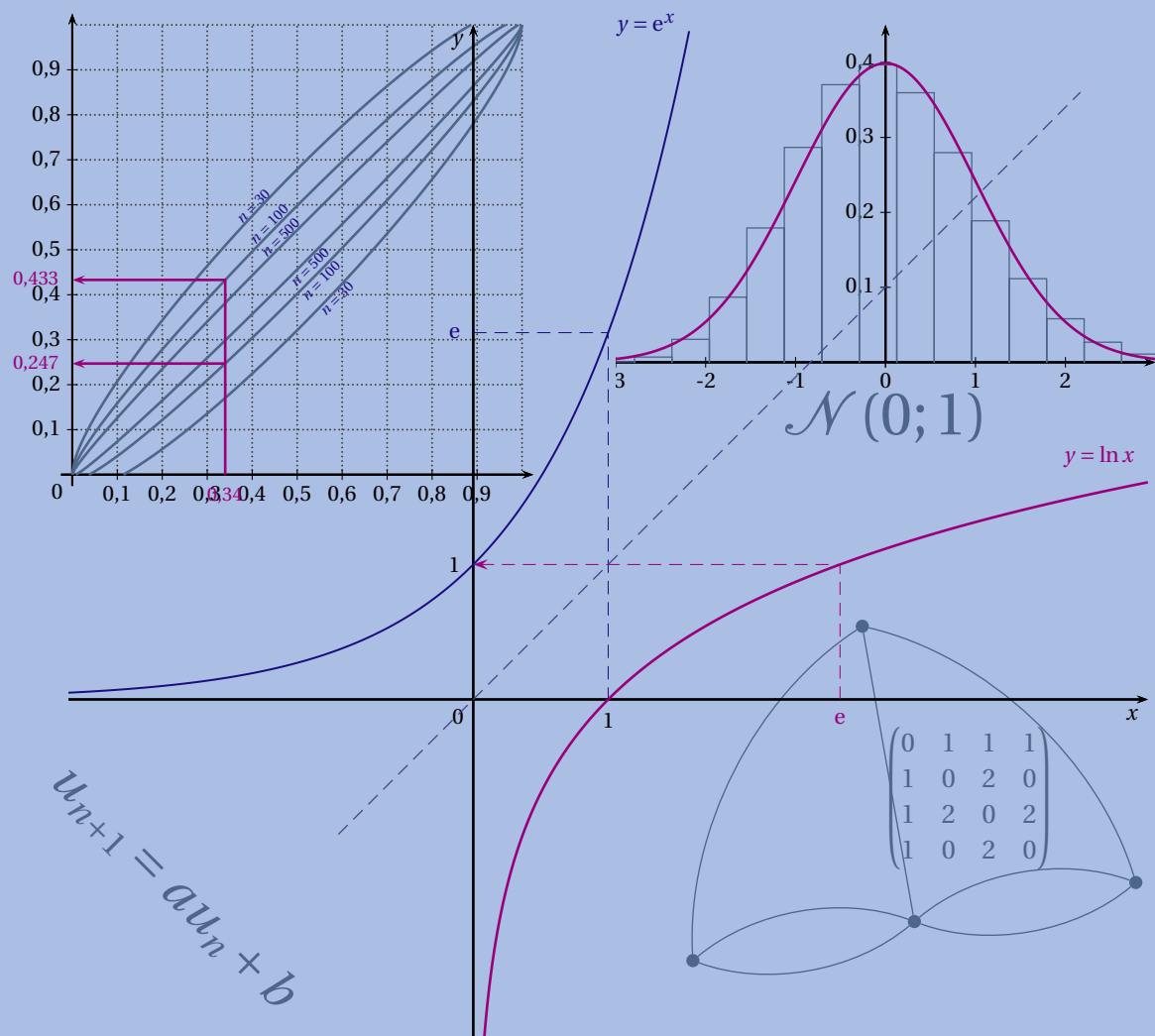


T^{le} ES

MATHÉMATIQUES

Enseignement spécifique et de spécialité



Documents distribués aux élèves de T^{le} ES 4 et au regroupement T^{le} ES - L en cours d'année.

Janson de Sailly (année 2017-2018)

A. YALLOUZ

TABLE DES MATIÈRES

I	ENSEIGNEMENT ES OBLIGATOIRE ET L SPÉCIALITÉ	1
1	Compléments sur les suites	2
I	Suites géométriques	3
1	Définition	3
2	Propriété 1	3
3	Propriété 2	4
4	Monotonie	4
5	Somme de termes consécutifs	4
II	Limite d'une suite	5
1	Limite infinie	5
2	Limite finie	6
3	Limites d'une suite géométrique	6
III	Suites arithmético-géométriques	8
1	Définition	8
2	Étudier une suite arithmético-géométrique	8
	Exercices	11
2	Dérivation, continuité et convexité	21
I	dérivées	22
1	Tangente à une courbe	22
2	Dérivées des fonctions de référence	22
3	Dérivées et opérations	22
4	Dérivée et variations d'une fonction	23
	exemple	24
II	continuité	25
1	notion de continuité	25
2	propriétés	25
III	continuité et équation	26
1	THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES	26
2	théorème de la valeur intermédiaire	26
IV	convexité	27
1	fonction convexe, fonction concave	27
2	point d'inflexion	28
	Exercices	30
3	Fonction exponentielle	40
	Activités : Introduction	41
I	fonctions exponentielles de base q	43
1	fonctions exponentielles $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$	43
2	sens de variation	44
3	propriétés	44

II	la fonction exponentielle	45
1	définition	45
2	dérivée de la fonction exponentielle	45
3	variation	46
4	courbe représentative	46
III	exponentielle d'une fonction : $\exp(u)$	47
1	dérivée	47
2	variation	48
	Exercices	49
4	Probabilités discrètes	60
I	probabilités conditionnelles	61
1	définition	61
2	formule des probabilités composées	61
II	formule des probabilités totales	62
1	cas de deux évènements	62
2	partition	62
3	formule des probabilités totales	62
III	représentation sous forme d'un arbre pondéré	63
IV	évènements indépendants	64
1	indépendance de deux évènements	64
2	propriété	64
3	loi binomiale	64
	Exercices	66
5	Fonction logarithme	75
I	fonction logarithme népérien	76
1	définition	76
2	conséquences immédiates	76
3	variation	77
II	propriétés algébriques	77
1	propriété fondamentale	77
2	autres règles de calcul	78
III	étude de la fonction logarithme népérien	78
1	dérivée	78
2	variation	78
3	courbe représentative	79
	Exercices	80
6	Calcul intégral	90
I	intégrale et aire	93
1	unité d'aire	93
2	intégrale d'une fonction continue et positive	93
3	intégrale d'une fonction continue et négative	95
4	lien entre intégrale et dérivée	95
II	primitives d'une fonction continue	96
1	définition	96
2	ensemble des primitives d'une fonction	96
3	primitive vérifiant une condition	97
III	calcul de primitives	97
1	primitives des fonctions usuelles	97
2	linéarité	97
3	primitives des formes usuelles	98

IV	intégrale d'une fonction continue	98
1	définition	98
2	premières propriétés	99
V	propriétés de l'intégrale	99
1	positivité	99
2	linéarité	99
3	relation de Chasles	100
4	ordre	100
VI	intégrale et moyenne	101
1	inégalités de la moyenne	101
2	valeur moyenne	102
	Exercices	103
7	Lois de probabilité à densité	112
I	introduction	113
II	densité de probabilité et loi de probabilité	114
1	variable aléatoire continue	114
2	fonction de densité	114
3	loi de probabilité	114
4	espérance mathématique	115
5	probabilité conditionnelle	115
III	loi uniforme	115
1	définition	115
2	propriété	116
3	espérance mathématique	116
IV	loi normale	117
1	vers une approximation de la loi binomiale	117
2	loi normale centrée réduite	118
3	loi normale	120
	Exercices	123
8	Échantillonnage et estimation	130
I	fluctuation d'échantillonnage	131
1	intervalle de fluctuation au seuil de 95%	131
2	intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%	131
3	décision à partir de la fréquence d'un échantillon	132
II	intervalle de confiance	133
1	définition	133
	Exercices	135
II	ENSEIGNEMENT ES SPÉCIALITÉ	142
1	Matrices	143
	Activités : Introduction	144
I	définitions	145
1	matrice	145
2	cas particuliers	145
3	égalité de deux matrices	145
II	matrices et opérations	146
1	transposée d'une matrice	146
2	addition de matrices	146
3	multiplication par un réel	146
4	produit de matrices	147

5	propriétés	148
III	matrices carrées	149
1	matrice identité	149
2	puissances d'une matrice carrée	149
3	inverse d'une matrice carrée	150
4	application aux systèmes linéaires	150
5	Compléments (<i>hors programme</i>)	151
	Exercices	154
2	Introduction à la théorie des graphes	160
I	graphes premières définitions	161
1	définitions	161
2	degré d'un sommet	162
3	représentation matricielle d'un graphe	164
4	graphes isomorphes	164
II	chaînes, cycles ; connexité	167
1	définitions	167
2	chaînes de longueur donnée	167
3	connexité	168
4	cycle eulérien	169
	Exercices	172
3	Graphes : plus court chemin	178
I	graphe pondéré	179
1	définition	179
2	longueur d'un chemin	179
II	algorithme de dijkstra	179
	Exercices	182
4	Graphes probabilistes	187
	Activité	188
I	définitions	189
1	graphe probabiliste	189
2	matrice de transition	189
3	état probabiliste	189
II	évolution d'un état au cours du temps	190
1	proposition	190
2	théorème	190
3	état stable	190
4	propriété	191
	Exercices	193
	LES CONTRÔLES (2017-2018)	199
	DST T^{le} ES 4 (spé math)	200
	Contrôle du 26 septembre 2017	201
	Contrôle du 17 octobre 2017	203
	Contrôle du 21 novembre 2017	205
	Contrôle du 19 décembre 2017	207
	Contrôle du 23 janvier 2018	210
	Contrôle du 13 février 2018	212

DST regroupement T^{le} ES-L	215
Contrôle ES-L du 29 septembre 2017	216
Contrôle ES-L du 20 octobre 2017	218
Contrôle ES-L du 23 novembre 2017	220
Contrôle ES-L du 21 décembre 2017	221
Contrôle ES-L du 1 ^{er} février 2018	223
Contrôle ES-L du 15 février 2018	226
 DST communs T^{le} ES et T^{le} L	 228
Contrôle du 9 Mars 2018	229
Contrôle du 12 avril 2018	234
Contrôle du 24 mai 2018	238

PREMIÈRE PARTIE

ENSEIGNEMENT ES OBLIGATOIRE ET L SPÉCIALITÉ

Chapitre 1

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES

I	SUITES GÉOMÉTRIQUES	3
1	Définition	3
2	Propriété 1	3
3	Propriété 2	4
4	Monotonie	4
5	Somme de termes consécutifs	4
II	LIMITE D'UNE SUITE	5
1	Limite infinie	5
2	Limite finie	6
3	Limites d'une suite géométrique	6
III	SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES	8
1	Définition	8
2	Étudier une suite arithmético-géométrique	8
	EXERCICES	11

I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1 - \frac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.

On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1,01 \times C_n$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1,01$.

2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.

On note r_n la quantité de rejets l'année 2012 + n d'où :

$$r_{n+1} = r_n \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0,96 \times r_n$$

Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n ,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans?

Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0,96^{10} \approx 33242$$

Avec une réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 PROPRIÉTÉ 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p ,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

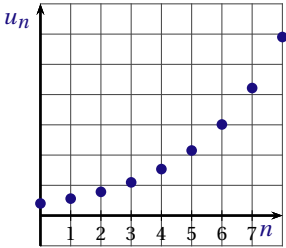
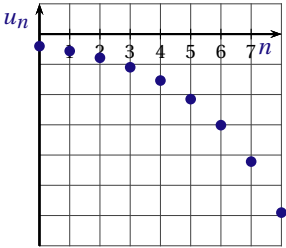
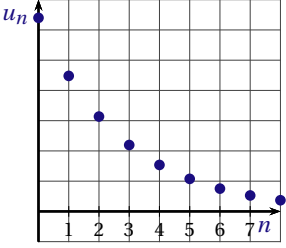
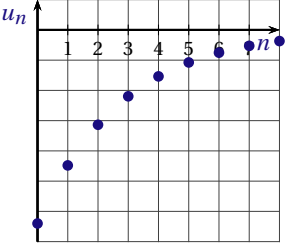
4 MONOTONIE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q - 1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0 , q^n et $(q - 1)$

- Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q - 1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

- Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

- Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n) .
- Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n) .

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n ,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 LIMITE INFINIE

DÉFINITION

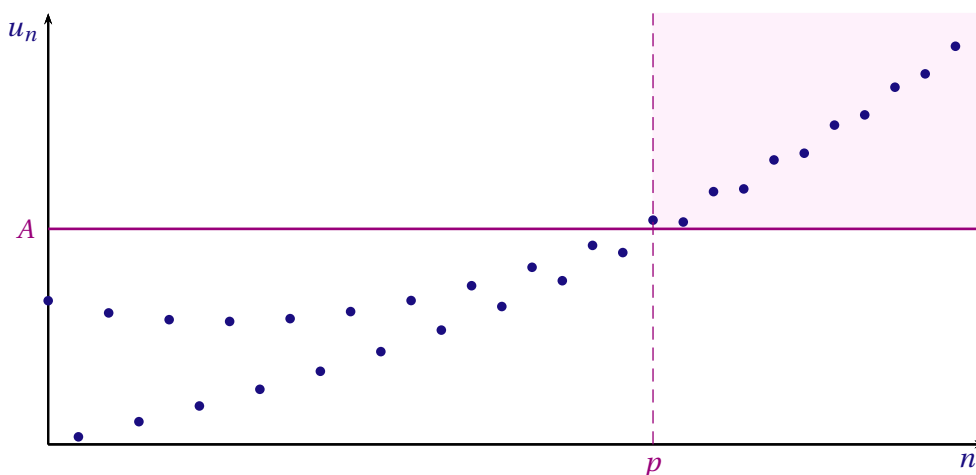
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p . On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Soit p un entier tel que pour tout entier $n \geq p$, on a $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$.

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p . On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

2 LIMITE FINIE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p . On écrit :

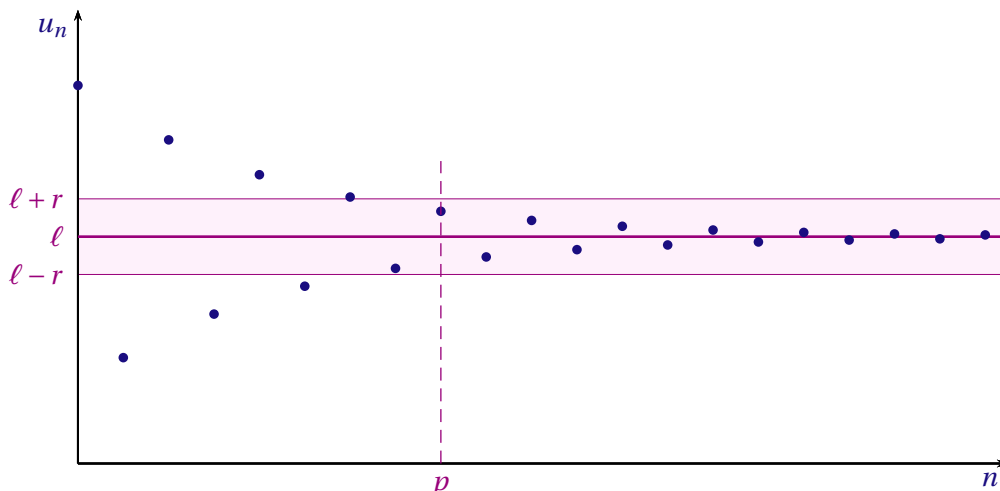
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ .

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p , tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME (admis)

Soit q un nombre réel :

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

REMARQUE

Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc convergente.

Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n , elle n'admet pas de limite.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q **strictement positive**.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0 .

— Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $r_0 = 50000$

Comme $0 < 0,96 < 1$ la suite (r_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 50000 \times 0,96^n = 0$.

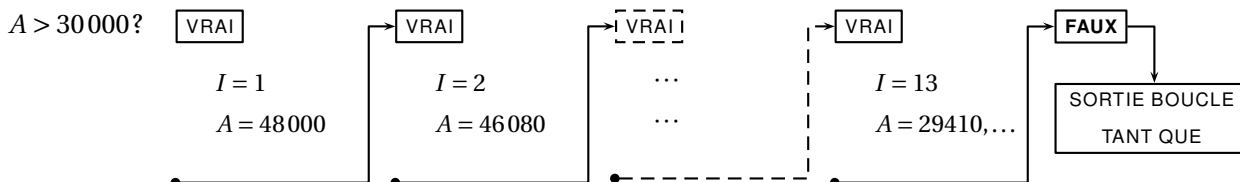
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.

C'est à dire déterminer le plus petit entier I tel que pour tout entier $n \geq I$, $50000 \times 0,96^n < 30000$

	PROGRAMME	
	TEXAS	CASIO
$A \leftarrow 50000$	PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
$I \leftarrow 0$	: 50000 → A	50000 → A ↵
Tant que $A \geq 30000$	: 0 → I	0 → I ↵
$I \leftarrow I + 1$	: While A ≥ 30000	While A ≥ 30000 ↵
$A \leftarrow 0,96 \times A$	: I + 1 → I	I + 1 → I ↵
Fin Tant que	: 0.96*A → A	0.96*A → A ↵
	: End	WhileEnd ↵
	: Disp I	I

Initialisation des variables A et I : $A = 50000$ et $I = 0$.

Traitement : Tant que la condition $A \geq 30000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "TANT QUE" et "FIN TANT QUE"



Sortie :

La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geq 13$, $50000 \times 0,96^n \leq 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2000$

$1,015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2000 \times 1,015^n = +\infty$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur ou égal à 3000.

C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, $2000 \times 1,015^n \geq 3000$

```

A ← 2000
N ← 0
Tant que A < 3000
    A ← 1,015 × A
    N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 28.
Donc pour tout entier $n \geq 28$, $u_n \geq 3000$. Soit pour tout entier $n \geq 28$, $2000 \times 1,015^n \geq 3000$.

III SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels.
La suite (u_n) définie pour tout entier n , par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial u_0 est une suite *arithmético-géométrique*

REMARQUE

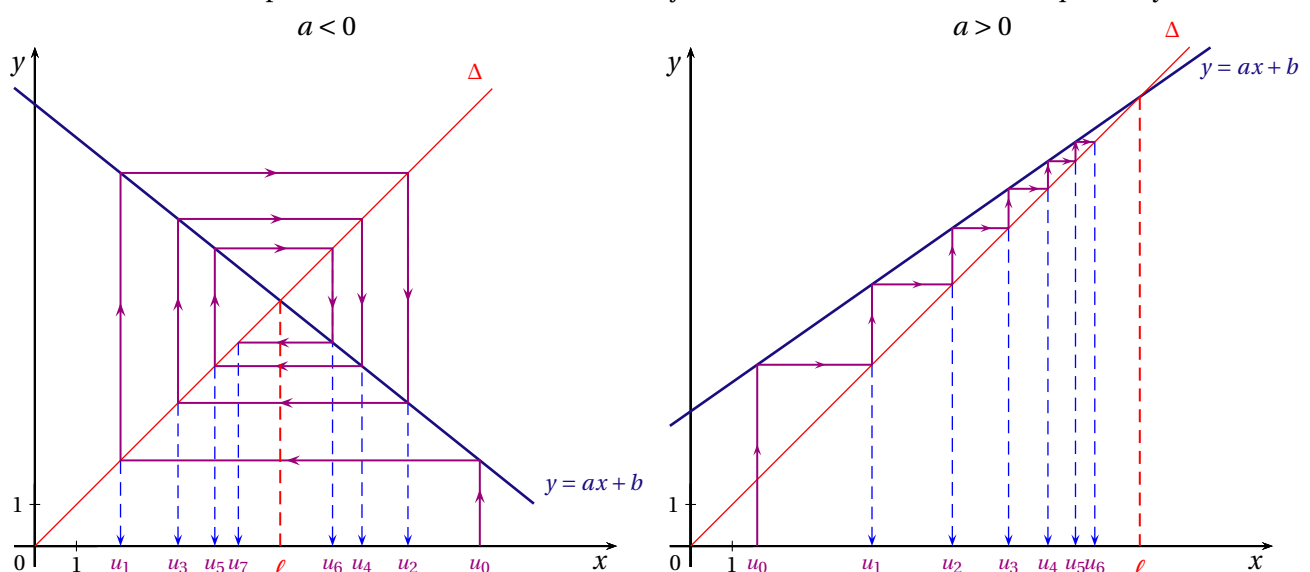
- Si $a = 1$ la suite est arithmétique.
- Si $b = 0$ la suite est géométrique.
- Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 ÉTUDIER UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

a et b sont deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
 (u_n) est la suite arithmético-géométrique définie par u_0 et pour tout entier n , $u_{n+1} = au_n + b$.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

UNE SUITE AUXILIAIRE

PROPOSITION

Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier n , par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

* PREUVE

Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= au_n - a\ell \\ &= a \times (u_n - \ell) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n , $v_{n+1} = a \times v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison a .

CONSÉQUENCE

(v_n) est une suite géométrique de raison a et $v_0 = u_0 - \ell$ donc pour tout entier n , $v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$.

Comme $v_n = u_n - \ell \Leftrightarrow u_n = v_n + \ell$, on en déduit que : Pour tout entier n , $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$.

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,002 \times u_n + 250$.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n , par $v_n = u_n + 125\,000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125\,000 \\ &= 1,002 \times u_n + 125\,250 \\ &= 1,002 \times (u_n + 125\,000) \\ &= 1,002 \times v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1\,000 + 125\,000 = 126\,000$.

3. Exprimer u_n en fonction de n .

(v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126\,000$ donc pour tout entier n , $v_n = 126\,000 \times 1,002^n$.

Donc pour tout entier n , $u_n = 126\,000 \times 1,002^n - 125\,000$.

4. Étude de la suite (u_n) .

a) Variation

Pour tout entier n , $u_n = 126\,000 \times 1,002^n - 125\,000$. Par conséquent, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (126\,000 \times 1,002^{n+1} - 125\,000) - (126\,000 \times 1,002^n - 125\,000) \\ &= 126\,000 \times 1,002^{n+1} - 126\,000 \times 1,002^n \\ &= 126\,000 \times 1,002^n \times (1,002 - 1) \\ &= 252 \times 1,002^n \end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) *Limite*

Comme $1,002 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,002^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 126\,000 \times 1,002^n - 125\,000 = +\infty$.

c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*

On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 15\,000$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15 000.

```
U ← 1 000
N ← 0
Tant que U ≤ 15 000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.

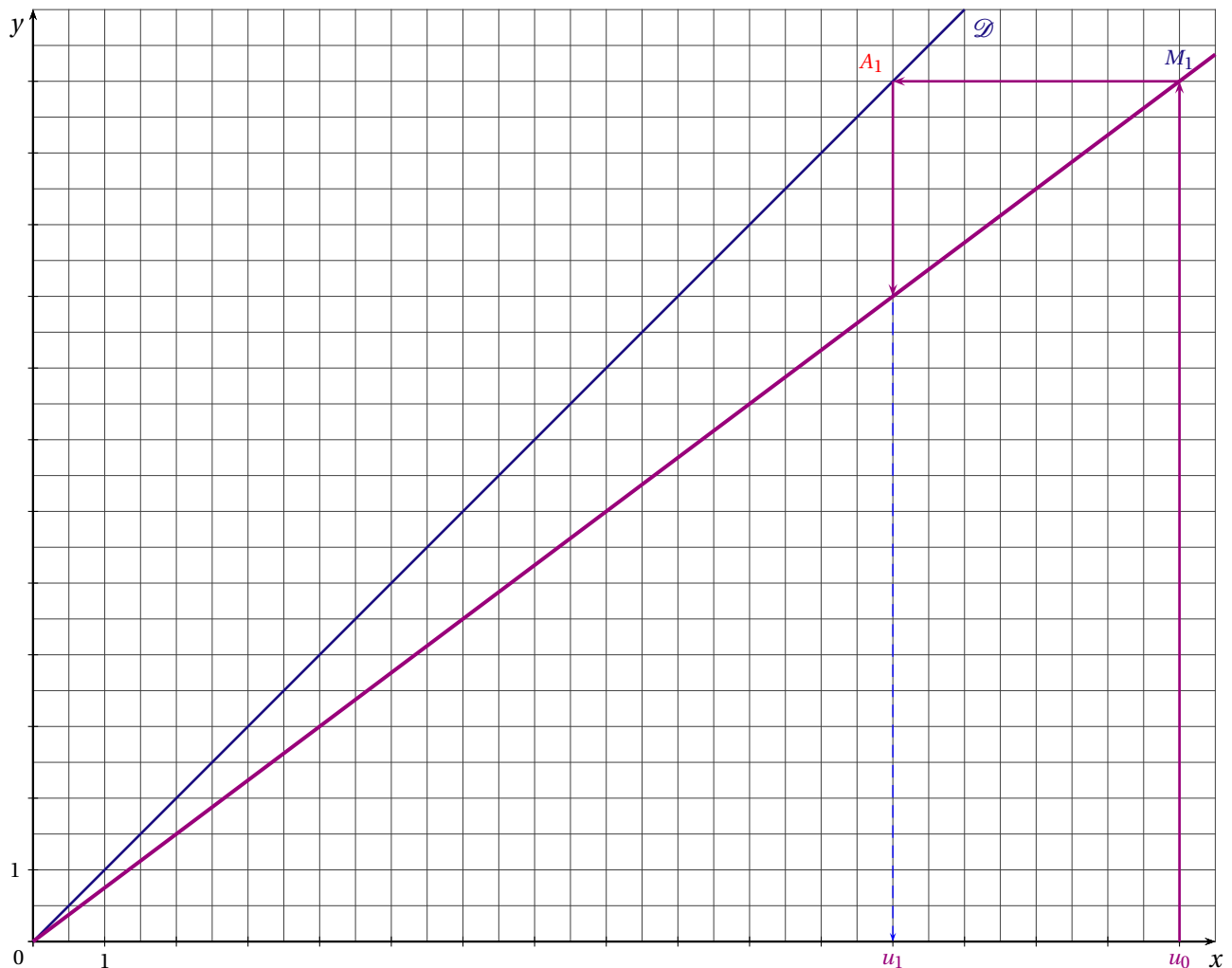
Donc le capital disponible dépassera 15 000 € au bout de 53 mois.

