attribution d'une rente.

On consulte au hasard cent dossiers de salariés ayant eu un accident du travail en 2015.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de dossiers donnant droit à l'attribution d'une rente.

1. On considère que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner la probabilité qu'au plus trois dossiers donnent droit à l'attribution d'une rente.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins six dossiers donnent droit à l'attribution d'une rente.

EXERCICE 14

Une entreprise produit en grande quantité des composants électroniques destinés à l'industrie.
Un contrôle de qualité a permis d'établir que les composants fabriqués pouvaient présenter au maximum deux défauts : la puce électronique est défectueuse ou un défaut d'assemblage.
On a constaté d'autre part, que 1,6 % des composants fabriqués avaient une puce électronique défectueuse et que 3,5 % des composants dont la puce n'est pas défectueuse présentaient un défaut d'assemblage.
Si le composant ne présente aucun défaut, on dit qu'il est conforme. Sinon, le composant est dit hors d'usage.

PARTIE A

On prélève au hasard un composant produit par cette entreprise. Tous les composants ont la même probabilité d'être prélevés.
On note :

— D l'évènement « la puce électronique est défectueuse » ;

— C l'évènement « le composant est conforme ».

Calculer la probabilité arrondie à 10^{-3} près de la probabilité que le composant soit hors d'usage.

PARTIE B

On prélève 100 composants au hasard. La production est suffisamment importante pour assimiler ce choix de 100 composants à un tirage avec remise de 100 composants.
On suppose que la probabilité qu'un composant soit hors d'usage est 0,05.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 composants, associe le nombre de composants hors d'usage.

1. a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
   b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
2. Calculer la probabilité de l'évènement A : « tous les composants prélevés sont conformes ».
3. Calculer la probabilité $P(X=5)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
4. Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins deux composants prélevés sont hors d'usage ».
5. On constate que dans cet échantillon, 8 composants sont hors d'usage.
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
   b) Peut-on rejeter l'hypothèse que 5 % des composants fabriqués sont hors d'usage ?

Rappel :

Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence correspondant à la réalisation sur un échantillon de taille n, d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où : a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$; b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

EXERCICE 15

Une usine fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces métalliques pour l'industrie.

PARTIE A

Les pièces sont fabriquées par deux machines a et b.
On considère que 2 % des pièces produites par la machine a sont défectueuses et que 7 % des pièces produites la machine b sont défectueuses.
La machine a plus récente assure 80 % de la production quotidienne.
On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des pièces produites par les deux machines pendant une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les évènements suivants :

— A : « la pièce prélevée a été fabriquée par la machine a » ;

— D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité que la pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse et qu'elle ait été fabriquée par la machine a.
2. En déduire la probabilité que la pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse.
3. La pièce prélevée au hasard dans la production de la journée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine a ?

PARTIE B

On considère un stock important de pièces métalliques. On admet que 3 % des pièces de ce stock sont défectueuses.
On prélève au hasard 200 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Que représente ce nombre ?
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer :
   a) la probabilité que dans un tel prélèvement on trouve moins de six pièces défectueuses ;
   b) la probabilité que dans un tel prélèvement on trouve plus de dix pièces défectueuses.
5. Ci-dessous est donné un extrait du tableau donnant les valeurs des probabilités $P(X \leqslant k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0;200]$.

k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$
0	0,002 26	6	0,606 32	12	0,992 17
1	0,016 25	7	0,746 10	13	0,996 90
2	0,059 29	8	0,850 40	14	0,998 85
3	0,147 15	9	0,919 22	15	0,999 60
4	0,280 98	10	0,959 87	16	0,999 87
5	0,443 23	11	0,981 59	17	0,999 96

   a) Déterminer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 200 soit compris entre 3 et 8.
   b) Calculer $P_{3\leqslant X\leqslant 8}(X \geqslant 6)$. Interpréter le résultat.
   c) Dans ce lot, on trouve neuf pièces défectueuses. Faut-il remettre en question l'hypothèse selon laquelle 3 % des pièces de ce stock sont défectueuses ?