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75 \times u_n$.

PARTIE A

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- b) Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
- c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,75x$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.



- a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \dots, u_{10}$.
- b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

```

N ← 0
U ← 16
Tant que U > 0,01
    U ← 0,75 × U
    N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

Que représente pour la suite (u_n) la valeur finale de la variable N calculée par cet algorithme?

PARTIE B

On note S_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite u_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

1. Calculer S_4 .
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la valeur de la somme S_n pour un entier donné.

```

U ← ...
S ← ...
Pour I allant de 1 à N
    U ← ...
    S ← ...
Fin Pour
    
```

3. a) Montrer que pour tout entier n , $S_n = 64(1 - 0,75^{n+1})$.
b) Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

On estime que chaque année 85 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et que 12 mille nouvelles personnes souscriront un abonnement.

En 2015, il y avait 40 mille abonnés à cette revue.

On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année 2015 + n ; on a donc $a_0 = 40$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} en fonction de a_n .
2. On considère l'algorithme suivant :

```

N ← 0
A ← 40
Tant que A ≤ S
    A ← 0,85 × A + 12
    N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

Pour la valeur de la variable $S = 70$, la valeur finale de la variable N est $N = 9$. Interpréter ce résultat.

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geq 0$.
 - a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 80 - 40 \times 0,85^n$.
 - c) Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires?

EXERCICE 3

(D'après sujet bac Liban 2017)

Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2 .

En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012.
Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement? Justifier la réponse.
2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO₂ émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

PARTIE B : Étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO₂.

En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO₂ au total.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO₂ émis dans cette zone industrielle au cours de l'année 2005 + n .

1. Déterminer u_0 et u_1 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 10$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 31 \times (0,98)^n + 10$.
4. a) Calculer la limite de la suite (u_n) .
b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO₂, par rapport à l'année 2005.

- a) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme :

1	$U \leftarrow 41$
2	$n \leftarrow 0$
3	Tant que ...
4	$U \leftarrow \dots$
5	$n \leftarrow n + 1$
6	Fin Tant que

- b) La valeur de n calculée à la fin de l'algorithme est 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.

On remplit ce bassin avec 90 m³ d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m³ d'eau dans le bassin.

On note u_n le nombre de m³ d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.

On a donc $u_0 = 90$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,97 \times u_n + 2,4$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 80 + 10 \times 0,97^n$.
2. Étudier la monotonie de la suite u_n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 5500$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,68 \times u_n + 3560$.

1. a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,68x + 3560$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) .



Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que la limite de la suite (u_n) .

- b) Donner une interprétation de la valeur finale de la variable k calculée par l'algorithme suivant :

```

A ← 5500
k ← 0
Tant que A < 11000
    k ← k + 1
    A ← 0,68 × A + 3560
Fin Tant que
    
```

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 11125$.
- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 11125 - 5625 \times 0,68^n$.
 - La suite (u_n) est-elle convergente?

PARTIE B

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

Une étude statistique a permis de constater que d'une année sur l'autre, 32% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 3 560 nouvelles personnes souscrivent un abonnement.

En 2015, il y avait 5 500 abonnés à cette revue.

- Donner une estimation du nombre d'abonnés à cette revue en 2017.
- Pour tout nombre entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à la revue l'année 2015 + n .
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Selon ce modèle, est-il possible d'envisager une diffusion supérieure à 12 000 abonnés?
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés à la revue sera supérieur à 11 000.

EXERCICE 6

En 2015, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent.

On note u_n le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année 2016 + n ; on a donc $u_0 = 40$.

- Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2016?
- Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,92 \times u_n + 4$.
- On considère l'algorithme suivant :

```

N ← 0
U ← 40
Tant que U ≤ 44
    N ← N + 1
    U ← 0,92 × U + 4
Fin Tant que
    
```

Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près.

N	0	1	...	
U	40		...	
Test $U \leq 44$	Vrai		...	

Quelle est la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter ce résultat.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 50$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 50 - 10 \times 0,92^n$.
- Étudier la monotonie de la suite u_n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 7

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,04u_n - 0,5$.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12,5$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 2,5 \times 1,04^n + 12,5$.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

PARTIE B

Le 1^{er} janvier 2014, la population d'une ville comptait 15 milliers d'habitants.

Les études démographiques sur les dernières années ont permis d'établir que la population de cette ville à partir du 1^{er} janvier 2014 peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville le 1^{er} de l'année 2014 + n .

Une réorganisation des transports en commun sera nécessaire dès que la population dépassera 16 000 habitants.

On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 15
N ← 0
Tant que U < 16
    U ← 1,04 × U - 0,5
    N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

- Déterminer la valeur finale de N calculée par cet algorithme.
- Interpréter le résultat précédent.

EXERCICE 8

Le 1^{er} janvier 2014, la médiathèque d'une commune disposait d'un stock de 40 000 ouvrages.

Chaque année, le gestionnaire supprime 8 % des ouvrages, trop usagés ou abîmés, et achète 6 000 ouvrages neufs.

On s'intéresse à l'évolution du nombre de milliers d'ouvrages disponibles au 1^{er} janvier de chaque année.

La situation est modélisée par une suite (u_n) où le terme u_n est le nombre, **en milliers**, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2014 + n).

- Calculer le nombre d'ouvrages disponibles au 1^{er} janvier 2016.
- Donner une expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
- Des travaux de réaménagement des locaux seront nécessaires dès que le stock dépassera 50 000 ouvrages.

On considère l'algorithme suivant :

```

N ← 0
U ← 40
Tant que U ≤ 50
    U ← 0,92 × U + 6
    N ← N + 1
Fin Tant que
N ← N + 2014
    
```

- a) Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millièmes près.

N	0	1	...	
U	40		...	
Condition $U \leq 50$	Vraie		...	

- b) Quelle est la valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter ce résultat.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 75$.

- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

- b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 75 - 35 \times 0,92^n$.
5. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 9

Usines, bureaux, commerces, hôtels, etc. : les établissements constituent le tissu productif d'un territoire. En France, entre les 1^{er} janvier 2008 et 2013, le nombre d'établissements est passé de 3,5 millions à 4,2 millions dans les activités marchandes hors agriculture. Cette croissance s'accompagne d'un important renouvellement des établissements sous forme d'entrées et de sorties du tissu productif.

MODÉLISATION

On estime que chaque année, sur la période entre les 1^{er} janvier 2008 et 2013 :

- le taux de sortie annuel moyen des établissements par le biais de cessations d'activités et transferts géographiques (déménagements) est de 17,5 %;
- le nombre d'entrées annuel par le biais de créations d'entreprises, de reprises ou de transferts (emménagements) est de 812 000 établissements.

L'évolution nombre d'établissements est modélisée par la suite (u_n) où le terme u_n est le nombre, **en millions**, d'établissements le 1^{er} janvier de l'année $(2008 + n)$. Ainsi, $u_0 = 3,5$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,825 \times u_n + 0,812$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4,64$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 4,64 - 1,14 \times 0,825^n$.
3. Ce modèle permet-il d'obtenir une estimation fiable (approchée à moins de 0,01 million près) du nombre d'établissements en France, au 1^{er} janvier 2013?
4. En admettant que ce modèle reste valable pour les années suivantes :
 - a) Est-il possible d'envisager qu'en France, le nombre d'établissements atteigne 5 millions?
 - b) On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'établissements sera supérieur à 4,5 millions.

Parmi les trois algorithmes suivants, déterminer celui qui convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
<pre> n ← 0 U ← 3,5 Tant que U ≤ 4,5 U ← 4,64 - 1,14 × 0,825ⁿ n ← n + 1 Fin Tant que n ← n + 2008 </pre>	<pre> n ← 0 U ← 3,5 Tant que U ≤ 4,5 U ← 0,825 × U + 0,812 n ← n + 1 Fin Tant que n ← n + 2008 </pre>	<pre> n ← 0 U ← 3,5 Tant que U > 4,5 U ← 0,825 × U + 0,812 n ← n + 1 Fin Tant que n ← n + 2008 </pre>

EXERCICE 10

Une commune met en place un nouveau service internet par abonnement. L'abonnement d'une durée de un an est renouvelable à la fin de chaque année.

On suppose que l'effectif de la population concernée par ce service n'évolue pas et est égal à 50 000.

On estime que chaque année, 79% des abonnés renouvelleront leur abonnement en fin d'année et que 4% des non abonnés d'une année s'abonneront l'année suivante.

La première année 400 personnes se sont abonnées à ce service.

- On note a_0 le nombre d'abonnés à ce service la première année, a_1 le nombre d'abonnés un an plus tard etc.
Calculer a_1 et a_2 .
- L'évolution du nombre d'abonnés à ce service est modélisée pour tout entier n par la suite (a_n) où le terme a_n est le nombre d'abonnés n années après la première année de la mise en place de ce service. On a donc $a_0 = 400$.
Justifier que pour tout entier n , $a_{n+1} = 0,75a_n + 2000$.
- On considère l'algorithme suivant :

```

N ← 0
A ← 400
Tant que A < 5000
    N ← N + 1
    A ← 0,75 × A + 2000
Fin Tant que
    
```

- a) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	...	
Valeur de A	400		...	
Condition $A < 5000$	Vraie		...	

- b) Donner la valeur finale de la variable N calculée par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 8000$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer u_n en fonction de n .
 - En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 8000 - 7600 \times 0,75^n$.
 - Montrer que la suite (a_n) est croissante.
 - Calculer la limite de la suite (a_n) et interpréter ce résultat.
 - Le montant annuel d'un abonnement est de 30 €. On note S_n la somme totale perçue par le gestionnaire sur l'ensemble des n premières années après la mise en place de ce nouveau service.
Calculer le montant arrondi à la dizaine d'euros près de la somme perçue par le gestionnaire sur l'ensemble des cinq premières années.

EXERCICE 11

(D'après sujet bac Amérique du Nord 2017)

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1^{er} septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016 + n , on a donc $u_0 = 27 500$.

1. a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
3. Recopier et compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme suivant afin qu'il calcule le nombre d'années à partir duquel le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	$n \leftarrow 0$
L2	$U \leftarrow 27\,500$
L3	Tant que $U \leq \dots$
L4	$n \leftarrow \dots$
L5	$U \leftarrow \dots$
L6	Fin Tant que

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

- b) Donner la valeur de n calculée par cet algorithme.
5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n .
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 3\,900$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 23\,600 \times 1,04^n + 3\,900$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 12

(D'après sujet bac Polynésie 2017)

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,996 \times u_n + 7,2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année 2015 + n .
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

$N \leftarrow 2015$
$U \leftarrow 4000$
.....
.....
.....
.....

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,800$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.
 - b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 2\,200 \times 0,996^n + 1\,800$.
 - c) Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître? Justifier la réponse.

4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 millions d'arbres en 10 ans.

En 2016 on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards.

On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %.

L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025 ?

Justifier la réponse.

Chapitre 2

DÉRIVATION, CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

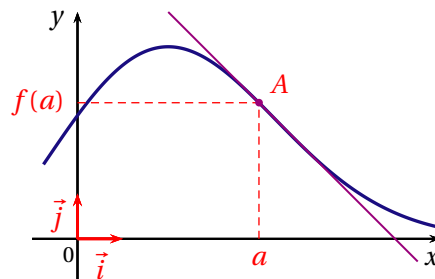
I	DÉRIVÉES	22
1	Tangente à une courbe	22
2	Dérivées des fonctions de référence	22
3	Dérivées et opérations	22
4	Dérivée et variations d'une fonction	23
	exemple	24
II	CONTINUITÉ	25
1	notion de continuité	25
2	propriétés	25
III	CONTINUITÉ ET ÉQUATION	26
1	THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES	26
2	théorème de la valeur intermédiaire	26
IV	CONVEXITÉ	27
1	fonction convexe, fonction concave	27
2	point d'inflexion	28
	EXERCICES	30

I DÉRIVÉES

1 TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a .



Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

f définie sur ...	$f(x)$	$f'(x)$	f dérivable sur ...
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ pour n entier $n \geq 2$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ pour n entier $n \geq 1$
$]0; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

$$\bullet (u + v)' = u' + v'$$

$$\bullet (ku)' = k \times u'$$

$$\bullet (uv)' = u'v + uv'$$

$$\bullet (u^2)' = 2uu'$$

$$\bullet \text{ Si } n \text{ est un entier non nul, } (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I (si $v(x) \neq 0$ sur I)

$$\bullet \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

4 DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est constante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

THÉORÈME 2

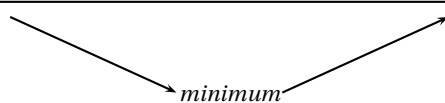
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I .

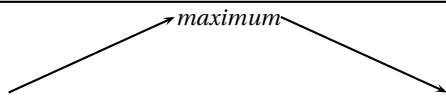
- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I .

1. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$			

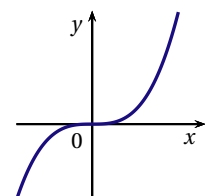
REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.

$f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.

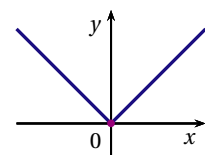


2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

f admet un minimum $f(0) = 0$ or f n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f = 1 - \frac{u}{v}$ d'où $f' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x-3 & \text{d'où} & \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2+1 & \text{d'où} & \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$:

Pour tout réel x , $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a=4$, $b=-6$ et $c=-4$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \\ \text{et } x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2 \end{aligned}$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

II CONTINUITÉ

1 NOTION DE CONTINUITÉ

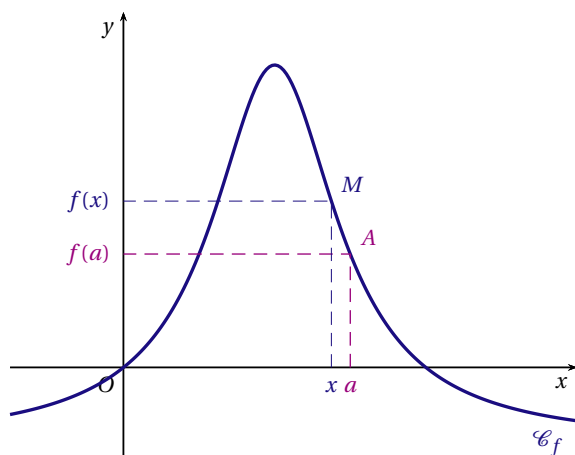
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Intuitivement, dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

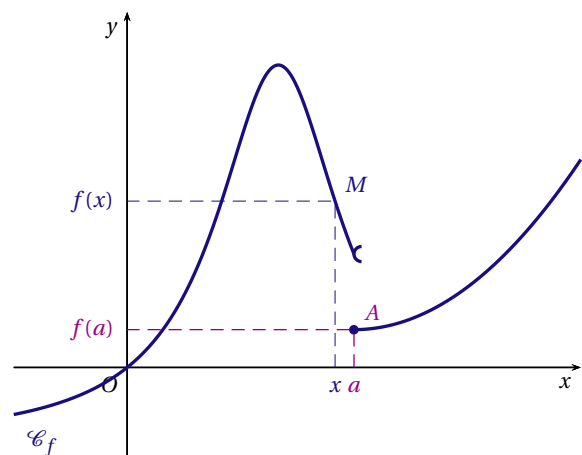
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

Pour tout réel x de l'intervalle I , on considère le point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a .



La fonction f n'est pas continue en a .

La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a .
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a .

2 PROPRIÉTÉS

THÉORÈME (admis)

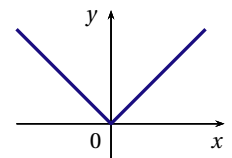
Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

REMARQUE

La réciproque du théorème est fausse :

Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.

Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

III CONTINUITÉ ET ÉQUATION

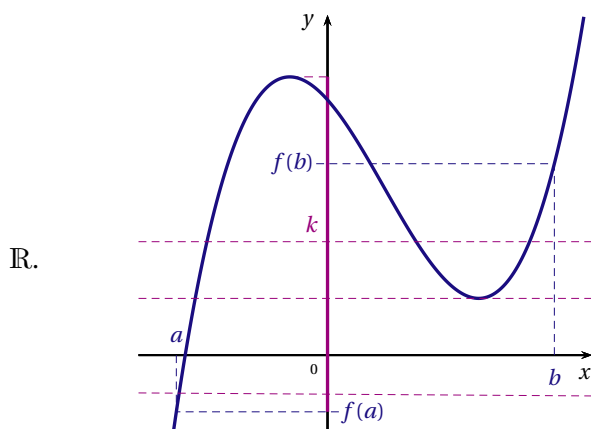
1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME (admis)

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et continue sur I alors elle vérifie la propriété suivante : quels que soient les réels a et b de l'intervalle I , pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

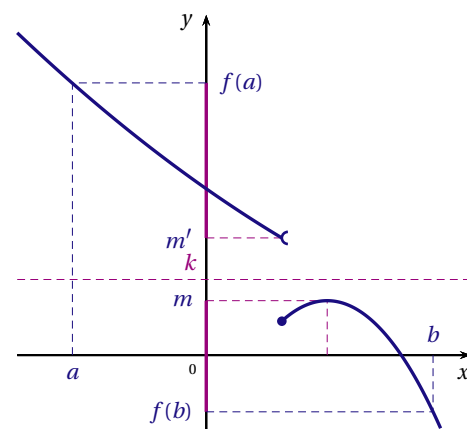
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de

f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a; b]$ est un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a; b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a; b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

2 THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

COROLLAIRE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I , $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** c appartenant à $[a; b]$.

* DÉMONSTRATION

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence

Par hypothèse, f est continue sur $[a; b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

2. Unicité

Supposons que l'équation $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2 appartenant à $[a; b]$

Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$

Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2) = k$

Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$

REMARQUES

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$
- Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$, $]a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $] -\infty; b]$ ou $] -\infty; b[$.

IV CONVEXITÉ

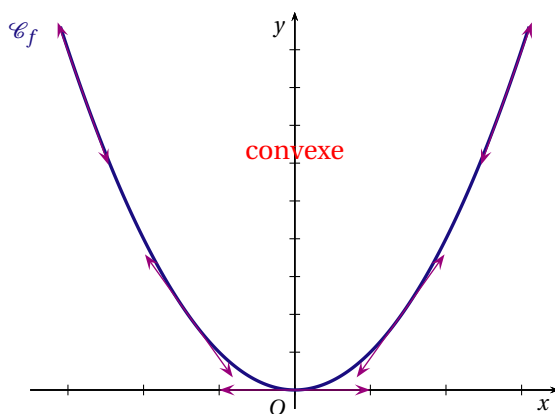
1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

DÉFINITIONS

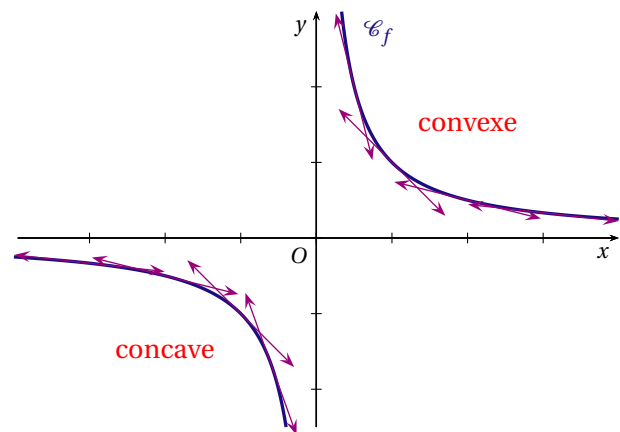
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

EXEMPLES



La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe.

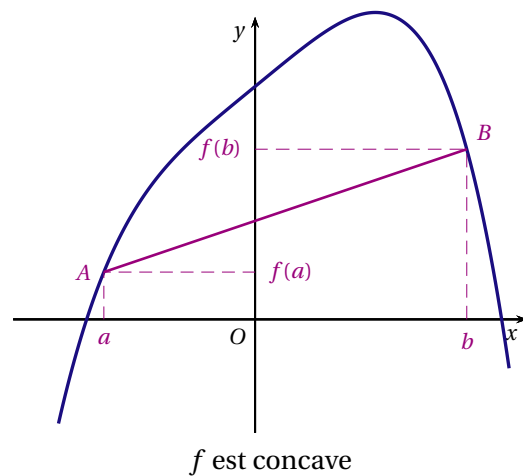
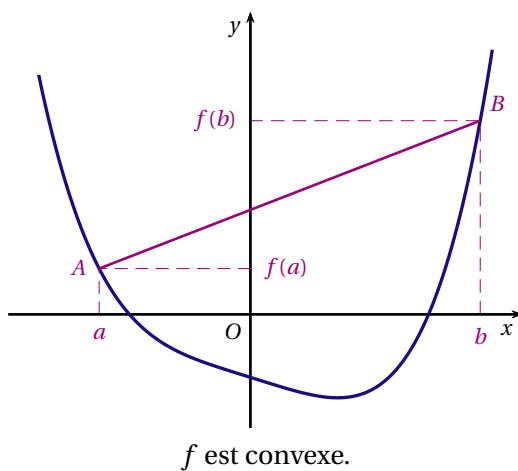


La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$

REMARQUE

Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$

- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



THÉORÈME (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I .
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I .

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f , c'est à dire la dérivée de la dérivée f' .

- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

EXEMPLE

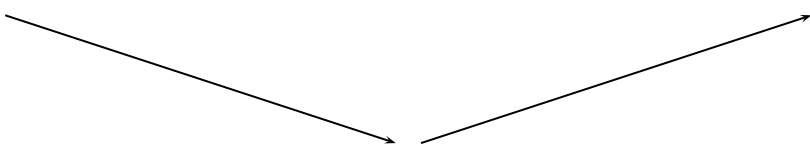
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' .

Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
variations de f'			
convexité de f	CONCAVE		CONVEXE

f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.

2 POINT D'INFLEXION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

EXEMPLE

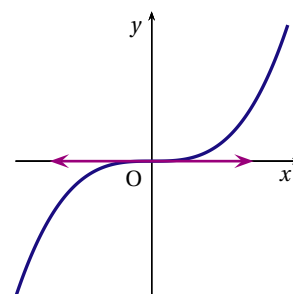
La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $O(0;0)$ du repère.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.

La tangente au point O à la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty; 0]$.
- Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $O(0;0)$ est un point d'inflexion.



CONSEQUENCES

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a .
- Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x - 3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.

Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

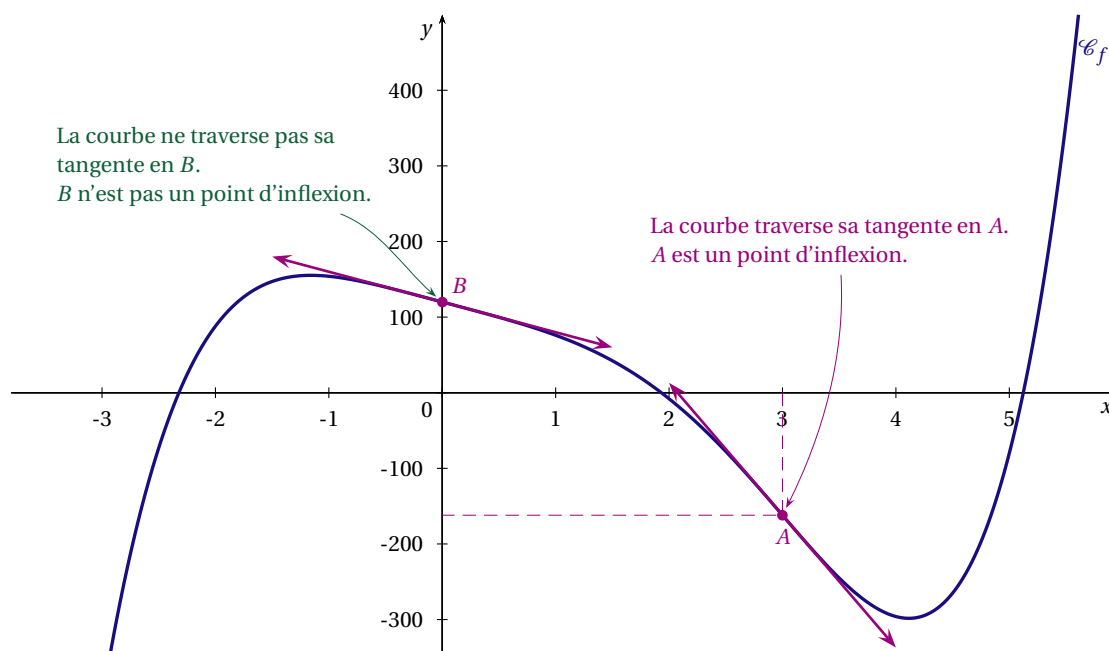
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' . D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
signe de $f''(x)$	-	0	0	+
variations de f'				

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A(3; f(3))$.

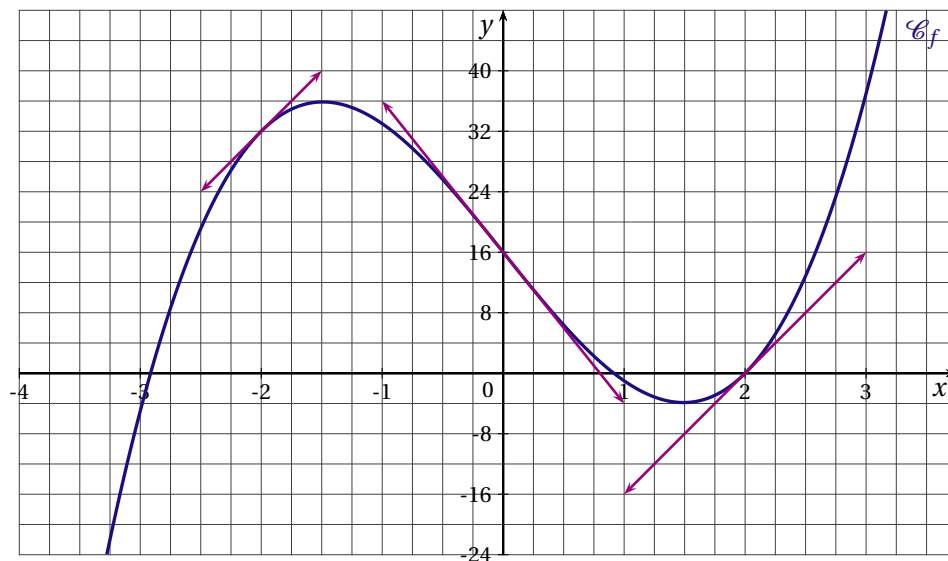
En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $] -\infty; 3]$ $f''(x) \leq 0$ donc le point $B(0; 120)$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $] -\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. (La fonction f est concave sur $] -\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



EXERCICE 1

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Certaines tangentes à la courbe ont également été représentées.



PARTIE A

On note f' la dérivée de la fonction f . À partir du graphique :

- Déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
- Donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1,5)$, puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la partie A.
- Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- Donner le tableau de variation de la fonction f .

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{15x+60}{x^2+9}$. On note f' la dérivée de la fonction f .

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
- Donner le tableau des variations de f .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -4 .

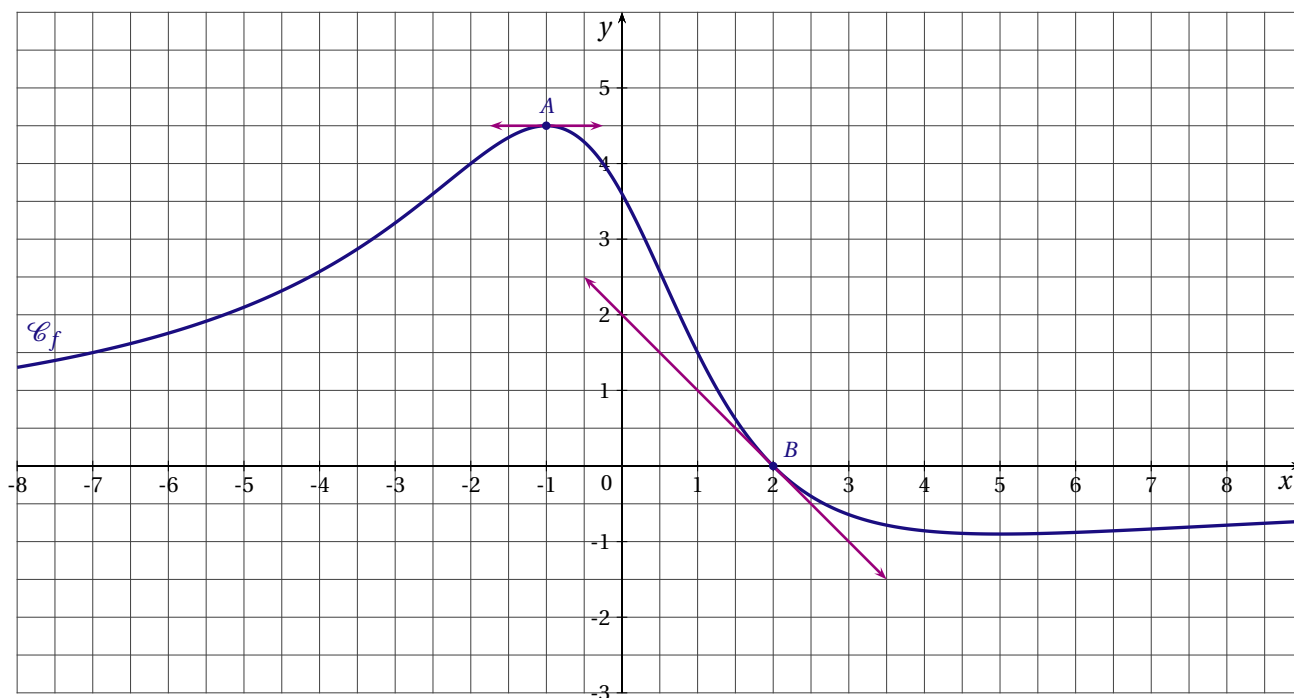
EXERCICE 3

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- La tangente au point $A\left(-1; \frac{9}{2}\right)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

— La tangente au point $B(2;0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0;2)$.



On note f' la dérivée de la fonction f . À partir du graphique et des renseignements fournis :

- Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \frac{7}{2}$.
Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
- Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.
 - $f'(0) \times f'(3) \leq 0$.
 - $f'(-3) \times f'(1) \leq 0$.

PARTIE B

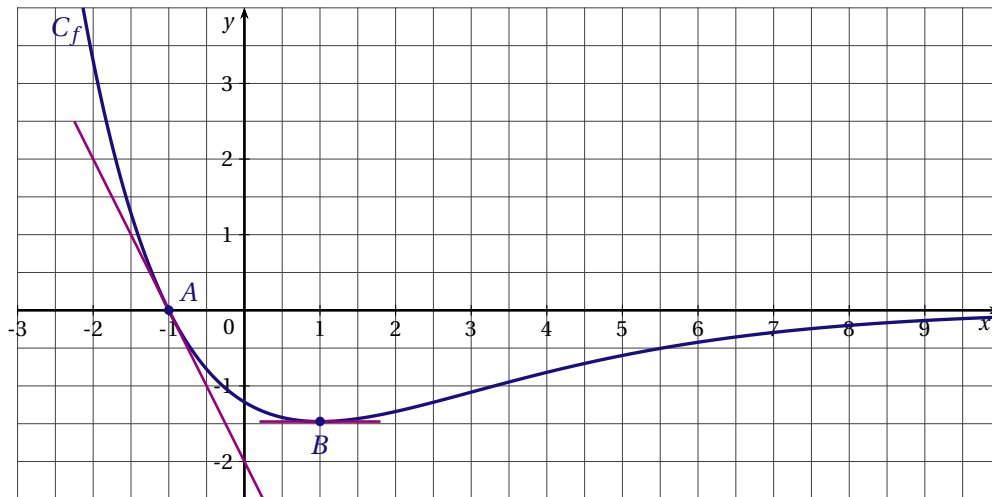
La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{18-9x}{x^2+5}$.

- Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{9(x^2-4x-5)}{(x^2+5)^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
 - Donner le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-2) .

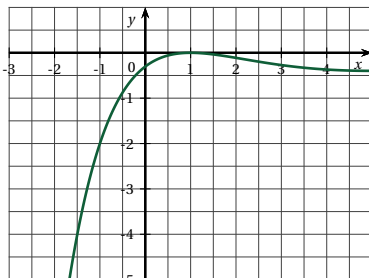
EXERCICE 4

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On sait que :

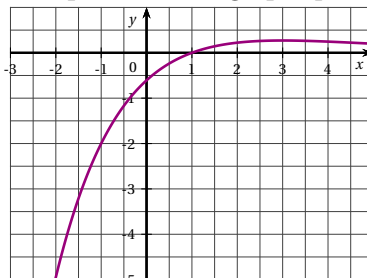
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0; -2)$;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;



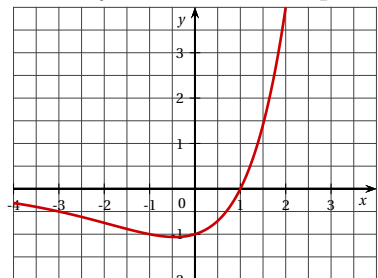
- À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
- Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = 8x^2 - 2x - \frac{9}{2x+3}$.

- On note f' la dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{8x(8x^2 + 23x + 15)}{(2x+3)^2}$.
- Étudier les variations de la fonction f .

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Étudier les variations de f .
- Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 7

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.

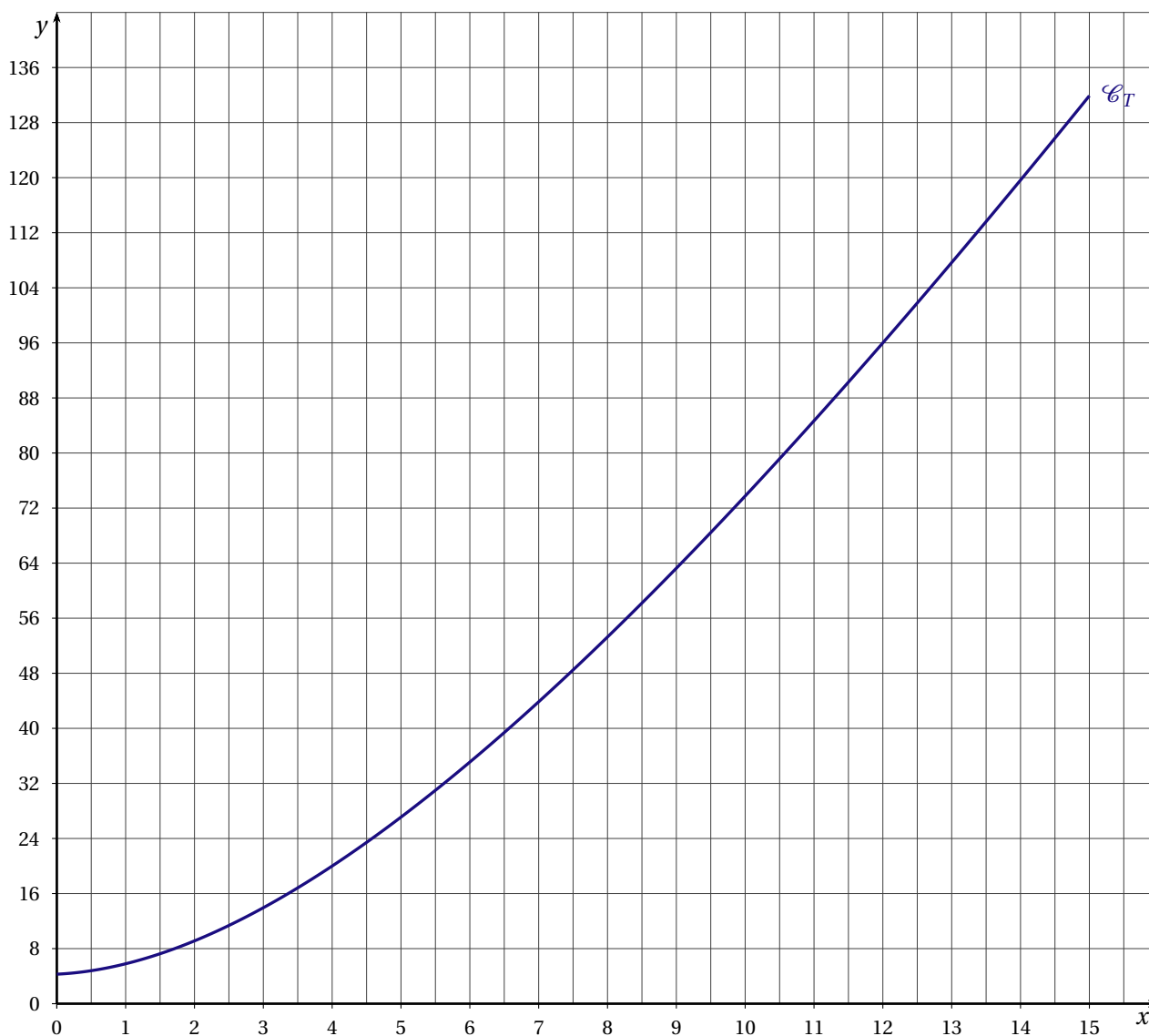
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0; 15]$ par $C(x) = \frac{16x^2 + 11x + 60}{x + 14}$.

La courbe représentative de la fonction C , notée $\mathcal{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

- Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8x$

- a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathcal{D}$ représentative de la fonction R .
- b) Par lecture graphique :
 - les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
 - la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
 - a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.
 - b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 15]$ on a $B'(x) = \frac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x + 14)^2}$.
 - c) Étudier les variations de la fonction B .
 - d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C .
Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

ANNEXE



EXERCICE 8

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3	1	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$	-1

- La fonction f est-elle continue sur $] -3; +\infty[$?
 - Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
 - Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 - L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?
- On note f' la dérivée de la fonction f . Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
 - L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5; +\infty[$
 - $f'(-2) \times f'(0) \leq 0$
 - $f'(-2) \times f'(3) \leq 0$

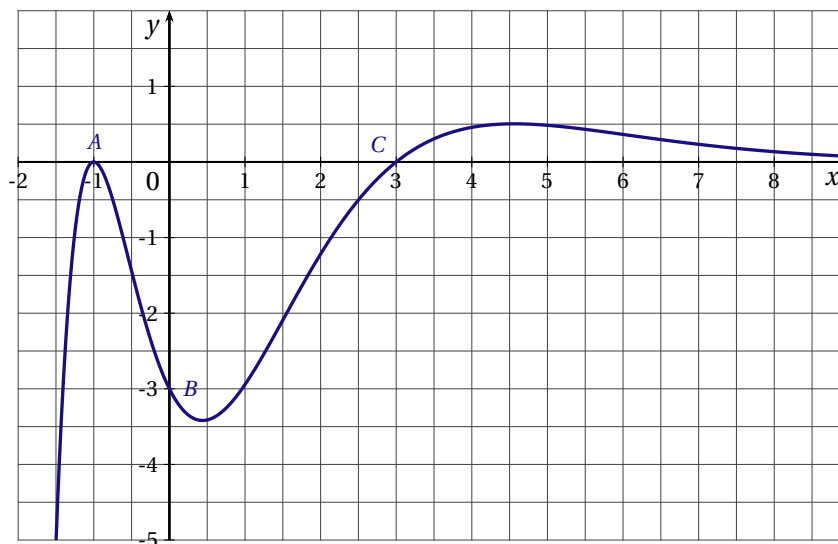
EXERCICE 9

Soit f la fonction définie $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$. On note f' sa dérivée.

- Calculer $f'(x)$.
- Donner le tableau des variations de la fonction f .
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 10

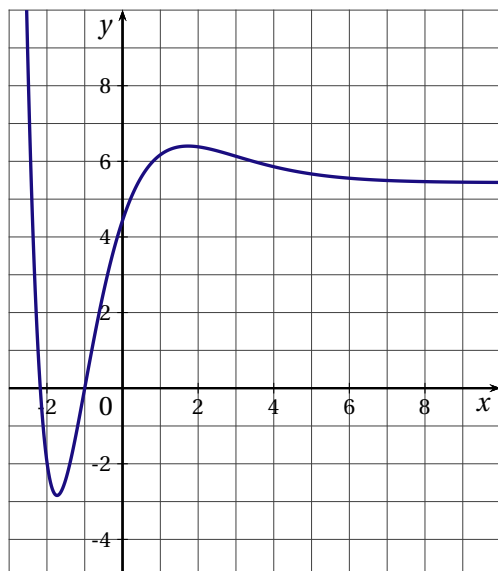
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , dans un repère orthonormé. Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



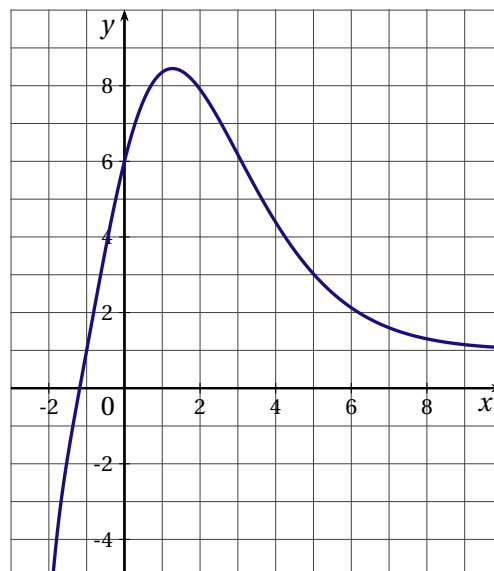
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe? Est-elle concave?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle? Justifier la réponse.

Courbe 1

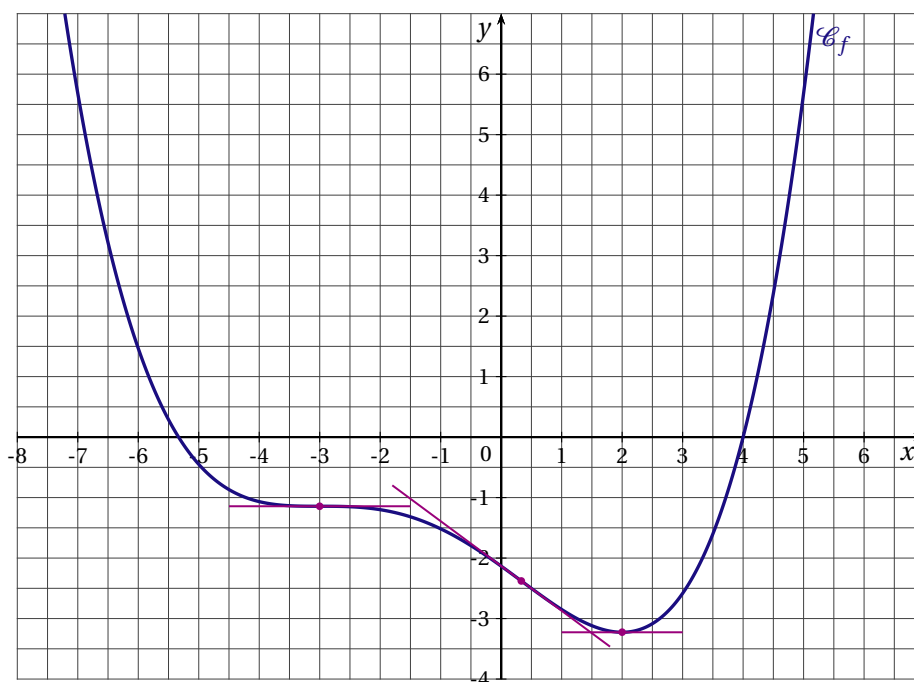


Courbe 2



EXERCICE 11

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

À partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :

$f(-6) \cdots 0$	$f'(-6) \cdots 0$	$f(-1) \cdots f(3)$	$f'(-1) \cdots f'(3)$
$f'(-6) \cdots f'(-1)$	$f'(-3) \cdots 0$	$f'(2) \cdots 0$	$f'(-7) \cdots f'(3)$
$f''(-6) \cdots f''(-1)$	$f''(-3) \cdots 0$	$f''(2) \cdots 0$	$f''(-1) \cdots f''(1)$

EXERCICE 12

Soit $P(t)$ la population d'une ville où t est en années et $P(t)$ est en milliers d'habitants.

Que signifient les énoncés suivants en ce qui concerne les signes de la dérivée et de la dérivée seconde?

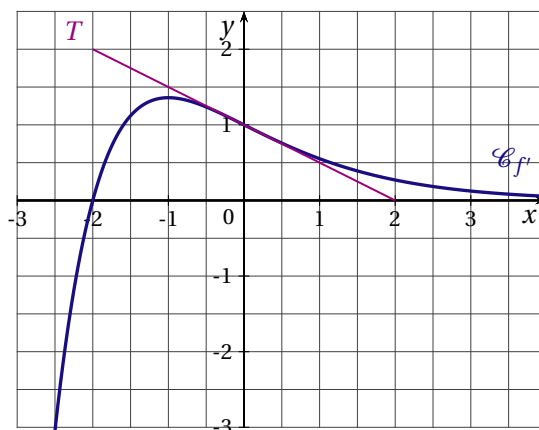
- « La population a augmenté de moins en moins vite ».
- « La population est restée stable les trois premières années ».
- « La population diminue plus rapidement ».
- « La population a augmenté au même taux ».

EXERCICE 13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.

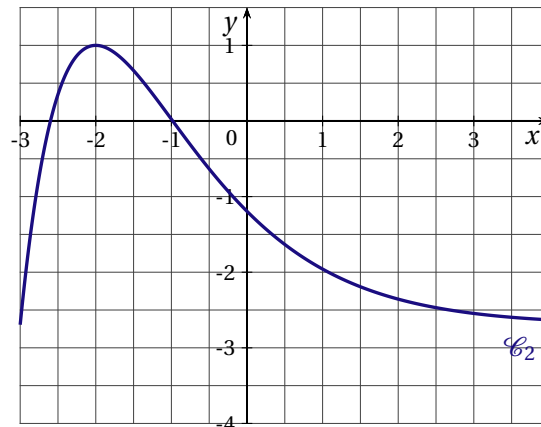
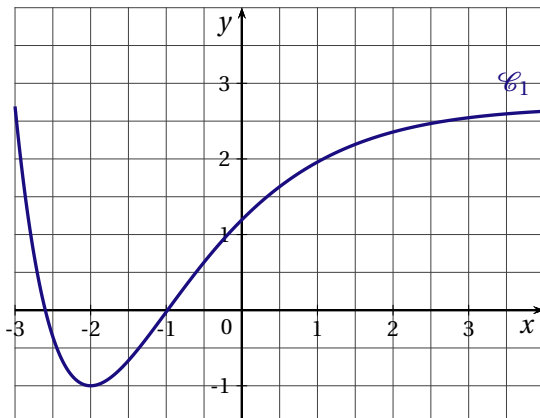
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.

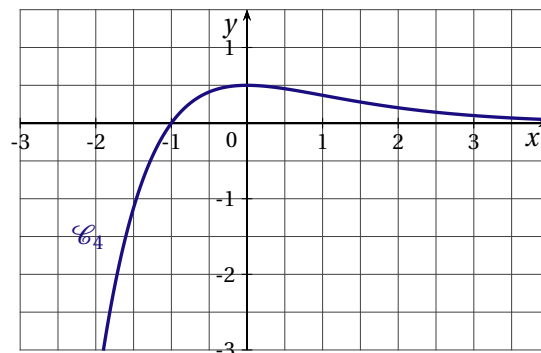
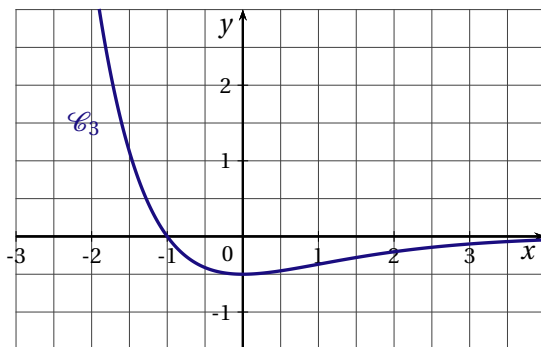


1. Par lecture graphique :

- Résoudre $f'(x) = 0$.
- Résoudre $f''(x) = 0$.
- Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .





- Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f'' .
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
- La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion?

EXERCICE 14

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

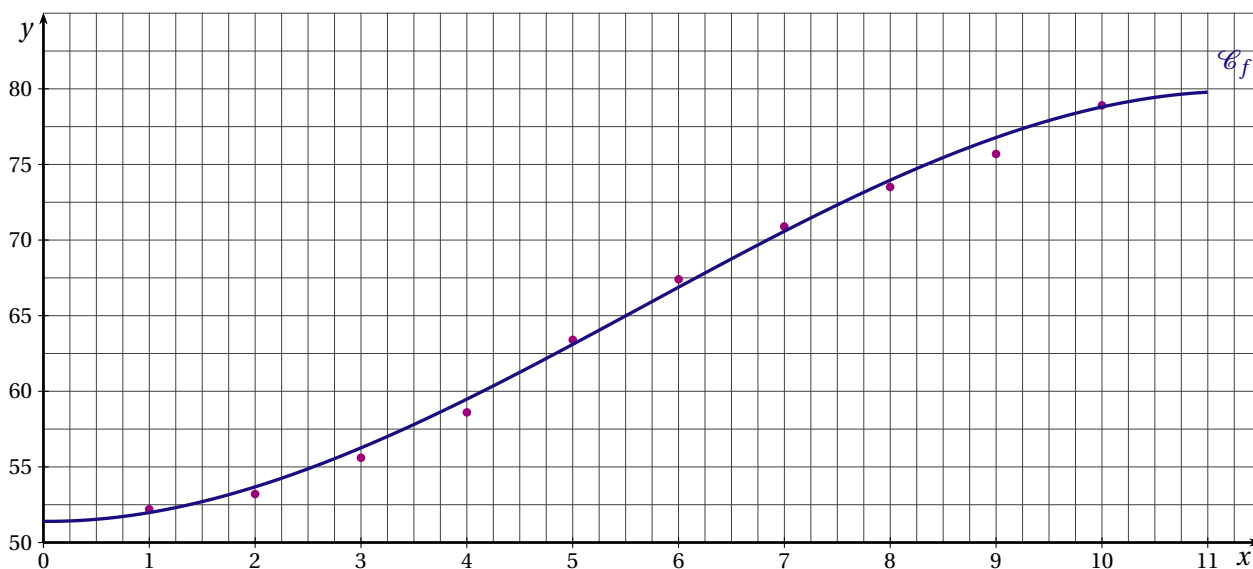
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



- Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
 - Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
 - La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion?

3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f .
Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer?

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- On note f' la dérivée de la fonction f .
 - Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$.
 - Donner le tableau des variations de la fonction f .
- Étudier la convexité de la fonction f .
 - La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion?
- Montrer que l'équation $f'(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; 2]$.
À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près, de α .

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -x^3 + 16,5x^2 - 30x + 110$.

On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde.

- Déterminer $f'(x)$.
 - Étudier les variations de la fonction f .
- Déterminer $f''(x)$.
 - Étudier la convexité de la fonction f .

PARTIE B

La fonction f , définie dans la partie A, modélise sur l'intervalle $[0; 12]$, le cours d'une action sur une année.
 x est le temps écoulé exprimé en mois et $f(x)$ est le cours de l'action en euros.

- Sur un an, quel a été le cours le plus bas de cette action? le cours le plus haut?
- À quel moment la croissance du cours de cette action s'est-elle ralentie?

EXERCICE 17

PARTIE A

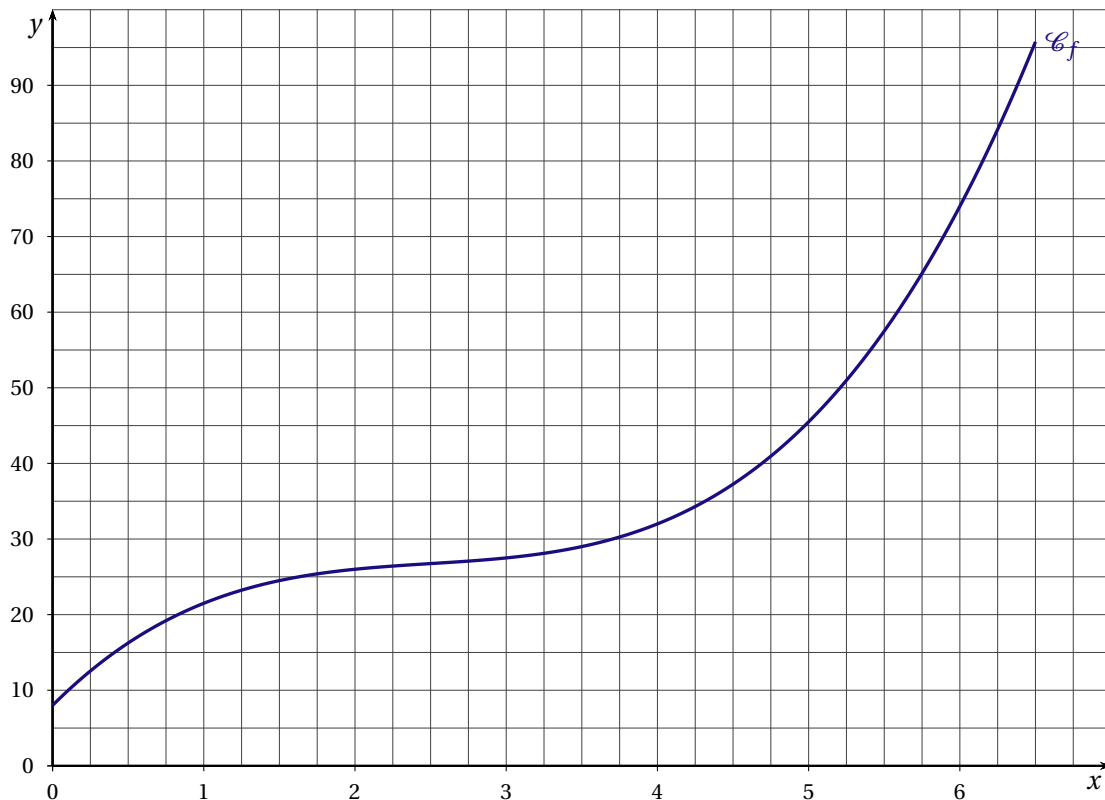
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

- Étudier les variations de la fonction f .
- Étudier la convexité de la fonction f .
 - La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion? Si oui, déterminer ses coordonnées?

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0; 6,5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0; 6,5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
 - a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
 - b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0 ; 6,5]$ par $B(x) = 13,25x - f(x)$.
 - a) Étudier les variations de la fonction B sur $]0 ; 6,5]$.
 - b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f .
Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

PARTIE C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0; 6,5]$ par $C(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}_f$.
 - a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
 - b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .
 - a) Montrer $C'(x) = \frac{(x-4)(2x^2 + 0,5x + 2)}{x^2}$.
 - b) Étudiez les variations de la fonction C .
 - c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

Chapitre 3

FONCTION EXPONENTIELLE

ACTIVITÉS : INTRODUCTION	41
I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q	43
1 fonctions exponentielles $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$	43
2 sens de variation	44
3 propriétés	44
II LA FONCTION EXPONENTIELLE	45
1 définition	45
2 dérivée de la fonction exponentielle	45
3 variation	46
4 courbe représentative	46
III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$	47
1 dérivée	47
2 variation	48
EXERCICES	49

CONSTRUCTION EXPÉRIMENTALE DE LA FONCTION $f : x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit $q > 0$ un réel strictement positif. (u_n) est la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = q^n$. (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1. Pour tous entiers naturels m et p , on a :

$$u_m \times u_p = q^m \times q^p = q^{m+p} = u_{m+p}$$

On considère le nuage de points M_i représentatif de la suite q^n .

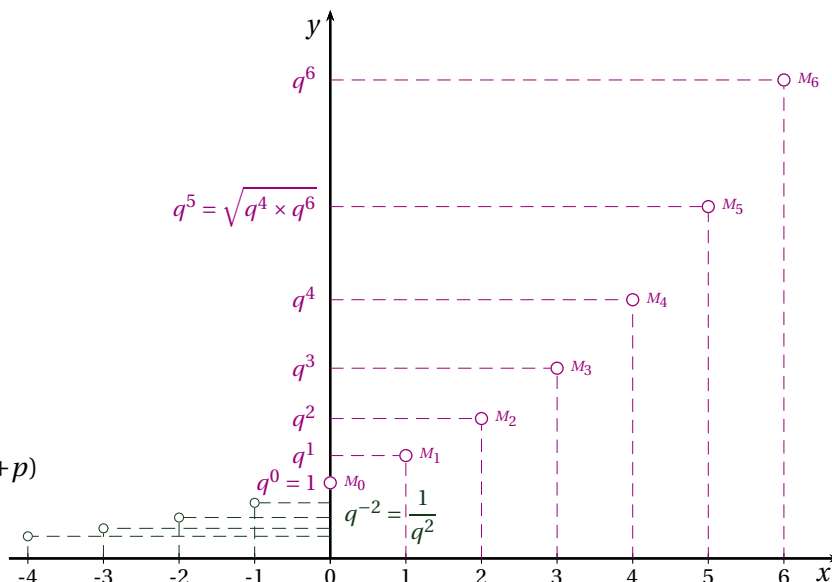
ÉTAPE 1 : prolongement sur les négatifs.

Sachant que pour tout réel $q > 0$ et pour tout entier n , $q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$, on complète le graphique à l'aide de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{q}$.

On définit ainsi, une fonction f telle que pour tout entier relatif n , $f(n) = q^n$.

Pour tous entiers relatifs m et p ,

$$f(m) \times f(p) = q^m \times q^p = q^{m+p} = f(m+p)$$



ÉTAPE 2 : prolongement par dichotomie.

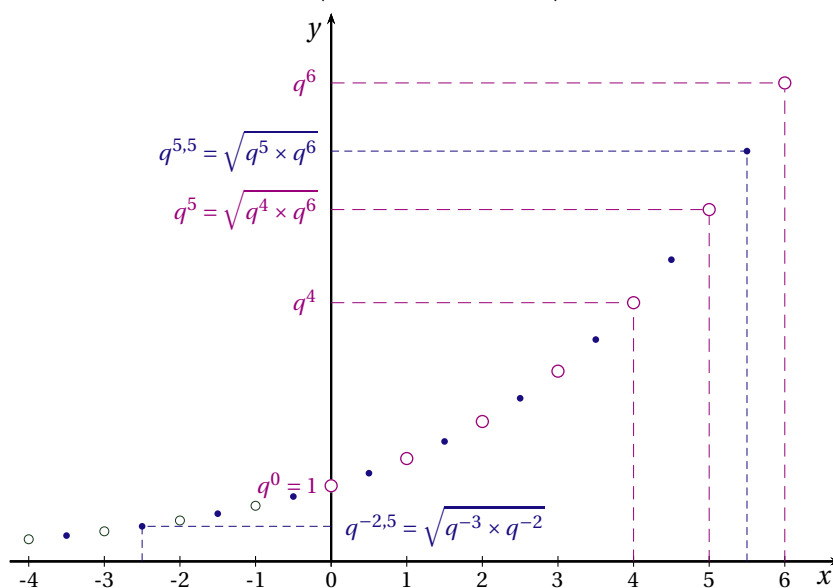
RAPPEL

Trois réels a , b et c sont, dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si, b est la moyenne géométrique de a et c (c'est à dire : $b = \sqrt{ac}$)

— Points d'abscisses $n + 0,5$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Au point d'abscisse $n + 0,5 = \frac{n + (n+1)}{2}$ on associe la moyenne géométrique des deux termes consécutifs :

$$f(n + 0,5) = \sqrt{f(n) \times f(n+1)} = \sqrt{q^n \times q^{n+1}}$$



Pour tout entier relatif n :

$$f(n + 0,5) = \sqrt{q^n \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1}{2}} = q^n \times q^{0,5} = f(n) \times f(0,5)$$

— On obtient de nouveaux points en réitérant ce processus :

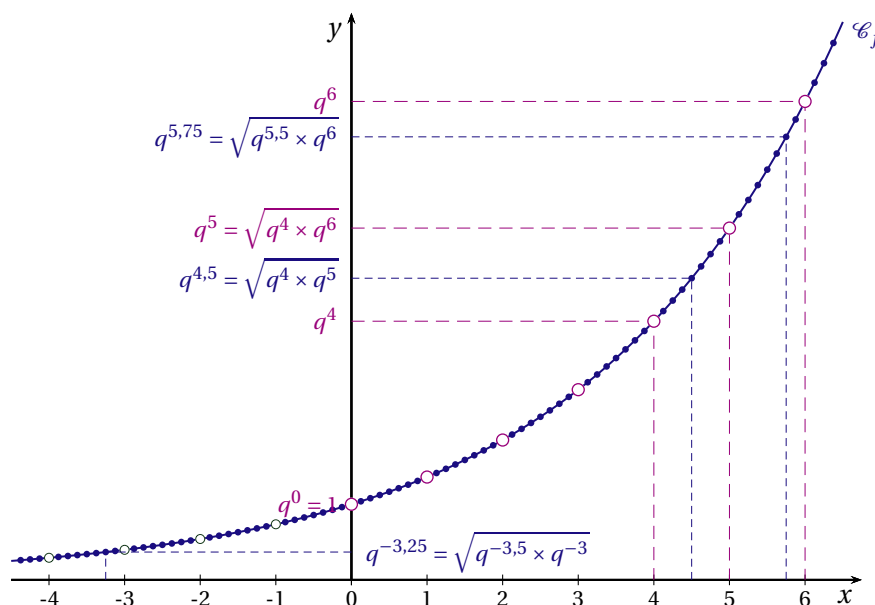
Au point d'abscisse $n + 0,25 = \frac{n + (n + 0,5)}{2} = \frac{2n + 0,5}{2}$, on associe le réel :

$$f(n + 0,25) = \sqrt{q^n \times q^{n+0,5}} = q^{\frac{2n+0,5}{2}} = q^n \times q^{0,25} = f(n) \times f(0,25)$$

Au point d'abscisse $n + 0,75 = \frac{(n + 0,5) + (n + 1)}{2} = \frac{2n + 1,5}{2}$ on associe le réel :

$$f(n + 0,75) = \sqrt{q^{n+0,5} \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1,5}{2}} = q^{n+0,5} \times q^{0,25} = f(n + 0,25) \times f(0,25)$$

Plus généralement soient $A(a; q^a)$ et $B(b; q^b)$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f , ce processus permet d'obtenir le point $M\left(\frac{a+b}{2}; \sqrt{q^a \times q^b}\right)$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$.



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{q^a \times q^b} = q^{\frac{a+b}{2}} = q^{\frac{a}{2}} \times q^{\frac{b}{2}} = f\left(\frac{a}{2}\right) \times f\left(\frac{b}{2}\right)$$

La fonction f vérifie la relation $f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

DES FONCTIONS « TRANSFORMANT LES SOMMES EN PRODUITS »

Soit f une fonction continue vérifiant pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x + y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

1. En écrivant que pour tout réel x , $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$, montrer que pour tout réel x , $f(x) > 0$.
2. En remarquant que pour tout réel x , $f(x + 0) = f(x)$, en déduire la valeur de $f(0)$.
3. Démontrer que pour tout réel x , $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$
4. On pose $f(1) = q$.
 - a) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(0,5)$.
 - b) Calculer $f(-1)$ et $f(-2)$.
5. Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$ est une suite géométrique.

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q .

La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q .

On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.

Une valeur approchée de l'image de $-5,3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence : $0.8 \wedge (-5.3)$.

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits. Pour tous réels x et y :

$$f(x + y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

— $\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, q^{-x} = \frac{1}{q^x} \text{ et } q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}.$

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \frac{q^x}{q^y}$

— $\text{Pour tout réel } x, q^x > 0.$

En effet, $q^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ avec $q^x \neq 0$.

— $\text{Pour tout réel } x, q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}, \text{ et en particulier } q^{0,5} = \sqrt{q}$

En effet, $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x > 0$.

— $\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m, (q^x)^m = q^{mx}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\text{Pour tout entier naturel } n > 0, q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q$

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\frac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

EXEMPLE

Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans.

Soit t % le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{15} &= 0,7 \iff 1 + \frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{15}} \\ &\iff \frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{15}} - 1 \\ \text{Soit } \frac{t}{100} &\approx -0,0235 \end{aligned}$$

Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % .

2 SENS DE VARIATION

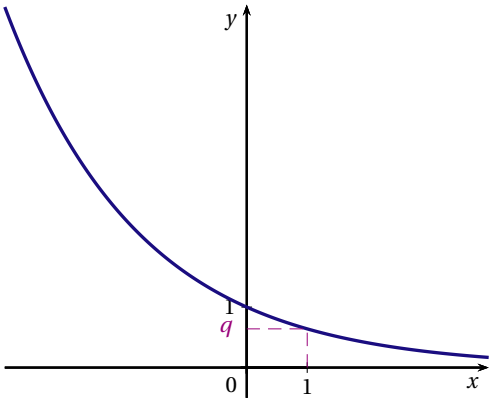
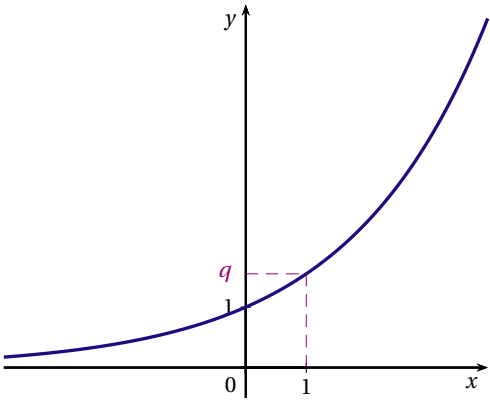
En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCE

Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si, $a = b$.

3 PROPRIÉTÉS

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = +\infty$
	
La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$	

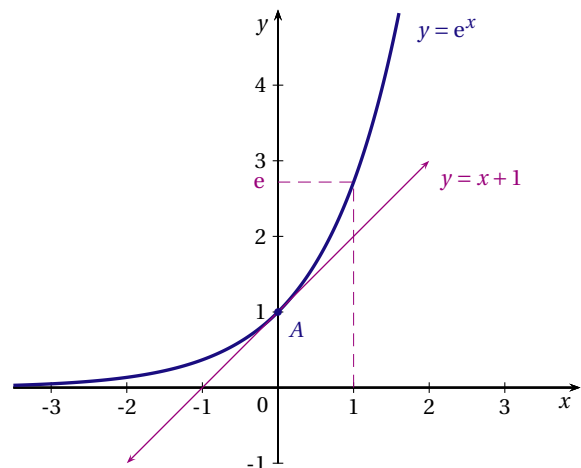
II LA FONCTION EXPONENTIELLE

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.

Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.

Cette valeur particulière du réel q est notée e .

Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $e \approx 2,71828$.



1 DÉFINITION

La fonction $x \mapsto e^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.

On la note $\exp$

$$\exp: x \mapsto e^x$$

CONSÉQUENCES

— La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = e^x$

— $\exp(0) = e^0 = 1$, $\exp(1) = e^1 = e$, $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, $\exp(0,5) = e^{0,5} = \sqrt{e}$

— La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x , $e^x > 0$

— La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$

— Pour tous réels x et y , et pour tout entier relatif m

$$e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad (e^x)^m = e^{mx}$$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x ,

$$\exp'(x) = e^x$$

* DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \times \frac{e^h - 1}{h}$$

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = 1$ soit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Donc pour tout réel x , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

3 VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✱ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.

Or pour tout réel x , $e^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

- Pour tout réel $x \leq 0$, $0 < e^x \leq 1$
- Pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$
- Pour tous réels x et y , $e^x = e^y \iff x = y$ et $e^x < e^y \iff x < y$

EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

$$e^{1-3x} < e^{2x-3} \iff 1-3x < 2x-3 \iff -5x < -4 \iff x > \frac{4}{5}$$

D'où l'ensemble solution $S = \left] \frac{4}{5}; +\infty \right[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geq 1$

$$e^{x^2-1} \geq 1 \iff e^{x^2-1} \geq e^0 \iff x^2-1 \geq 0$$

D'où l'ensemble solution $S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

✱ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.

Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = e^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

LIMITES

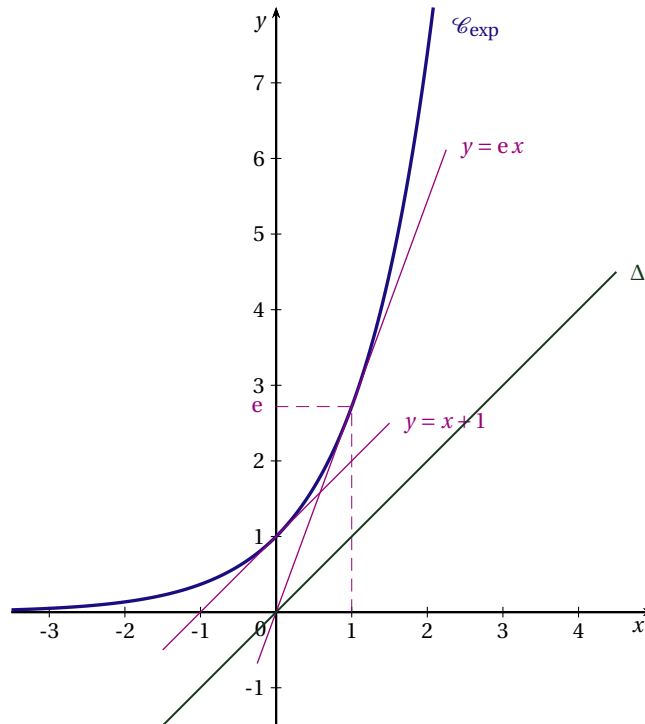
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$e > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim_{n \rightarrow -\infty} e^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$. Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x - 1) + \exp(1)$ Soit $y = e x$
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.
(cf. exercice n° 7)



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I .

La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = e^u$.

EXEMPLES

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = e^u$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5e^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = e^u \times u'$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$.
Pour tout réel x , on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x^2-2x+1}$.
Pour tout réel x , posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x - 2)e^{0,5x^2-2x+1}$.

2 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

✱ DÉMONSTRATION

Soient $a < b$ deux réels de l'intervalle I

— Si u est décroissante sur I alors $u(b) < u(a)$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc si $u(b) < u(a)$ alors $e^{u(b)} < e^{u(a)}$

Par conséquent, si u est décroissante sur I alors la fonction e^u est décroissante sur I .

— Si u est croissante sur I alors $u(a) < u(b)$

De la stricte croissance de la fonction exponentielle on en déduit que si $u(a) < u(b)$ alors $e^{u(a)} < e^{u(b)}$

Donc si u est croissante sur I alors la fonction e^u est croissante sur I .

REMARQUE

Si u est dérivable sur I , alors la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Or pour tout réel $x \in I$, $e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.

EXERCICE 1

1. Calculer

$$A = 8^{\frac{1}{3}}; \quad B = 4^{\frac{3}{4}}; \quad C = 27^{\frac{4}{3}}; \quad D = \frac{0,25^{0,7} \times 0,25^{1,2}}{0,25^{1,4}}; \quad E = \frac{\left(0,2^{\frac{2}{3}}\right)^6 \times 0,2^{-1,6}}{0,2^{3,4}}.$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$F(x) = (1 + 4^x)^2 - (1 - 4^x)^2; \quad G(x) = \frac{2^{2x-3} \times 0,5^{x+2}}{2^{-3x-1}}; \quad H(x) = \frac{(5^{x+1} - 0,2^{-x})^2}{2^4}; \quad I(x) = \frac{4^{x+0,5} + (2^x)^2}{6^{1-x}}.$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4^x - 0,25^x$.

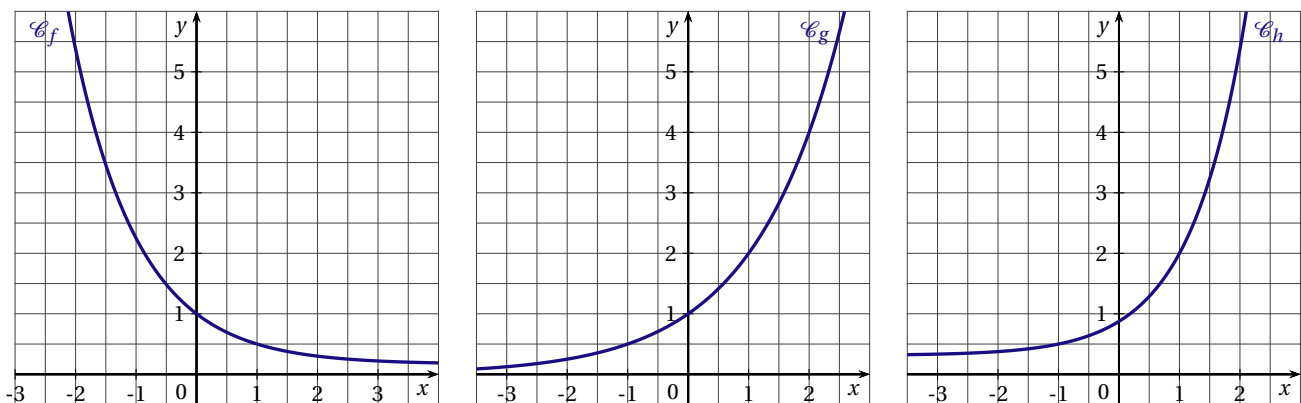
1. Calculer $f(-0,5)$, $f(0,5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f(2)$.

Quelle conjecture peut-on faire?

2. Montrer que pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$

EXERCICE 3

On a tracé ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$.



1. Une seule de ces trois fonctions est une fonction exponentielle de base q . Laquelle est-ce?
2. Quelle est la valeur du réel q ?

EXERCICE 4

1. En raison de l'évaporation, un bassin contenant 95 m^3 d'eau perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.

Modéliser l'évolution du volume d'eau contenue dans le bassin à l'aide d'une fonction f de la forme

$$f(x) = k \times q^x$$

Préciser les valeurs de k et de q , et donner le sens de variation de la fonction f .

2. En trois mois, le cours d'une action a augmenté de 12%.

Calculer le taux d'évolution mensuel moyen du cours de cette action pendant les trois mois. (Donner le résultat arrondi à 0,01 % près)

3. Le 4 janvier 2010, le cours du lingotin d'or de 500 g était de 12 400 €, contre 20 150 € le 4 août 2016.

Calculer le pourcentage annuel moyen d'évolution du cours du lingotin d'or entre ces deux dates.

EXERCICE 5

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = (e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}}; \quad B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2; \quad C = e^{-x} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right); \quad D = \frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}; \quad E = \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}.$$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x^2+x-1} = 1$
2. $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $e^{\frac{1}{x}} \geq e$
5. $e^{2x} \leq e^x$
6. $e^{2x} e^{-x^2} < 1$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f , en déduire que f admet un minimum.
3. Justifier que pour tout réel x on a : $e^x > x$.

EXERCICE 8

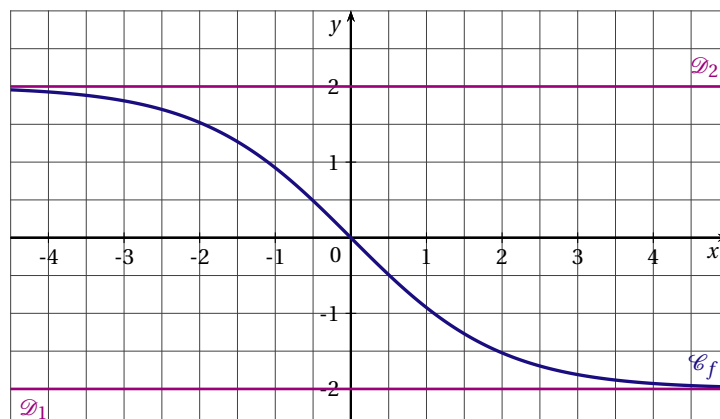
Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

1. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^x$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{1 + e^x} - 2$.

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $y = -2$ et $y = 2$

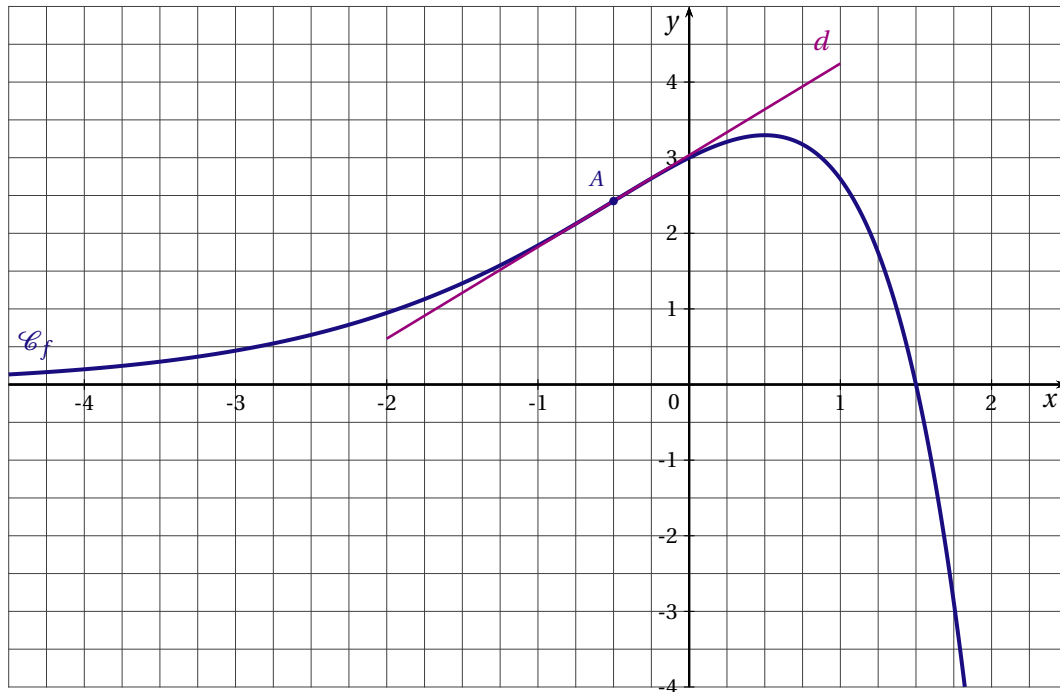


1. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Étudier la convexité de la fonction f .
4. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion?

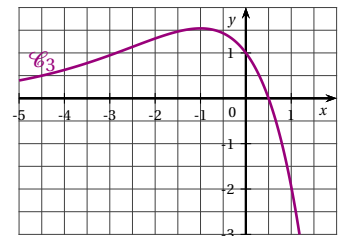
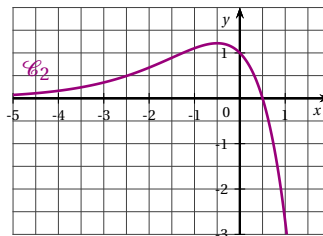
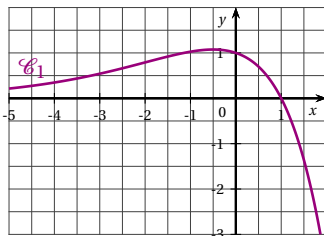
EXERCICE 10

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite d est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $\left(-\frac{1}{2}\right)$.



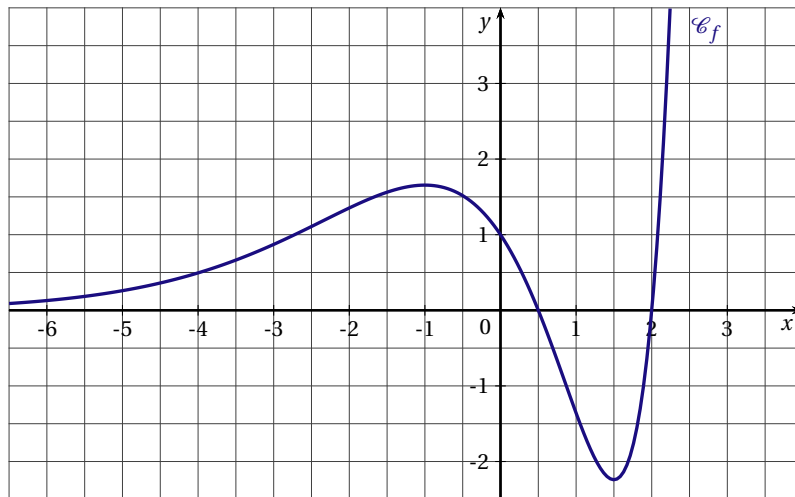
1. Parmi les trois courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la dérivée de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.



2. La fonction f est définie pour tout réel x , par $f(x) = (3 - 2x)e^x$.
- On note f' la dérivée de la fonction f . Déterminer $f'(x)$.
 - Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)e^x$. Sa courbe représentative notée $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
 - c) Dresser le tableau de variations de f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Tracer la droite T sur le graphique précédent.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 40$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de α .

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f .
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Donner le tableau de variations de f .
 - c) En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.
2. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f .
 - a) Montrer que pour tout réel x , $f''(x) = f(x)$.
 - b) Étudier la convexité de la fonction f .

EXERCICE 13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-0,5x}$

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = (2x - 5) \times e^{-x}$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$.
Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
4. a) Étudier la convexité de la fonction f .
b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion? Si oui, donner ses coordonnées.

EXERCICE 15

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2010)

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe qui sera rendu avec la copie.

On souhaite tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

- La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
- Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.
- Le minimum de la fonction f est 1.
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

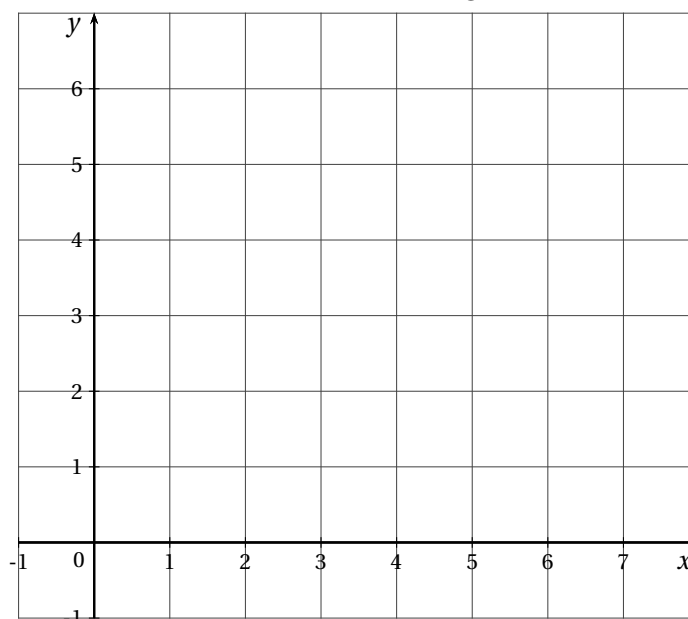
On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.

- Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0	4	6
signe de $f'(x)$	—	0	+

- a) Donner le tableau de variations de la fonction f . On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.
- b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 6.
- c) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.

On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

Donner le tableau de variation de la fonction g . On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.

b) Déterminer $g'(0)$.

EXERCICE 16

PARTIE A

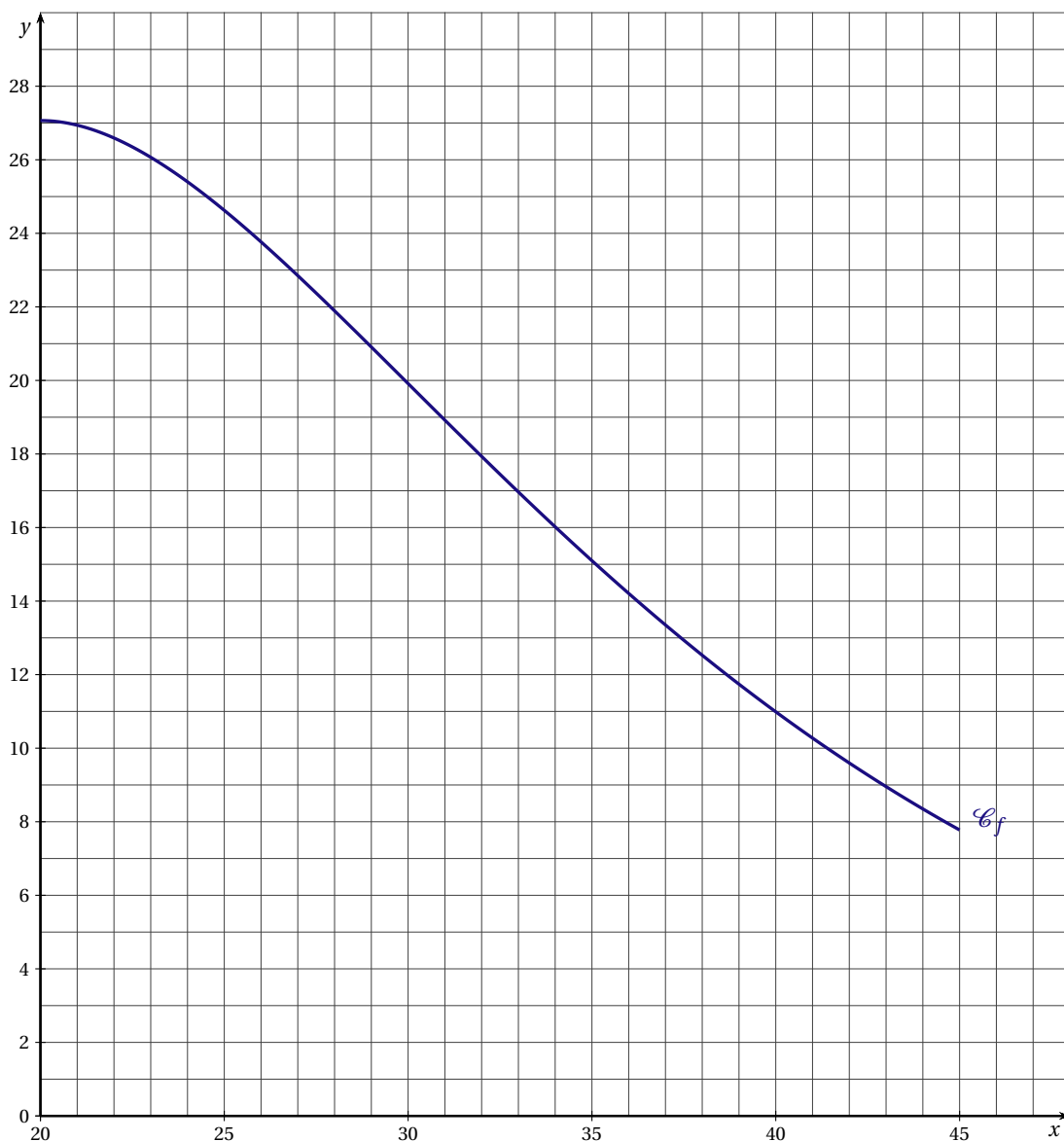
Une entreprise fabrique un nouvel article. Le coût moyen de fabrication de chaque article est de 15 euros. L'entreprise envisage de vendre chaque article entre 20 euros et 45 euros.

Avant la commercialisation l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée en fonction du prix de vente.

L'étude a permis d'établir que, si chaque article est vendu au prix de x euros, la quantité d'articles demandés $f(x)$, en milliers d'unités, s'exprime par :

$$f(x) = (20x - 200)e^{-0,1x}.$$

La fonction de demande f est définie sur l'intervalle $[20; 45]$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Si l'entreprise propose un prix de vente de 40 euros :
 - a) calculer le nombre d'articles demandés arrondi à la centaine d'articles près.
 - b) Estimer alors le bénéfice réalisé.
2. a) On note f' la dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[20; 45]$, $f'(x) = (40 - 2x)e^{-0,1x}$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[20; 45]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 11$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[20; 45]$.
b) En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer le prix de vente d'un article pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 11 000 unités.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	Dériver $[(40 - 2x) \cdot \exp(-0.1x)]$
	$\left(\frac{x}{5} - 6\right) \cdot \exp(-0.1x)$

Utiliser ce résultat pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

PARTIE B

On appelle fonction d'offre la fonction g , définie sur l'intervalle $[20; 45]$, par : $g(x) = x - 18$.

Le nombre $g(x)$ est le nombre de milliers d'articles que l'entreprise est prête à produire pour un prix de vente unitaire de x euros.

1. Tracer sur le graphique précédent la représentation graphique de la fonction g .
2. On appelle prix d'équilibre le prix unitaire x d'un article pour lequel l'offre est égale à la demande.
 - a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
 - b) En déduire une valeur approchée au millier près, du nombre d'articles que l'entreprise peut espérer vendre au prix d'équilibre.
 - c) Estimer alors le bénéfice réalisé.

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - e^{-0,5x^2}$

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) On considère l'algorithme suivant :

```

a ← 0
b ← 1
Tant que b - a > 10-3
  m ← (a + b) / 2
  Si f(a) × f(m) < 0 alors
    b ← m
  Sinon
    a ← m
Fin si
Fin Tant que
  
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme les valeurs des variables a et b sont $a \approx 0,7529$ et $b \approx 0,7539$.
Que signifie ce résultat?

4. Étudier la convexité de la fonction f .
5. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

EXERCICE 18

(D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017)

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1; 25]$ par $f(x) = 10 - \frac{e^{0,2x+1}}{x}$.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$f(x) : 10 - e^{(0.2x + 1)/x}$
$x \rightarrow 10 - \frac{\exp(0.2x + 1)}{x}$
factoriser(deriver($f(x)$))
$\frac{\exp(0.2x + 1) * (1 - 0.2x)}{x^2}$
factoriser (deriver(deriver($f(x)$)))
$\frac{\exp(0.2x + 1) * (-x^2 + 10x - 50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1; 25]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1; 25]$.
On arrondira les valeurs au millièm.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.
 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1; 5]$.
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5; 25]$.
 - c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α .
 - d) En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle $[1; 25]$.

PARTIE B

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.

On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus.

La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x \geq 1$.

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société?
Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu?
2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.

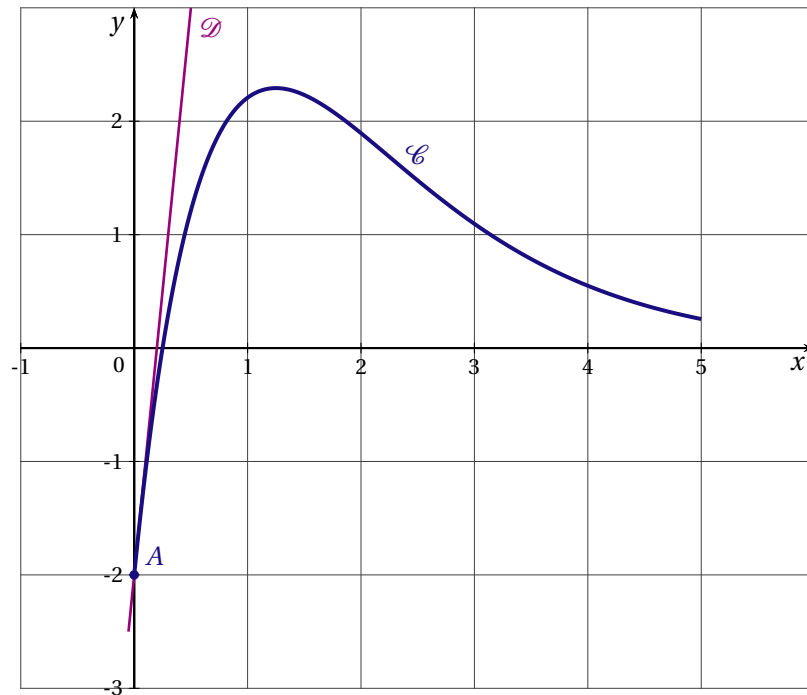
EXERCICE 19

(D'après sujet bac Polynésie 2017)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$, où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0; -2)$.

La droite $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)e^{-x}$$

- b) Dédurre des questions précédentes que $a = 8$.
- c) Donner l'expression de $f'(x)$.
3. a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$. On pourra faire un tableau.
- b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
- c) Résoudre sur l'intervalle $[0; 5]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10) e^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

- a) Donner l'expression de f'' , fonction dérivée seconde de la fonction f .
- b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0; 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)e^{-x}$$

- a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal?
 - b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal?
- On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

EXERCICE 20

(D'après sujet bac Pondichéry 2016)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (*Bio Bois Énergie*) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.

L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

— Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

— Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.

La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

— On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

PARTIE A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathcal{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O .

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

PARTIE B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$.
b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1; 15]$.
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1; 15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 15]$.

Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c) Dédire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1; 15]$.

PARTIE C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note D' sa fonction dérivée.

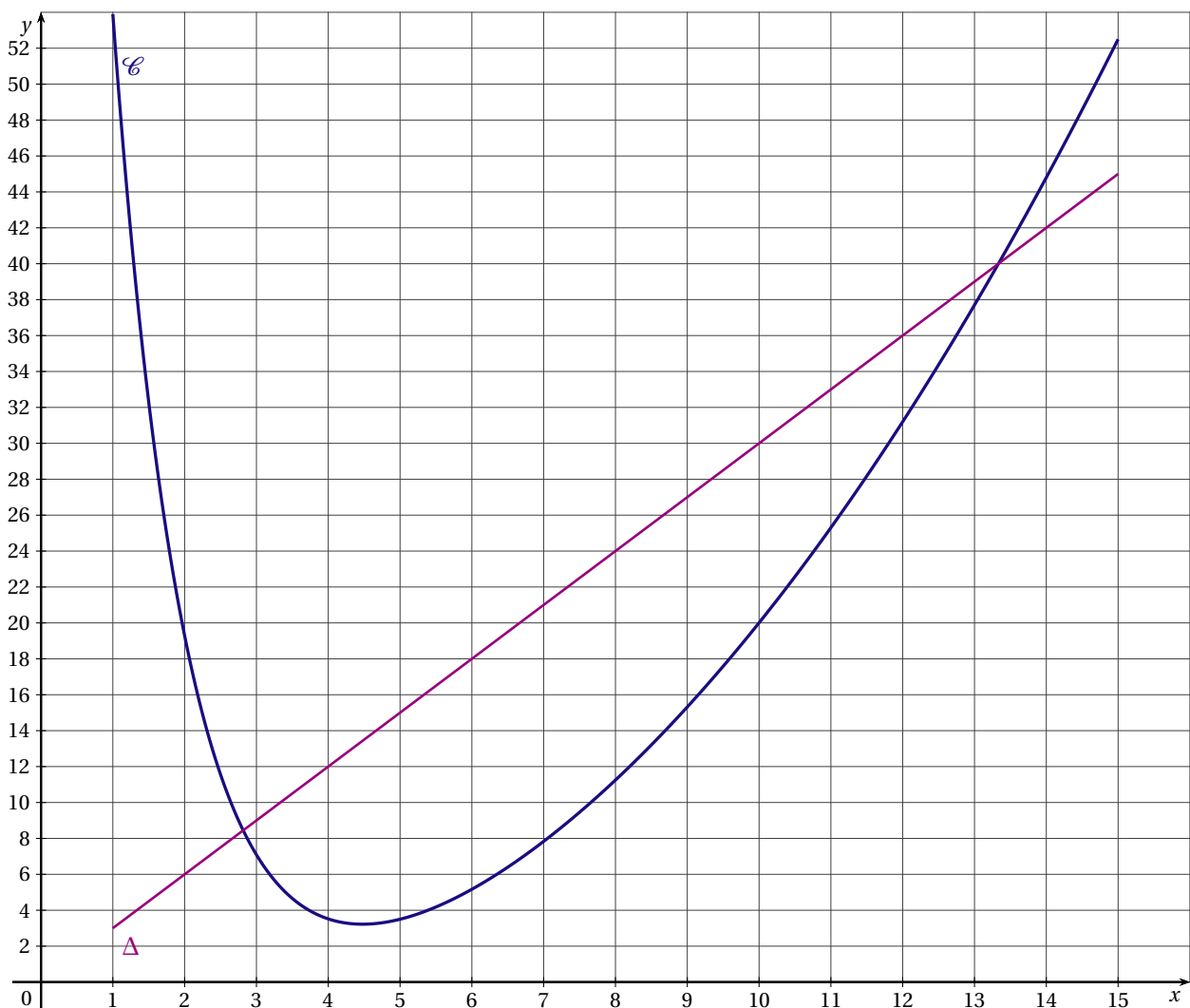
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.

3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1; 15]$.

4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal?

On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.



Chapitre 4

PROBABILITÉS DISCRÈTES

I	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	61
1	définition	61
2	formule des probabilités composées	61
II	FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES	62
1	cas de deux évènements	62
2	partition	62
3	formule des probabilités totales	62
III	REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ	63
IV	ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS	64
1	indépendance de deux évènements	64
2	propriété	64
3	loi binomiale	64
	EXERCICES	66

I PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

1 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :

Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.

Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.

Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?

Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ».

— 12% des articles ont un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = 0,12$.

— 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = 0,06$ et $p(E) = 0,08$.

La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cup E) = p(F) + p(E) - p(F \cap E) \quad \text{d'où} \quad p(F \cap E) = 0,08 + 0,06 - 0,12 = 0,02$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2 FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade?

Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade »;

Nous avons $p(V) = 0,85$ et $p_V(M) = 0,02$.

La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p(V \cap M) = 0,02 \times 0,85 = 0,017$$

II FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

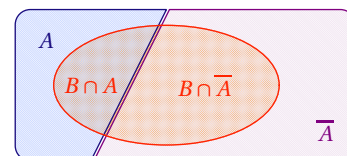
Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$
d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$



2 PARTITION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

- Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\bar{A}$ forment une partition de Ω .
- Si les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^n p(A_i) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω ,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

EXEMPLE

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable?

Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »

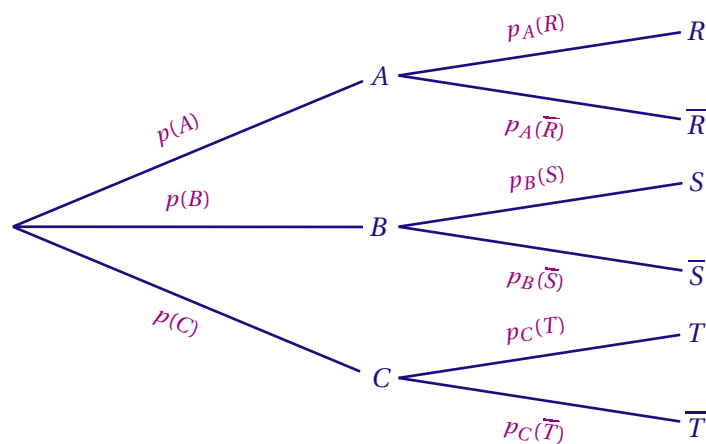
Les évènements A , B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(B) + p_C(S) \times p(C) \\ &= 0,15 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,1 = 0,2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

III REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



- La racine de l'arbre est l'univers Ω
- Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S, \bar{S}\}$ est une partition de l'évènement B .
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

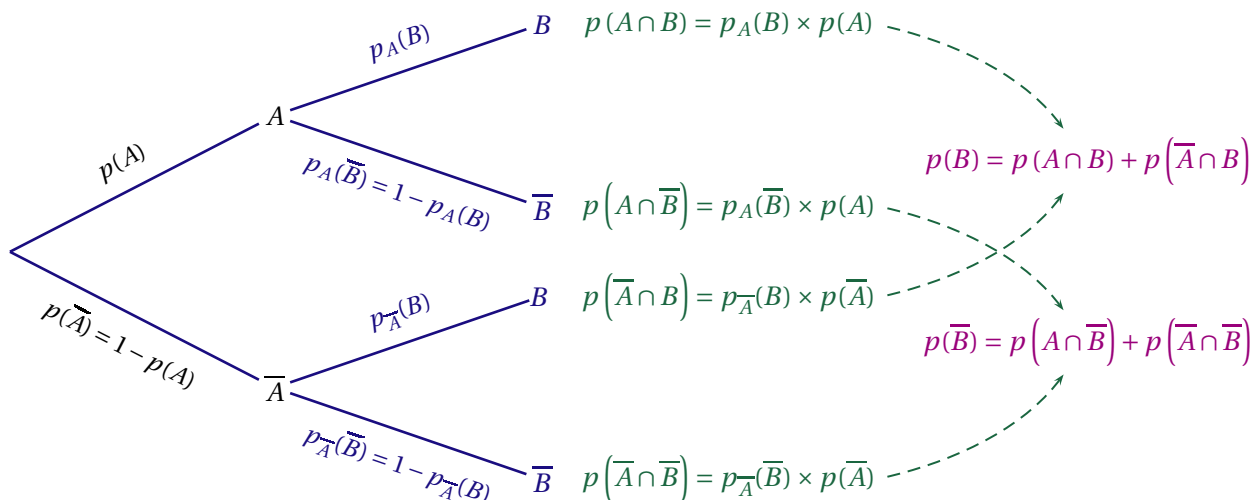
RÈGLES

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

PROBABILITÉS COMPOSÉES

PROBABILITÉS TOTALES



IV ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

1 INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 PROPRIÉTÉ

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$$

3 LOI BINOMIALE

SCHÉMA DE BERNOULLI

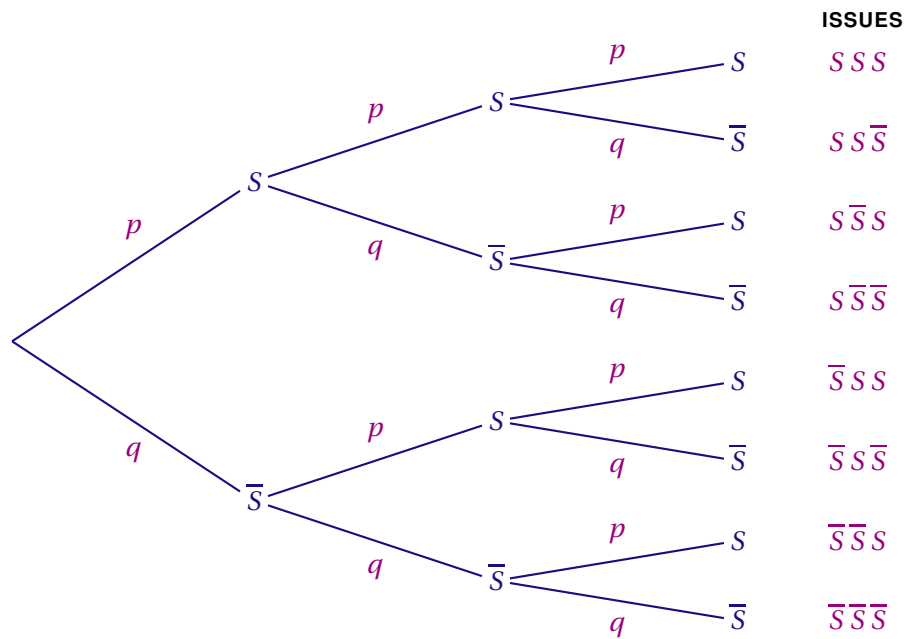
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes s'appelle un schéma de Bernoulli.

EXEMPLE

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.

La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'échec est $p(\bar{S}) = 1 - p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS; SS\bar{S}; S\bar{S}S; \bar{S}SS; S\bar{S}\bar{S}; \bar{S}S\bar{S}; \bar{S}\bar{S}S; \bar{S}\bar{S}\bar{S}\}$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

On répète successivement n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves de Bernoulli répétées.

Dans l'exemple précédent, il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins pour lesquels il y a deux succès

LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès de chaque épreuve est p .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p .

Cette loi est notée $\mathcal{B}(n; p)$. Elle est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n$$

Remarque :

L'évènement « obtenir au moins un succès » est l'évènement contraire de l'évènement F « obtenir n échecs consécutifs » d'où

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

EXEMPLE

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathcal{B}(4; p)$ de paramètres 4 et p (avec $q = 1 - p$) est :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	q^4	$4 \times p \times q^3$	$6 \times p^2 \times q^2$	$4 \times p^3 \times q$	p^4

EXERCICE 1

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.
2. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.

EXERCICE 2

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 12 % des bovins ont la maladie M;
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas;
- 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
 - a) pour un animal d'être malade si il réagit au test;
 - b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

EXERCICE 3

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 20 % des bovins d'un troupeau sont malades;
- 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif;
- 1 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 4

D'après une enquête sur le marché de l'emploi en France en 2016 :

- 51,8 % des personnes en emploi sont des hommes;
- 91,8 % des hommes en emploi travaillent à temps plein;
- 69,9 % des femmes en emploi travaillent à temps plein.

1. On consulte la fiche d'une personne en emploi en 2016.
 - a) Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme qui travaille à temps partiel?
 - b) Quelle est la probabilité que cette personne travaille à temps partiel?

2. On consulte la fiche d'une personne qui travaille à temps partiel, quelle est la probabilité que cette personne soit une femme?

EXERCICE 5

D'après une étude de la direction du tourisme concernant l'ensemble des résidents Français :
Est défini comme "voyage", tout départ du domicile, retour à celui-ci avec au moins une nuit passée en dehors.

Ces voyages se décomposent en "séjours" de deux sortes :

- Séjours courts définis par le fait d'avoir passé entre une nuit et trois nuits en lieu fixe;
- Séjours longs définis par le fait d'avoir passé au moins quatre nuits en lieu fixe.

Le mode d'hébergement d'un séjour peut être marchand (hôtel, camping, gîte etc ...) ou non marchand.

On considère que sur l'ensemble des résidents Français qui ont effectué au moins un voyage :

- Les séjours courts représentent 55% de l'ensemble des séjours;
- 43% des séjours longs se font en hébergement marchand;
- 36,4% de l'ensemble des séjours se font en hébergement marchand.

On interroge au hasard, un résident Français ayant effectué un voyage et on note :

- L : « l'évènement la personne a fait un séjour long »;
- M : l'évènement « le mode d'hébergement du séjour est marchand »;

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long en hébergement marchand.
b) En déduire la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour court en hébergement marchand.
4. Un résident Français effectue un séjour court, quelle est la probabilité qu'il choisisse un hébergement marchand?
5. On interroge au hasard, un résident Français ayant choisi un hébergement non marchand au cours de son séjour. Quelle est la probabilité que le séjour de cette personne soit un séjour long?

EXERCICE 6

PARTIE A

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 180 articles tirés de la production.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 180 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 180 articles le nombre d'articles défectueux.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité de chacun des évènements suivants :
 - a) « L'échantillon contient au moins un article défectueux »;
 - b) « L'échantillon contient au plus six articles défectueux »;
 - c) « L'échantillon contient plus de dix articles défectueux ».

PARTIE B

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,99;
- sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,96.

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.

On note les événements suivants :

- D : « L'article présente des défauts »;
- V : « L'article est mis en vente ».

$\overline{D}$ et $\overline{V}$ sont respectivement les événements contraires des événements D et V .

1. a) Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.
b) Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9615.
2. La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux.
Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif?

EXERCICE 7

(D'après sujet bac Antilles Septembre 2005)

Dans cet exercice, A et B étant des événements, $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de l'événement A , $P(A)$ la probabilité de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

Une entreprise fabrique des appareils en grand nombre. Une étude statistique a permis de constater que 10 % des appareils fabriqués sont défectueux.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de ces appareils avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 80 % des appareils défectueux, mais il élimine également à tort 10 % des appareils non défectueux. Les appareils non éliminés sont alors mis en vente.

On prend au hasard un appareil fabriqué et on note D l'événement « l'appareil est défectueux » et V l'événement « l'appareil est mis en vente ».

1. Construire un arbre pondéré rendant compte de cette situation.
2. a) Calculer $P(V \cap D)$ et $P(V \cap \overline{D})$.
En déduire que la probabilité qu'un appareil fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,83.
b) Calculer la probabilité qu'un appareil mis en vente après contrôle soit défectueux.
c) Vérifier que $P_V(D) \approx 0,24 \times P(D)$.
Rédiger une phrase comparant les probabilités pour un acheteur d'acquiescer un appareil défectueux suivant que l'entreprise applique ou non le test de contrôle.
3. Une entreprise décide d'appliquer le contrôle, tout en continuant à fabriquer le même nombre d'appareils. Elle fabriquait et vendait une quantité q_0 d'appareils au prix p_0 .
Les pourcentages demandés seront arrondis à l'unité.
 - a) Quelle est, en fonction de q_0 la nouvelle quantité q_1 d'appareils mis en vente après contrôle?
 - b) De quel pourcentage la quantité vendue a-t-elle diminué?
 - c) Quel doit être le nouveau prix p_1 (en fonction de p_0 pour que l'entreprise maintienne son chiffre d'affaires?
Quel est alors le pourcentage d'augmentation du prix de vente?

EXERCICE 8

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité.

Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

PARTIE A

On choisit au hasard successivement cinq pièces. On suppose que le nombre de pièces est suffisamment important pour que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.

1. Calculer la probabilité qu'un seul des cinq articles soit sans défaut.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des cinq articles soit sans défaut.

PARTIE B

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b .

On note :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a »;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b »;

$\bar{A}$ et $\bar{B}$ les évènements contraires respectifs de A et B .

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0,05$; $p(B) = 0,06$.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut »?
2. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
3. On prélève au hasard un article parmi ceux qui présentent le défaut a . Calculer la probabilité que cet article présente également le défaut b .
4. Un article sans défaut est vendu à 150€. Un article qui présente seulement le défaut a est vendu avec une remise de 30%, un article qui présente seulement le défaut b est vendu avec une remise de 40% et un article qui a les deux défauts n'est pas vendu.
 - a) Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X , d'un article.
 - b) Quel chiffre d'affaires l'entreprise peut-elle espérer réaliser sur la vente de 1000 articles?

EXERCICE 9

PARTIE A

L'étude réalisée pour une entreprise de matériel informatique sur l'utilisation d'un modèle A de disque dur externe de son catalogue a permis d'établir que :

- 65% des acquéreurs utilisent le disque dur avec un ordinateur portable.
- 40% des acquéreurs qui utilisent le disque dur avec un ordinateur portable le font pour un usage professionnel.
- 28% des acquéreurs utilisent le disque dur avec un ordinateur fixe et pour un usage professionnel.

On choisit au hasard la fiche d'un client ayant acheté ce modèle de disque dur et on note :

— M l'évènement : « le client utilise le disque dur avec un ordinateur portable »;

— T l'évènement : « le client utilise le disque dur pour un usage professionnel ».

1. Calculer la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui fait un usage professionnel du disque dur externe sachant qu'il l'utilise avec un ordinateur fixe.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur portable et pour un usage professionnel?
4. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel?
5. La fiche est celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur fixe?

PARTIE B

Cette entreprise commercialise également un modèle B de disque dur mécanique. L'utilisation de ce modèle sur des serveurs a permis d'établir un taux de défaillance annuel de 2%.

Un client commande 50 disques durs du modèle B. Le nombre de disques durs fabriqués est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler le choix des 50 disques durs à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de disques durs susceptibles d'être en panne pendant l'année.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $P(X = 1)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des disques durs achetés présente une défaillance au cours de l'année?

EXERCICE 10

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2017)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.

À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.

Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.

Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

- A : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;
- R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

On rappelle que si E est un événement, $p(E)$ désigne la probabilité de l'événement E et on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E .

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. On choisit au hasard un client de l'agence.
 - a) Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.
 - b) Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.
3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.

On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.

 - a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
 - b) Déterminer la probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.
 - c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.
4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.

On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.

 - a) Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b) Calculer l'espérance mathématique de Y . Interpréter le résultat.

EXERCICE 11

Avec 84,5 millions d'arrivées de visiteurs internationaux en 2015, la France est le pays le plus visité au monde.

Si on s'intéresse aux personnes résidentes à l'étranger qui sont en visite en France, on définit les notions suivantes :

- Les touristes sont les visiteurs non résidents passant au moins une nuit en France.
- Les excursionnistes sont les visiteurs non résidents qui ne passent pas de nuit en France.

Une enquête réalisée auprès des visiteurs résidents à l'étranger à leur sortie du territoire métropolitain a permis d'établir que :

- 79,2 % des visiteurs résident en Europe.
- Un tiers des visiteurs résidents européens sont touristes et les trois quarts des résidents non européens sont touristes.

On interroge au hasard un visiteur résident à l'étranger à sa sortie du territoire et on note :

- E l'évènement « le visiteur réside en Europe » ;
- T l'évènement « le visiteur est un touriste ».

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le visiteur réside en Europe et soit un touriste.
3. Montrer que la probabilité que le visiteur soit un touriste est égale à 0,42.
4. Le visiteur interrogé est un touriste, calculer la probabilité, arrondie au millième près, que ce touriste réside en Europe.

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats seront arrondis si nécessaire au millième près.

L'enquête a permis d'établir que 8,4% des touristes résident en Amérique.

On a interrogé au hasard trente touristes à leur sortie du territoire métropolitain.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de touristes résidents en Amérique.

1. On considère que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner la probabilité $P(X = 2)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des touristes interrogés réside en Amérique ?

EXERCICE 12

Une entreprise agroalimentaire fabrique des plats cuisinés destinés à la consommation. Ces préparations culinaires sont d'abord conditionnées dans des emballages sous vide puis étiquetées.

Le conditionnement de ces préparations peut présenter deux défauts : un emballage sous vide défectueux ou l'absence de la date limite de consommation sur l'étiquette.

PARTIE A

Une étude statistique a permis de constater que :

- 6 % des préparations ne sont pas correctement emballées ;
- la date limite de consommation est absente sur l'étiquette de 18 % des préparations qui ne sont pas correctement emballées et sur 3 % des préparations correctement emballées.

On prélève au hasard une préparation destinée à la vente et on considère les événements suivants :

- E : « le plat est correctement emballé » ;
- D : « l'étiquette comporte une date limite de consommation ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap \overline{D}$.
2. Montrer que la probabilité d'une date limite de consommation absente sur l'étiquette est égale à 0,039.
3. La date limite de consommation ne figure pas sur l'étiquette, quelle est la probabilité que la préparation soit correctement emballée ?

PARTIE B

Les préparations culinaires correctement emballées sont commercialisées par l'entreprise.
On rappelle que parmi celles-ci, 3 % n'ont pas de date limite de consommation.

Un supermarché passe une commande de 60 plats cuisinés. Le stock est suffisamment important pour assimiler cette commande à un tirage aléatoire avec remise.

Pour un lot de 60 préparations, on note X la variable aléatoire égale au nombre de préparations sur lesquelles on note l'absence de date limite de consommation.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité $P(X = 0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geq 1)$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geq 6)$.

EXERCICE 13

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si nécessaire à 10^{-4} près.

D'après un document de l'Assurance Maladie concernant les accidents du travail de l'année 2015 on constate que :

- L'indice de fréquence des accidents du travail pour l'ensemble des salariés est de 33,9 accidents du travail pour 1000 salariés.
- Avec 8 % des salariés, la branche d'activité du Bâtiment et travaux publics est celle qui a l'indice de fréquence des accidents du travail le plus fort (61,9 accidents du travail pour 1000 salariés).

On consulte au hasard le dossier d'assurance maladie d'un salarié et on note :

- B l'évènement « le dossier est celui d'un salarié du Bâtiment » ;
- A l'évènement « le dossier est celui d'un salarié victime d'un accident du travail ».

PARTIE A

1. Donner les probabilités suivantes $P(A)$, $P(B)$ et $P_B(A)$.
2. Calculer la probabilité que le dossier soit celui d'un salarié du Bâtiment victime d'un accident du travail.
3. Le dossier est celui d'un salarié victime d'un accident du travail. Quelle est la probabilité que ce soit celui d'un salarié du Bâtiment ?

PARTIE B

Lors d'un accident du travail, un taux d'incapacité permanente supérieur à 10 % ($IP \geq 10\%$) a pour conséquence l'attribution d'une rente.

En 2015, 2,7% des accidents du travail ont donné droit à l'attribution d'une rente.

On consulte au hasard cent dossiers de salariés ayant eu un accident du travail en 2015.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de dossiers donnant droit à l'attribution d'une rente.

1. On considère que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Donner la probabilité qu'au plus trois dossiers donnent droit à l'attribution d'une rente.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins six dossiers donnent droit à l'attribution d'une rente.

EXERCICE 14

Une entreprise produit en grande quantité des composants électroniques destinés à l'industrie. Un contrôle de qualité a permis d'établir que les composants fabriqués pouvaient présenter au maximum deux défauts : la puce électronique est défectueuse ou un défaut d'assemblage. On a constaté d'autre part, que 1,6 % des composants fabriqués avaient une puce électronique défectueuse et que 3,5 % des composants dont la puce n'est pas défectueuse présentaient un défaut d'assemblage. Si le composant ne présente aucun défaut, on dit qu'il est conforme. Sinon, le composant est dit hors d'usage.

PARTIE A

On prélève au hasard un composant produit par cette entreprise. Tous les composants ont la même probabilité d'être prélevés.

On note :

- D l'évènement « la puce électronique est défectueuse » ;
- C l'évènement « le composant est conforme ».

Calculer la probabilité arrondie à 10^{-3} près de la probabilité que le composant soit hors d'usage.

PARTIE B

On prélève 100 composants au hasard. La production est suffisamment importante pour assimiler ce choix de 100 composants à un tirage avec remise de 100 composants.

On suppose que la probabilité qu'un composant soit hors d'usage est 0,05.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 composants, associe le nombre de composants hors d'usage.

1. a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
2. Calculer la probabilité de l'évènement A : « tous les composants prélevés sont conformes ».
3. Calculer la probabilité $P(X = 5)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
4. Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins deux composants prélevés sont hors d'usage ».
5. On constate que dans cet échantillon, 8 composants sont hors d'usage.
 - a) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.
 - b) Peut-on rejeter l'hypothèse que 5 % des composants fabriqués sont hors d'usage ?

Rappel :

Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence correspondant à la réalisation sur un échantillon de taille n , d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ où :

a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;

b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

EXERCICE 15

Une usine fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces métalliques pour l'industrie.

PARTIE A

Les pièces sont fabriquées par deux machines a et b .

On considère que 2 % des pièces produites par la machine a sont défectueuses et que 7 % des pièces produites la machine b sont défectueuses.

La machine a plus récente assure 80 % de la production quotidienne.

On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des pièces produites par les deux machines pendant une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

- A : « la pièce prélevée a été fabriquée par la machine a » ;
- D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité que la pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse et qu'elle ait été fabriquée par la machine a .
2. En déduire la probabilité que la pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse.
3. La pièce prélevée au hasard dans la production de la journée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine a ?

PARTIE B

On considère un stock important de pièces métalliques. On admet que 3 % des pièces de ce stock sont défectueuses.

On prélève au hasard 200 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer l'espérance mathématique de X . Que représente ce nombre ?
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer :
 - a) la probabilité que dans un tel prélèvement on trouve moins de six pièces défectueuses ;
 - b) la probabilité que dans un tel prélèvement on trouve plus de dix pièces défectueuses.
5. Ci-dessous est donné un extrait du tableau donnant les valeurs des probabilités $P(X \leq k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0; 200]$.

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
0	0,002 26	6	0,606 32	12	0,992 17
1	0,016 25	7	0,746 10	13	0,996 90
2	0,059 29	8	0,850 40	14	0,998 85
3	0,147 15	9	0,919 22	15	0,999 60
4	0,280 98	10	0,959 87	16	0,999 87
5	0,443 23	11	0,981 59	17	0,999 96

- a) Déterminer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 200 soit compris entre 3 et 8.
- b) Calculer $P_{3 \leq X \leq 8}(X \geq 6)$. Interpréter le résultat.
- c) Dans ce lot, on trouve neuf pièces défectueuses. Faut-il remettre en question l'hypothèse selon laquelle 3 % des pièces de ce stock sont défectueuses ?

Chapitre 5

FONCTION LOGARITHME

I	FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	76
1	définition	76
2	conséquences immédiates	76
3	variation	77
II	PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES	77
1	propriété fondamentale	77
2	autres règles de calcul	78
III	ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	78
1	dérivée	78
2	variation	78
3	courbe représentative	79
	EXERCICES	80

I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

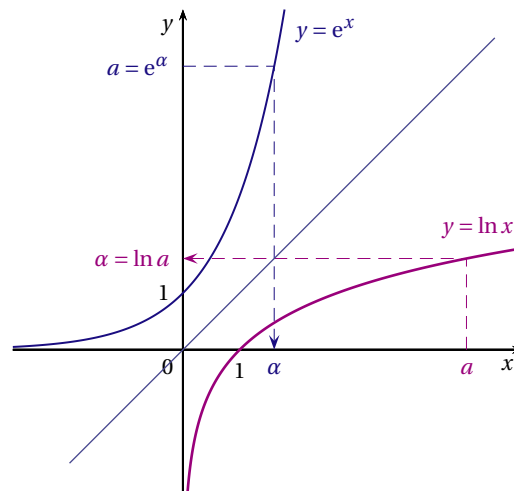
La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x , $e^x \in]0; +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = e^y$$

REMARQUES

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

2 CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

1. Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

* DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff e^y = x$. Soit $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x , $e^x = y \iff x = \ln(y) = \ln(e^x)$. Soit $\ln(e^x) = x$.

EXEMPLES

$$e^{\ln 5} = 5; \quad e^{-\ln 0,1} = \frac{1}{e^{\ln 0,1}} = \frac{1}{0,1} = 10; \quad \ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5; \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1.$$

3 VARIATION

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

✱ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Ainsi, $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que $\ln a < \ln b$.

CONSÉQUENCES

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$

$\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

EXEMPLE

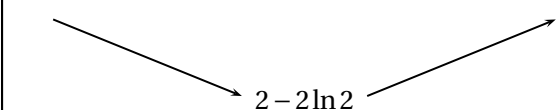
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x$.

La fonction f est dérivable et pour tout réel x , $f'(x) = e^x - 2$.

On a donc : $f'(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$.

On a également $f'(x) < 0 \iff e^x < 2 \iff x < \ln 2$.

Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

II PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,

Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$, $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$

D'autre part,

$$a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

D'où

$$e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$$

Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

REMARQUE

John Napier publia en 1614 une méthode de calcul transformant les multiplications en additions : les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre).

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$. Or $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0 \iff \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

2. Soient $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,

$$e^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } e^{n \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^n = a^n$$

Donc $e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n \ln a$.

4. Soit $a > 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = a$ donc

$$\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln \sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

- **On admet** que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.
- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.
 Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$
 Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2 VARIATION

La fonction $\ln$ est dérivable donc continue sur $]0; +\infty[$.

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Comme $\ln 1 = 0$, on en déduit les propriétés suivantes :

Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$

$\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$

$\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$

D'où le tableau de variation de la fonction $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	

CONSÉQUENCE

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel k , l'équation $\ln x = k$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution $x = e^k$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathcal{C}_{\ln}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

— $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(e;1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.

Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ est $\ln'(e) = \frac{1}{e}$.

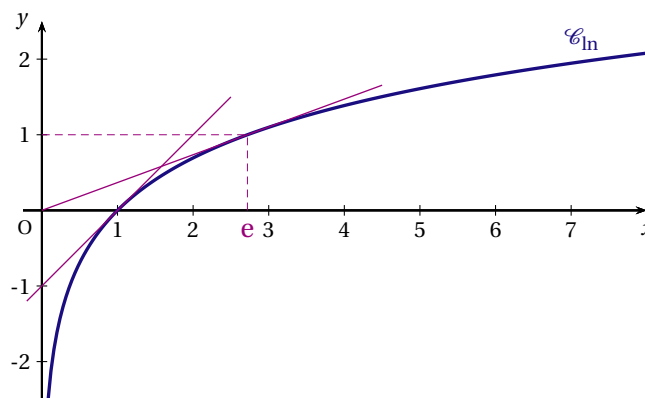
Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \iff y = \frac{1}{e}x$$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

— Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction $\ln$ est strictement décroissante.

Par conséquent, la fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$.



EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\begin{aligned} A &= \ln 10\,000 - \ln 0,1 + \ln 0,01; & B &= \ln(32) - 7\ln(2) - 4\ln\left(\frac{1}{8}\right); & C &= 8\ln(\sqrt{3}) + 5\ln(9) - \ln(9\sqrt{3}); \\ D &= \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2}); & E &= 2\ln\sqrt{8} - 3\ln\left(\frac{1}{4}\right); & F &= \frac{\ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1)}{2}; \\ G &= \frac{\ln 5 - \ln 10}{2\ln(\sqrt{2})}; & H &= \frac{\ln 100 - 2\ln 2}{\ln 5}; & I &= \frac{\frac{1}{3}\ln 9 - 4\ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{3}}{\ln 3}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \ln(e^{-3}) + e^{-\ln 2}; \quad B = \frac{\ln e}{\ln(e^2)} - \ln\left(\frac{1}{e}\right); \quad C = \ln(4e^2) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right); \quad D = \frac{\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)}{\ln 3} \times \frac{\ln 9}{e^2}$$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \text{a) } e^x = 5; & \text{b) } 2e^x = 0,2; & \text{c) } e^{2x-1} - 3 = 0; & \text{d) } (e^x)^2 = 0,25; & \text{e) } 2e^{x^2} - 4 = 0. \\ 2. \quad & \text{a) } e^{1-2x} = 3e^x; & \text{b) } 3e^{-2x} = 2e^{2+3x}; & \text{c) } \frac{5e^{3x+1}}{e^{2x}} = 4; & \text{d) } (e^{-x} + 1)(e^{2+3x} - 2) = 0. \end{aligned}$$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\text{a) } 4e^{2x+1} \leq 3; \quad \text{b) } 3e^{-2x} > 1; \quad \text{c) } (e^{2x})^3 - \frac{2}{e^x} \leq 0; \quad \text{d) } \frac{5e^{2-3x}}{e^{2x-1}} > 2; \quad \text{e) } 3e^{2x} - 7e^x + 2 \leq 0.$$

EXERCICE 5

Démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \text{Pour tout réel } x > 1, \ln(x^2 + x - 2) = \ln(x+2) + \ln(x-1) \\ 2. \quad & \text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

EXERCICE 6

1. Résoudre dans $]0; +\infty[$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :

$$\text{a) } \ln x = -1; \quad \text{b) } 2\ln x + 0,01 = 0; \quad \text{c) } 3\ln x = e^3; \quad \text{d) } 2(\ln x)^2 = 1; \quad \text{e) } (e^{2x} - 2)(\ln(2x) - 2) = 0.$$

2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ les inéquations suivantes :

$$\text{a) } 2\ln x \leq -2; \quad \text{b) } \ln 2x \leq -2; \quad \text{c) } \ln \frac{1}{x} - \ln x \geq 0; \quad \text{d) } \ln(3x) - 2\ln x < 5; \quad \text{e) } (\ln x)^2 + \frac{3\ln x}{2} - 1 \geq 0.$$

EXERCICE 7

Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } 15^x = 1000; \quad \text{b) } x^{15} = 1000; \quad \text{c) } 0,8^x = 16; \quad \text{d) } x^{0,8} = 16.$$

EXERCICE 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

$$\text{a) } 1,05^n \geq 1,5; \quad \text{b) } 0,92^n \leq 0,75; \quad \text{c) } \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2; \quad \text{d) } 0,2 \geq \left(1 - \frac{9}{100}\right)^n.$$

EXERCICE 9

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4% par an.
En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.

1. Pour tout entier naturel n , on note u_n la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015 + n)$. Exprimer u_n en fonction de n .
2. À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 %?

EXERCICE 10

En 2014, le parc informatique d'une entreprise était de 200 ordinateurs.

Pour renouveler ce parc et tenir compte des besoins de l'entreprise, chaque année le gestionnaire supprime 10 % des ordinateurs les plus anciens et achète 30 ordinateurs neufs.

Le nombre d'ordinateurs du parc informatique de cette entreprise est modélisé par la suite (u_n) où le terme u_n désigne le nombre d'ordinateurs disponibles au cours de l'année $(2014 + n)$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs en 2015 et en 2016.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 300$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 300 - 100 \times 0,9^n$.
3. En quelle année, le nombre d'ordinateurs disponibles dans cette entreprise sera-t-il supérieur à 250?

EXERCICE 11

(D'après sujet bac Centres Étrangers 2017)

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.

Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m^2 au 1^{er} janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2 .

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1^{er} janvier 2018.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1^{er} janvier de l'année $2017 + n$.
La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$.
2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1^{er} janvier de l'année 2017.

Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.

On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.

```

U ← ...
N ← 0
Tant que .....
    U ← ...
    N ← N + 1
Fin tant que
  
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 40$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et préciser le premier terme.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - c) Justifier que $u_n = 80 \times 0,9^n + 40$ pour tout entier naturel n .
4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $80 \times 0,9^n + 40 \leq 60$.

- b) En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1^{er} janvier de l'année 2017.
5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain? Justifier la réponse.

EXERCICE 12

(D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017)

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.

Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.

Le 1^{er} janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.

On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n , u_n est le nombre de vélos le 1^{er} janvier de l'année 2017 + n .

Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 30$.

1. a) Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
b) Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1^{er} janvier 2018?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n .
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
 - d) La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1^{er} janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.
Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.
 - a) Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
 - b) Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1^{er} janvier 2017 au 1^{er} janvier 2025.

EXERCICE 13

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2017)

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.

Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.

Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375 % de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.

On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013 + n)$ avec $u_0 = 4000$.

2. a) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,99625u_n + 10,2$.
b) Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3995,2$.
3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - 2720$.

- a) Montrer que pour tout entier naturel n , $d_{n+1} = 0,99625 \times d_n$.
 - b) Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Calculer d_0 .
 - c) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de d_n , en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. a) Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.
- b) À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares? Préciser la démarche utilisée.

EXERCICE 14

Une entreprise produit des articles, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut d'assemblage ou un défaut de finition, à l'exclusion de tout autre défaut.

Une étude statistique a permis de constater que sur l'ensemble de la production :

- 9 % des articles présentent les deux défauts.
- 15 % des articles présentent un défaut d'assemblage.
- 4 % des articles n'ayant pas un défaut d'assemblage ont un défaut de finition.

On choisit un article au hasard et on note :

- A l'évènement : « l'article a un défaut d'assemblage »;
- F l'évènement : « l'article a un défaut de finition ».

1. a) Calculer $p(F)$.
- b) Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup F$: « l'article est de fabrication défectueuse ».
2. On prélève au hasard n articles. On suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages successifs indépendants avec remise.
 - a) On note p_n la probabilité que l'un au moins de ces n articles soit défectueux.
Justifier que $p_n = 1 - 0,816^n$.
 - b) Quel est le nombre minimal d'articles qu'il faut prélever pour que la probabilité que l'un au moins de ces articles soit défectueux soit supérieure à 0,98?

EXERCICE 15

(D'après sujet bac Asie 2017 modifié)

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

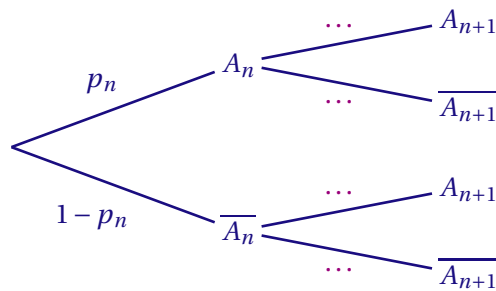
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle », On admet que

- 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante;
- 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement « l'élève a choisi « Approfondissement » la n -ième semaine » et p_n la probabilité de l'évènement A_n . On a alors $p_1 = 0,2$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,4$.
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme u_1 .
 - b) En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n , puis l'expression de p_n en fonction de n .
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant où N est un entier :

```

P ← 0,2
Pour I allant de 2 à N
    P ← 0,5P + 0,2
Fin Pour
  
```

- a) Donner la valeur de la variable P à la fin de l'exécution de cet algorithme lorsque $N = 5$.
- b) Modifier l'algorithme afin qu'il calcule le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9.
- c) En résolvant une inéquation, déterminer à partir de combien de semaines, le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9?

EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$:

- a) $f(x) = x \ln x - x$;
- b) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$;
- c) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$;
- d) $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln(x)$

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5x - 2x \ln(x)$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse e .
Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Soit a un réel strictement positif.
 - a) Montrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a a pour équation

$$y = (2a \ln(a) + a)x - a^2(\ln(a) + 1)$$

- b) Déterminer a pour que la tangente à la courbe au point d'abscisse a passe par l'origine du repère.

EXERCICE 19

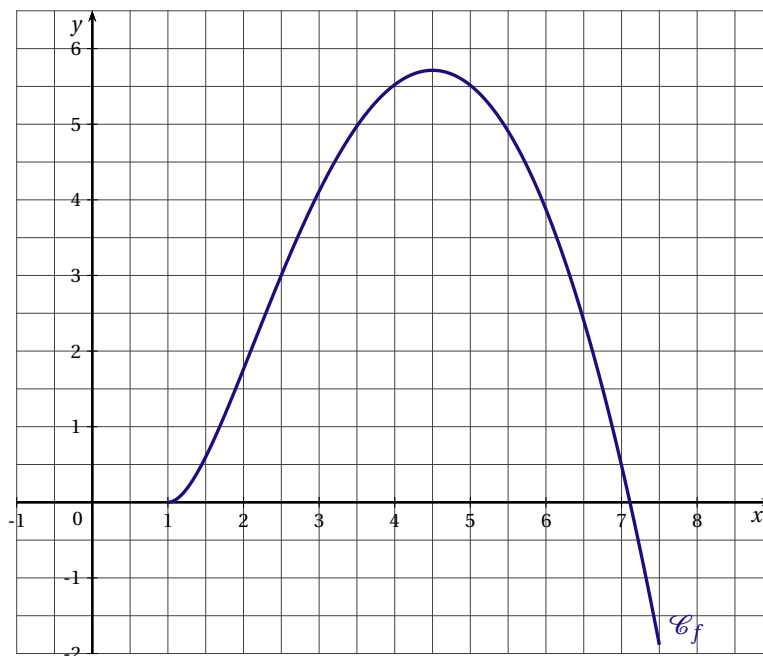
Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

- Résoudre sur l'intervalle I , l'inéquation $f(x) \geq 1$.
- On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
 - Étudier les variations de la fonction f sur I .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Donner la valeur arrondie au centième de α .

EXERCICE 20

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7,5]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9\ln(x) - 10$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



- Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7,5]$, on a $f'(x) = \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x}$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 7,5]$.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
- Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

PARTIE B : Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 750 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour x centaines de pièces fabriquées et vendues ($1 \leq x \leq 7,5$), est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

- Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.
- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[7; 7,5]$.
 - Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-2} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

```

a ← 7
b ← 7,5
Tant que b - a > 0,01
    m ← (a + b) / 2
    Si f(m) < 0
        .....
    Sinon
        .....
    Fin Si
Fin Tant que
    
```

c) Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau ci-dessous.

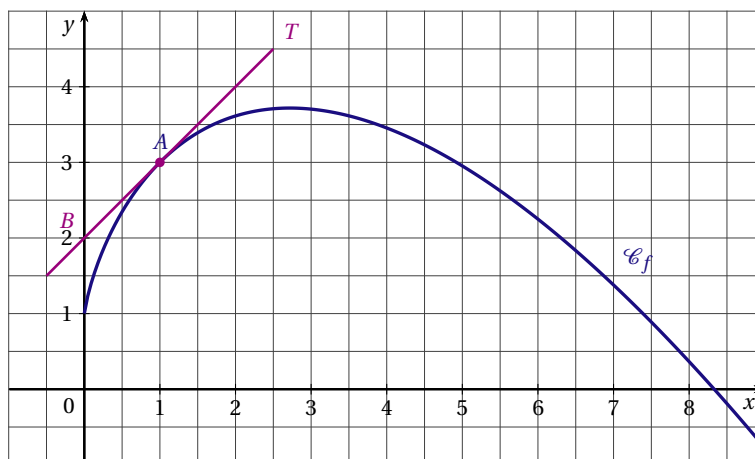
	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$ à 10^{-3} près	a	b	$b - a$
Initialisation			7	7,5	0,5
1 ^{re} boucle « Tant que »	7,25				
2 ^e boucle « Tant que »					
⋮					

d) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

EXERCICE 21

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 2x - x \ln(x) + 1$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.



- La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(1;3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0;2)$. Déterminer $f'(1)$.
- Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - \ln(x)$.
 - Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x) \leq 0$.
 - Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Étudier la convexité de la fonction f .

EXERCICE 22

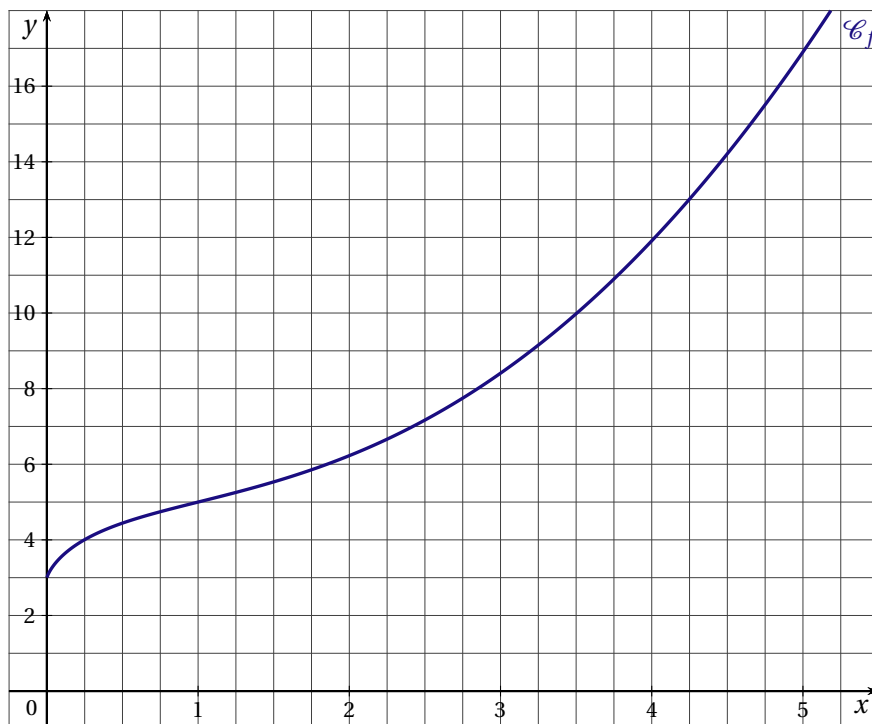
PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(x - 2\ln x + 1) + 3$

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f .
2. Étudier les variations de la fonction f' .
3. En déduire que la fonction f est monotone.

PARTIE B

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet sur $]0; +\infty[$ une seule tangente passant par l'origine du repère. Tracer cette tangente dans le repère précédent.
2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite T .

PARTIE C

Sur l'intervalle $]0; 5]$, le coût de production, en milliers d'euro, pour x milliers d'articles fabriqués chaque jour par une usine, est modélisé par $f(x)$.

On note $C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$ le coût moyen de production avec $x \in]0; 5]$.

Quel doit être le prix de vente minimal d'un article pour assurer la rentabilité de cette production?

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 8\ln(x) + \frac{16}{x} - 16\ln(2)$.

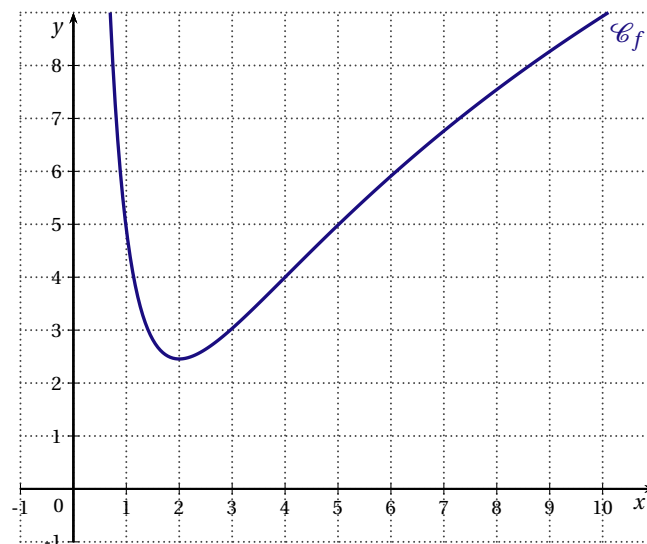
Sa courbe représentative, notée $\mathcal{C}_f$, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.

PARTIE A

1. On note f' la dérivée de f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de la fonction f .

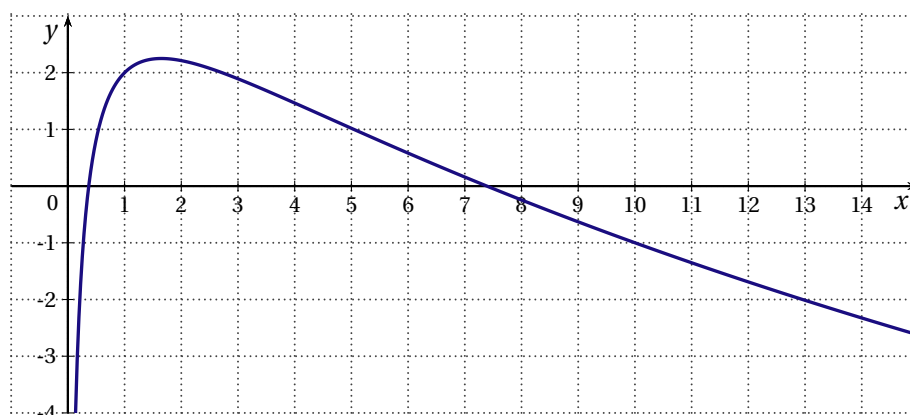
PARTIE B

- La droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point A d'abscisse a .
 - Justifier que a est solution de l'équation $\frac{8(a-2)}{a^2} = 1$.
 - Déterminer la valeur de a .
- Étudier la convexité de la fonction f .
- Déduire des deux questions précédentes, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq x$



EXERCICE 24

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1 + \ln x)(2 - \ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



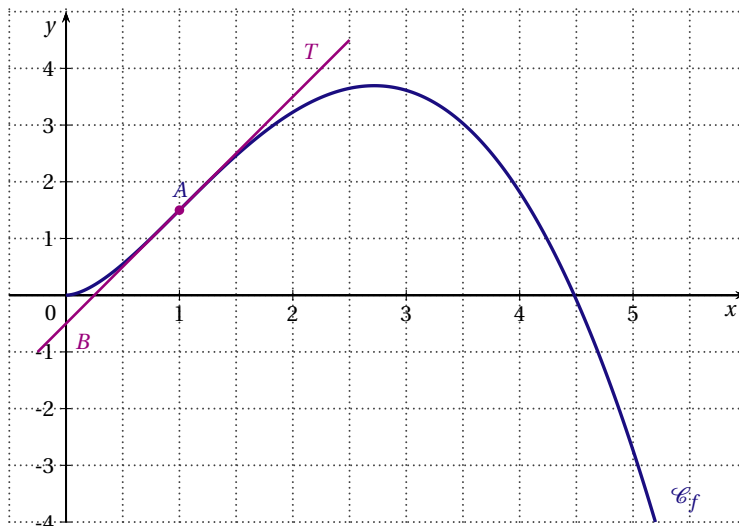
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
 - Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x .
 - En déduire les variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.

4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + X)(2 - X) = 2$.
- c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

EXERCICE 25

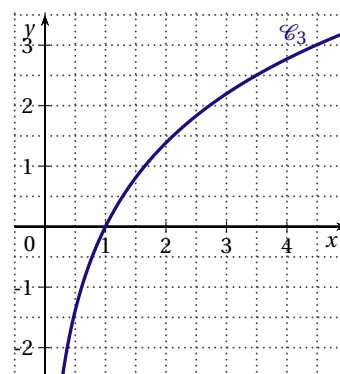
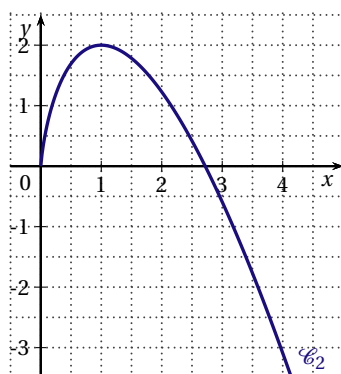
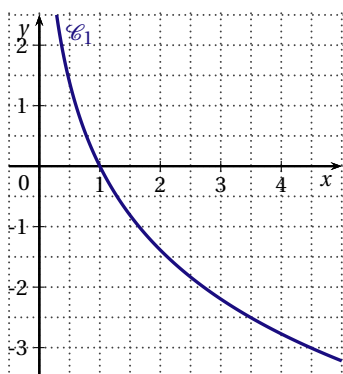
PARTIE A

La courbe $\mathcal{C}_f$, tracée ci-dessous dans un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.



La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f , déterminer $f'(1)$.
2. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
3. Une seule des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée seconde f'' : laquelle?



PARTIE B

La fonction f de la partie A est définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 2x \times (1 - \ln(x))$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. On note f'' la dérivée seconde de f sur $]0; +\infty[$. Calculer $f''(x)$ puis, étudier la convexité de la fonction f .

Chapitre 6

CALCUL INTÉGRAL

I	INTÉGRALE ET AIRE	93
1	unité d'aire	93
2	intégrale d'une fonction continue et positive	93
3	intégrale d'une fonction continue et négative	95
4	lien entre intégrale et dérivée	95
II	PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE	96
1	définition	96
2	ensemble des primitives d'une fonction	96
3	primitive vérifiant une condition	97
III	CALCUL DE PRIMITIVES	97
1	primitives des fonctions usuelles	97
2	linéarité	97
3	primitives des formes usuelles	98
IV	INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE	98
1	définition	98
2	premières propriétés	99
V	PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE	99
1	positivité	99
2	linéarité	99
3	relation de Chasles	100
4	ordre	100
VI	INTÉGRALE ET MOYENNE	101
1	inégalités de la moyenne	101
2	valeur moyenne	102
	EXERCICES	103

ACTIVITÉ 1

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 4$.

1. f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{5}{2}$.
2. f est la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$.

ACTIVITÉ 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal

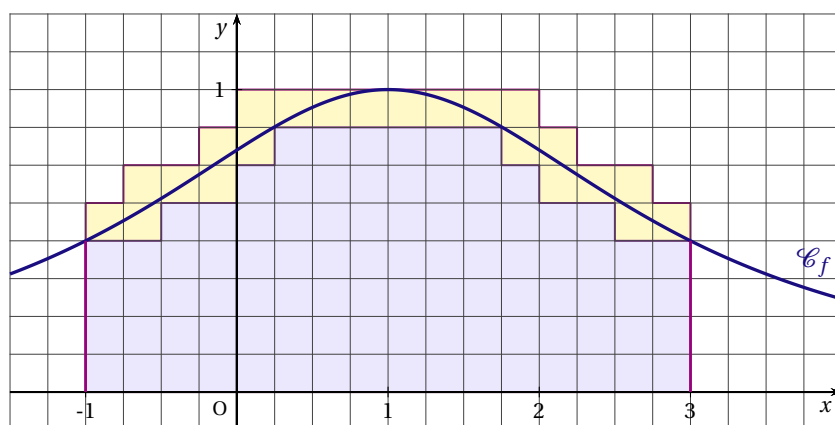
PARTIE A

1. Étudier le signe de $f(x)$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f

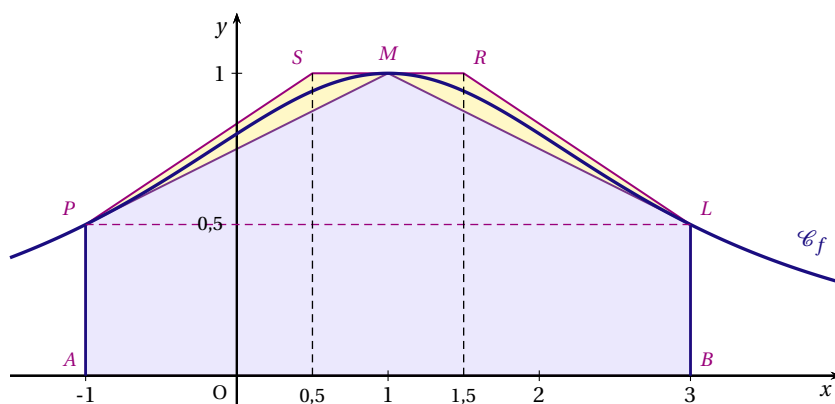
PARTIE B

On cherche à déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.

1. À l'aide du quadrillage, déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.



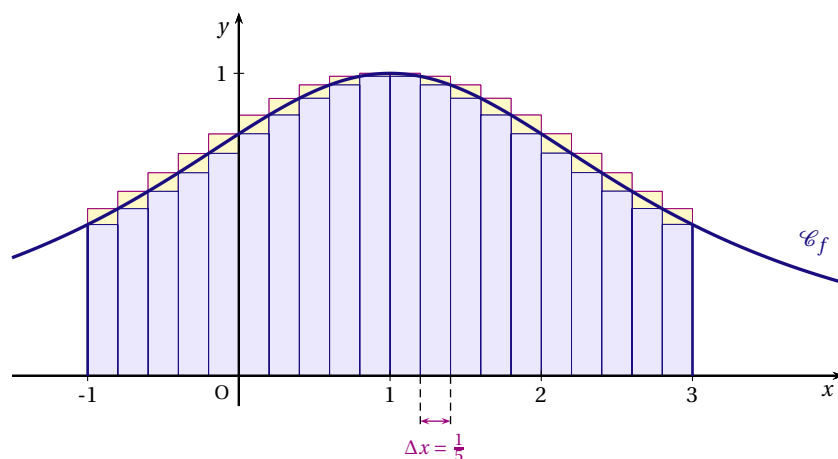
2. À l'aide des deux polygones, déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.



3. Encadrement par deux familles de rectangles.

On subdivise l'intervalle $[-1; 3]$ en 20 intervalles de même amplitude $\Delta x = 0,2$.

Sur chacun des intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ avec $0 \leq k < 20$, le rectangle inscrit sous la courbe a pour longueur le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ et le rectangle circonscrit a pour longueur le maximum de la fonction f sur le même intervalle.



a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x_k	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{181}$	$\frac{25}{41}$	$\frac{100}{149}$	$\frac{25}{34}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{29}$				1
x_k	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	$\times$
$f(x_k)$											$\times$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}_I$, somme des aires des rectangles inscrits et l'aire $\mathcal{A}_E$, somme des aires des rectangles circonscrits.

c) En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.

ACTIVITÉ 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

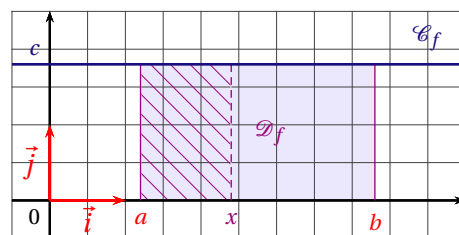
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{D}_f$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

FONCTION CONSTANTE :

Soit c un réel positif. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c$.

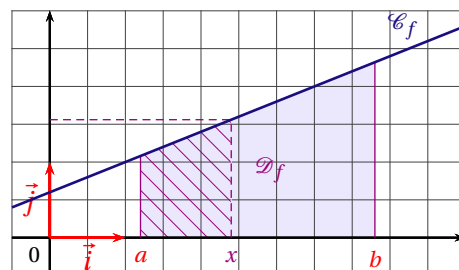
- Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}_f$.
- On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'aire $\mathcal{A}_x$ du domaine hachuré.
 - Donner une expression de F en fonction de x .
 - Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a; b]$
 - Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on?



FONCTION AFFINE :

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont des réels fixés avec m non nul. f est supposée positive sur $[a; b]$.

- Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}_f$.
- On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'aire $\mathcal{A}_x$ du domaine hachuré.
 - Donner une expression de F en fonction de x .
 - Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a; b]$
 - Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on?

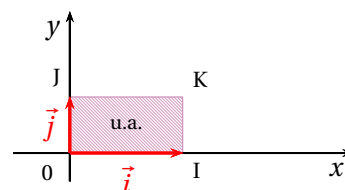


I INTÉGRALE ET AIRE

1 UNITÉ D'AIRE

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.

L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0; 1)$, $J(0; 1)$ et $K(1; 1)$.



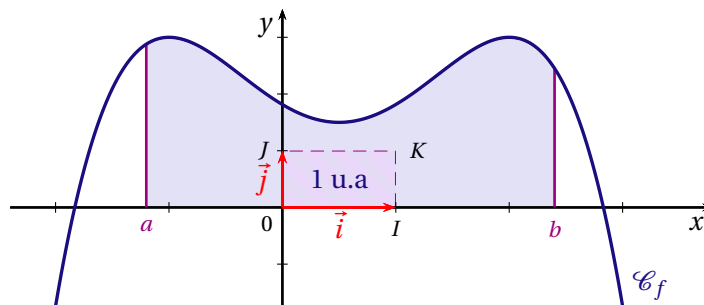
2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x) dx$



REMARQUES

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ » ou encore « somme de a à b de $f(x) dx$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$, car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

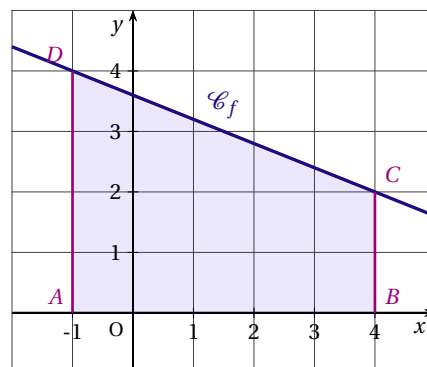
EXEMPLES (traités en activité)

1. Calculons $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; 4]$

L'intégrale $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(4 + 2) \times 5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$



2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

f est dérivable donc continue et strictement positive. Par conséquent, $\int_{-1}^3 f(x) dx$ est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$.

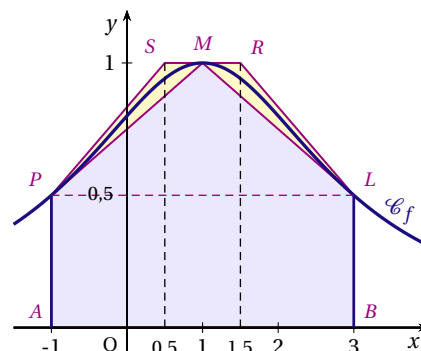
a) Le domaine $\mathcal{D}_f$ est encadré par des surfaces délimitées par des polygones dont on peut calculer l'aire à l'aide d'un découpage en figures simples du plan : triangle, carré, rectangle trapèze.

Soient $\mathcal{A}_I$ l'aire du polygone inscrit $ABLM$ et $\mathcal{A}_E$ l'aire du polygone circonscrit $ABLRSP$.

— $\mathcal{A}_I$ est égal à la somme des aires du rectangle $ABLP$ et du triangle LMP d'où $\mathcal{A}_I = 4 \times 0,5 + \frac{4 \times 0,5}{2} = 3$

— $\mathcal{A}_E$ est égal à la somme des aires du rectangle $ABLP$ et du trapèze $LRSP$ d'où $\mathcal{A}_E = 4 \times 0,5 + \frac{(4+1) \times 0,5}{2} = 3,25$

On en déduit que $3 \leq \int_{-1}^3 f(x) dx \leq 3,25$.



b) Encadrement par deux familles de rectangles

On subdivise l'intervalle $[-1; 3]$ en n intervalles de même amplitude pour obtenir un encadrement de l'intégrale

$\int_{-1}^3 f(x) dx$ à partir de l'aire de deux familles de rectangles.

Subdivision de l'intervalle $[-1; 3]$ avec un pas $\Delta x = \frac{1}{2}$.

Sur chacun des intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ avec $0 \leq k < 8$, le rectangle inscrit sous la courbe a pour longueur le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ et le rectangle circonscrit a pour longueur le maximum de la fonction f sur le même intervalle.

Compte tenu des variations de la fonction f et des valeurs calculées ci-dessous,

x_k	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{17}$	1	$\frac{16}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{2}$

L'aire $\mathcal{A}_I$, somme des aires des rectangles inscrits est :

$$\mathcal{A}_I = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{17} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{17} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2449}{850} \approx 2,88$$

L'aire $\mathcal{A}_E$, somme des aires des rectangles circonscrits est :

$$\mathcal{A}_E = \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{17} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + \frac{16}{17} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{1437}{425} \approx 3,38$$

On en déduit que $\frac{2449}{850} \leq \int_{-1}^3 f(x) dx \leq \frac{1437}{425}$.

En choisissant une subdivision de l'intervalle $[-1; 3]$ plus fine, on augmente la précision de l'encadrement.

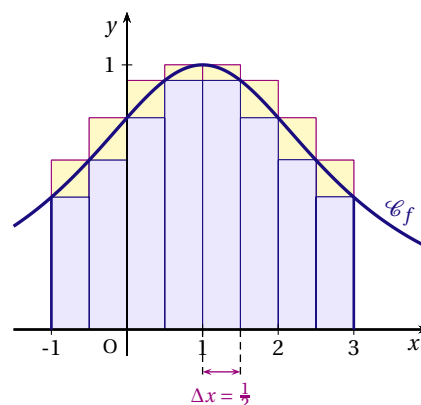
Avec un pas $\Delta x = 0,1$ on obtient $3,091 \leq \int_{-1}^3 f(x) dx \leq 3,192$.

Avec un pas $\Delta x = 0,01$ on obtient $3,136 \leq \int_{-1}^3 f(x) dx \leq 3,147$.

Remarque :

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\int_{-1}^3 \left(\frac{4}{x^2 - 2x + 5} \right) dx \approx 3,1415927$.

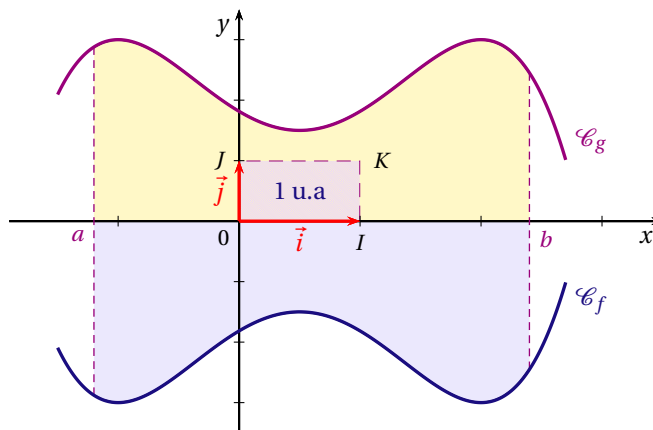
— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\int_{-1}^3 \left(\frac{4}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = \pi$.



3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a; b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}$$

4 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET DÉRIVÉE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

THÉORÈME (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

EXEMPLE

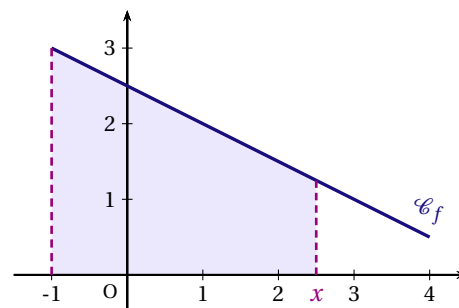
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Si x est un réel de l'intervalle $[-1; 4]$, la fonction F définie par

$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié.

On a donc $F(x) = \frac{(3 + (-0,5x + 2,5)) \times (x + 1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$

La fonction F est dérivable sur $[-1; 4]$ et $F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.



II PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

PROPRIÉTÉ (admise)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

THÉORÈME

Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

* DÉMONSTRATION

— Soient F une primitive de la fonction f sur I et k est un réel.

Si pour tout réel x de I , G est la fonction définie par $G(x) = F(x) + k$, alors $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I .

— Soient G et F deux primitives de f sur I .

On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$, alors H est dérivable sur I et

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

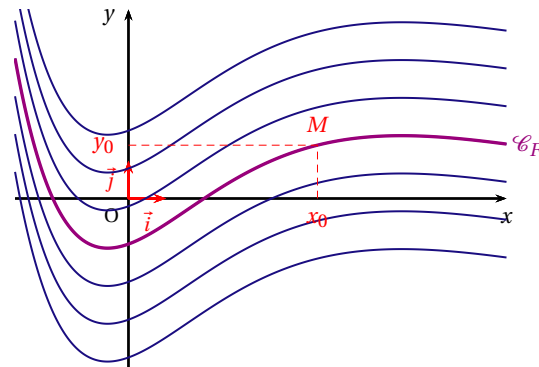
La dérivée H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I .

Ainsi, pour tout réel x de I , $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on connaît la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une primitive de f sur I , alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0; y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathcal{C}_F$ de la famille passant par ce point.



3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I . Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.

Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

✱ DÉMONSTRATION

Si G est une primitive de f sur I , alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel.

La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.

Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

III CALCUL DE PRIMITIVES

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $] -\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur $\mathbb{R}$

2 LINÉARITÉ

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I .

✱ DÉMONSTRATION

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I , alors $F + G$ et αF sont dérivables sur I .

— $(F + G)' = F' + G' = f + g$ donc $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

— $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$.

La fonction u définie par $u(x) = x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x) = \frac{x^3}{3}$.

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln x$. Donc sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction v définie par $v(x) = -\frac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x) = -3\ln x$.

Donc la fonction $f = u + v$ admet comme primitive la fonction $F = U + V$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3\ln x$.

3 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F est donnée par...
$f = u' u$	$F = \frac{1}{2} u^2$
$f = u' u^n$ n entier, $n > 0$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u' e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u^2}$ u ne s'annule pas sur I	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{u^n}$ (n entier, $n \geq 2$) u ne s'annule pas sur I	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.

On a : $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{1-x^2}$ soit $f = -\frac{1}{2} \times u' e^u$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x , par $F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$ où c est un réel à déterminer.

Or $F(1) = 0 \iff -\frac{1}{2} + c = 0 \iff c = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + \frac{1}{2}$.

IV INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a; b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x) \right]_a^b$; ainsi $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.

En effet, si G est une autre primitive de f sur I , il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ d'où

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} \right) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{e}{x} \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - \ln(e) - \frac{e}{e} \right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln(1) - \frac{e}{1} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} + e - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I .

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I .

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$$

V PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

* DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I . Pour tout réel x de l'intervalle I , $F'(x) = f(x)$.

Or $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ donc F est croissante sur $[a; b]$. Par conséquent, si $a \leq b$, alors $F(a) \leq F(b)$.

On en déduit que $F(b) - F(a) \geq 0$ et $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Attention la réciproque est fautive :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 (-x^2 + 3x + 1) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-2}^3 \\ &= \left(-9 + \frac{27}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2 \right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Ainsi $\int_{-2}^3 f(x) dx \geq 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \leq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I , et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

* DÉMONSTRATION

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I , alors $F + G$ est une primitive sur I de la fonction $f + g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(t) \, dt &= \alpha F(b) - \alpha F(a) \\ &= \alpha (F(b) - F(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) \, dx\end{aligned}$$

3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a , b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

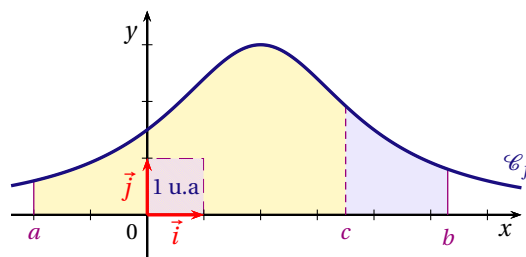
* DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I . Pour tous réels a , b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



4 ORDRE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leq b$.

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$

* DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leq 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a; b]$.

Par conséquent, si $a \leq b$ et $f - g \leq 0$ alors

$$\int_a^b (f - g)(x) \, dx \leq 0 \iff \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \leq 0$$

Attention la réciproque est fautive :

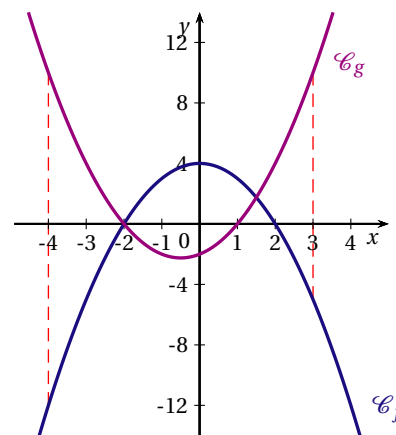
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^3 (4 - x^2) dx &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^3 \\ &= \left(12 - \frac{27}{3} \right) - \left(-16 + \frac{64}{3} \right) \\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^3 (x^2 + x - 2) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-4}^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 6 \right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 8 \right) \\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{-4}^3 f(x) dx \leq \int_{-4}^3 g(x) dx$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4; 3]$, $f(x) \leq g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



VI INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Soit m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \times (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \times (b - a)$$

✱ DÉMONSTRATION

Les fonctions définies sur $[a; b]$ par $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont constantes donc continues.

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$ ($a < b$), $m \leq f(x) \leq M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\begin{aligned}\int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \iff m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx \\ &\iff m \times (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \times (b - a)\end{aligned}$$

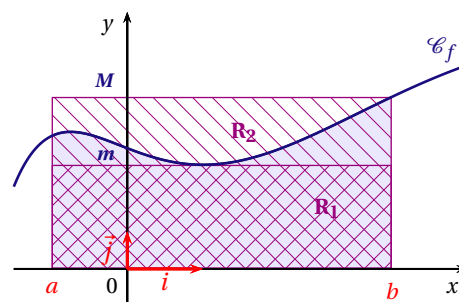
INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :

R_1 de côtés m et $b - a$;

R_2 de côtés M et $b - a$.



2 VALEUR MOYENNE

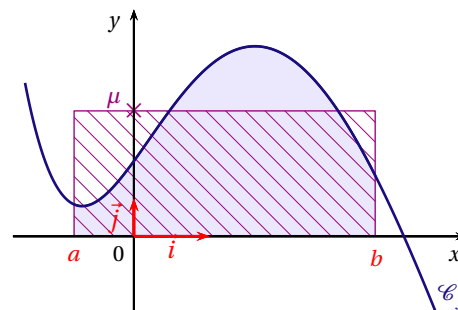
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b - a$.



EXERCICE 1

- Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = -2x + 3$.
Vérifier que g est la dérivée de f . Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
- Dans chacun des cas suivants, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f sur l'intervalle I .

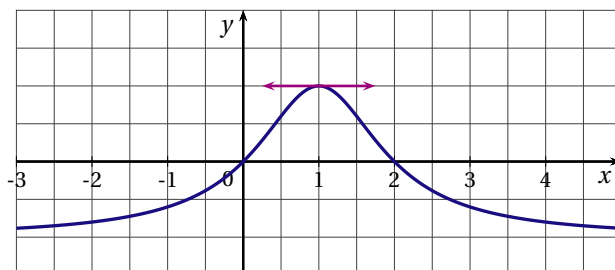
a) $f(x) = 3x - 2$ ($I = \mathbb{R}$)	b) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ ($I = \mathbb{R}$)	c) $f(x) = x^3$ ($I = \mathbb{R}$)
d) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ($I =]0; +\infty[$)	e) $f(x) = \frac{2}{x}$ ($I =]0; +\infty[$)	f) $f(x) = e^{0,5x}$ ($I = \mathbb{R}$)

EXERCICE 2

Soit F et G les fonctions définies sur $] -1; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ et $G(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$.
Montrer que F et G sont deux primitives sur $] -1; +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

EXERCICE 3

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie par $F(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$. On a tracé ci-dessous, la courbe représentative d'une autre primitive G de f .



- Donner l'expression de $G(x)$.
- Déterminer $f(1)$.

EXERCICE 4

Dans chaque cas, trouver une primitive F de la fonction f .

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \frac{1}{x^2}$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{x}{2} + \frac{2}{3x}$.
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-x}$.

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $F(-2) = 0$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ et $F(1) = -1$.
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^2$ et $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{e^{2x}}{2}$ et $F(0) = -\frac{1}{2}$.
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ et $F(-1) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 6

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

1. $A = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) \, dx$
2. $B = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) \, dx$
3. $C = \int_{-2}^1 2e^{2x+1} \, dx$
4. $D = \int_0^{\ln 2} 2e^x \times (e^x + 1) \, dx$
5. $E = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{x} \, dx$

EXERCICE 7

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On sait que $f(2) = -4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0	4	$+\infty$
signe de $f(x)$		-	+

PARTIE A

1. Soit F la primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $F(4) = \frac{1}{2}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction F .
 - a) Donner le tableau de variations de la fonction F .
 - b) On suppose que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(2;3)$.
Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .

PARTIE B

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{12}{x^2} - \frac{16}{x^3}$

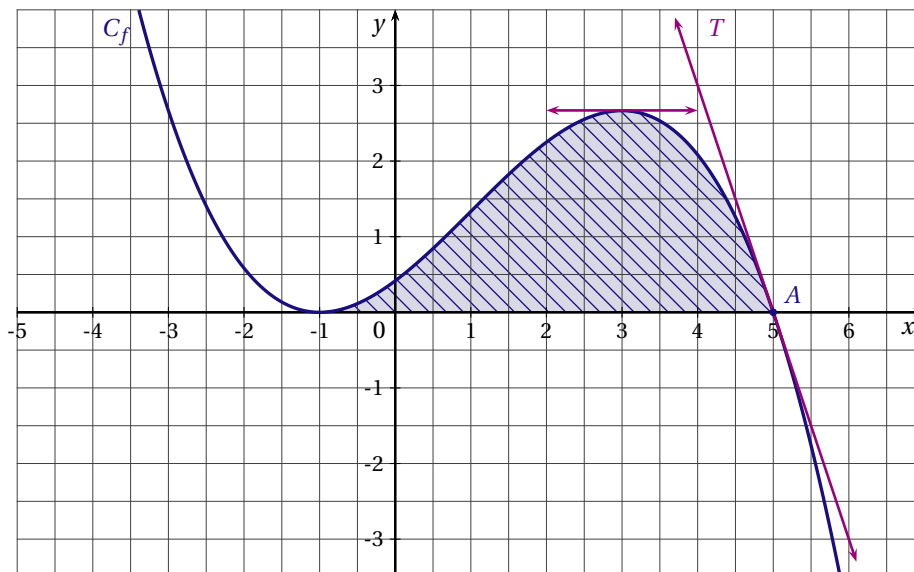
1. a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $F(4) = \frac{1}{2}$.
b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -4x + 11$.
2. Étudier la convexité de la fonction F

EXERCICE 8

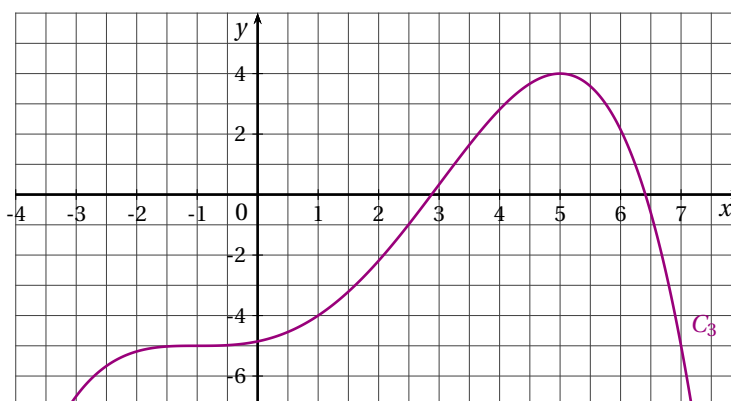
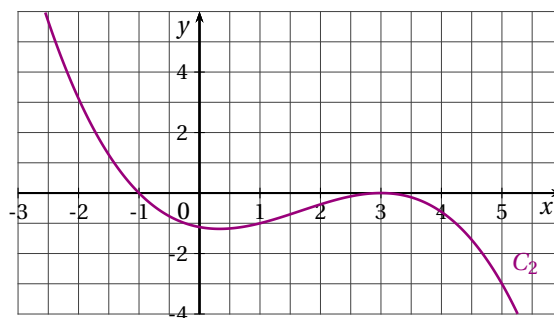
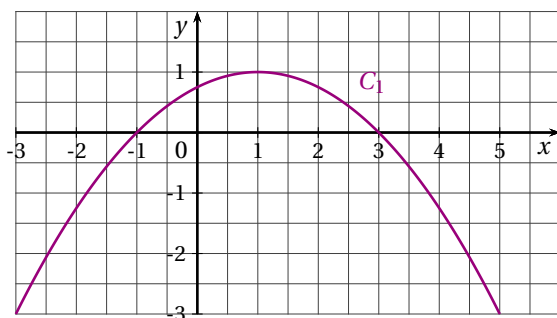
1. Calculer l'intégrale $\int_{-2}^2 e^x - e^{-x} \, dx$.
2. Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^x - e^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2;2]$?

EXERCICE 9

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4;3)$.
On note f' la dérivée de la fonction f et F une primitive de la fonction f .



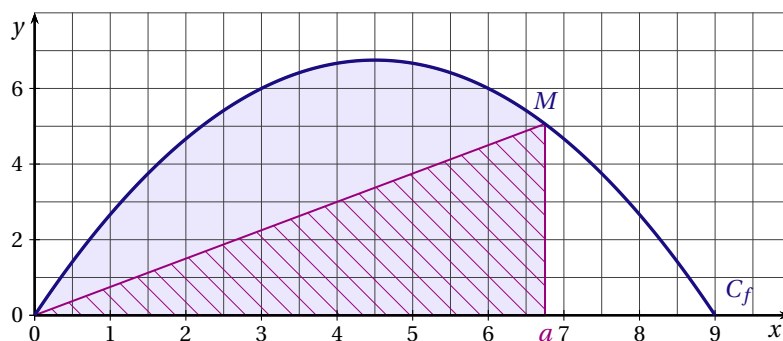
1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F .
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^5 f(x) dx$.
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F .
 - a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F .



- b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.
- c) La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion?

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $f(x) = 3x - \frac{x^2}{3}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.



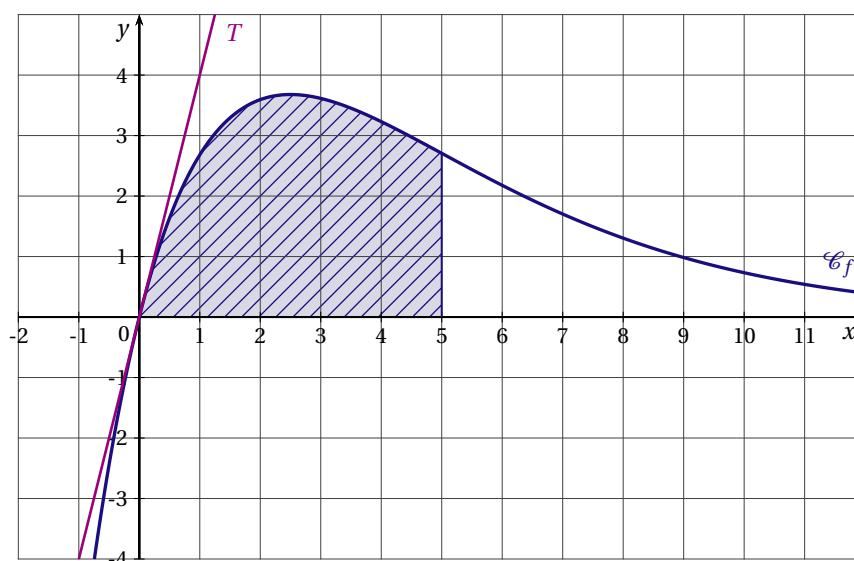
L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathcal{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M de la parabole $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de a du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.
3. Déterminer a pour que $\mathcal{A} = 2T$.

EXERCICE 11

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f . Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f . Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5; +\infty[$, la fonction F est croissante.
PROPOSITION B : $F(-1) \leq F(0)$.
PROPOSITION C : $12 \leq F(5) - F(0) \leq 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

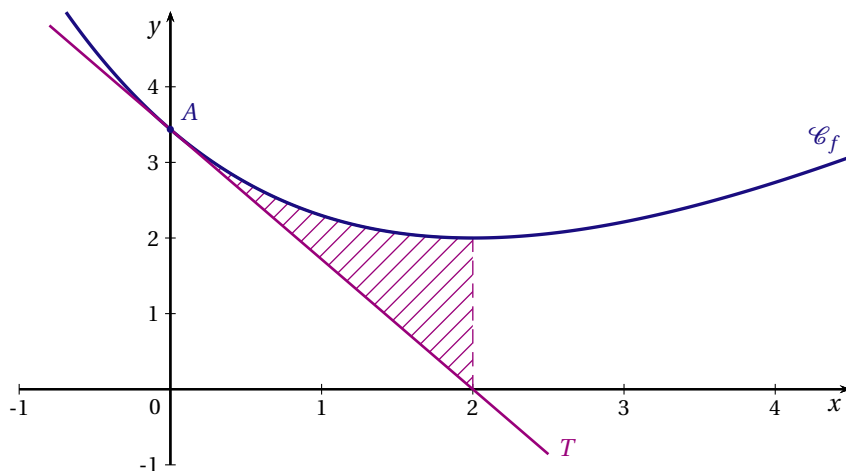
La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4xe^{-0,4x}$.

- On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax + b)e^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.
 - Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant :
$$\begin{cases} -0,4a &= 4 \\ a - 0,4b &= 0 \end{cases}$$
 - Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
- On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{1-0,5x} + x - 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan. (Unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées)



- Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f , puis étudier son signe.
 - En déduire le tableau de variation de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Étudier la convexité de la fonction f .
 - En déduire la position relative de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, T l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
Donner une valeur approchée arrondie au centième près de cette aire en cm^2 .

EXERCICE 13

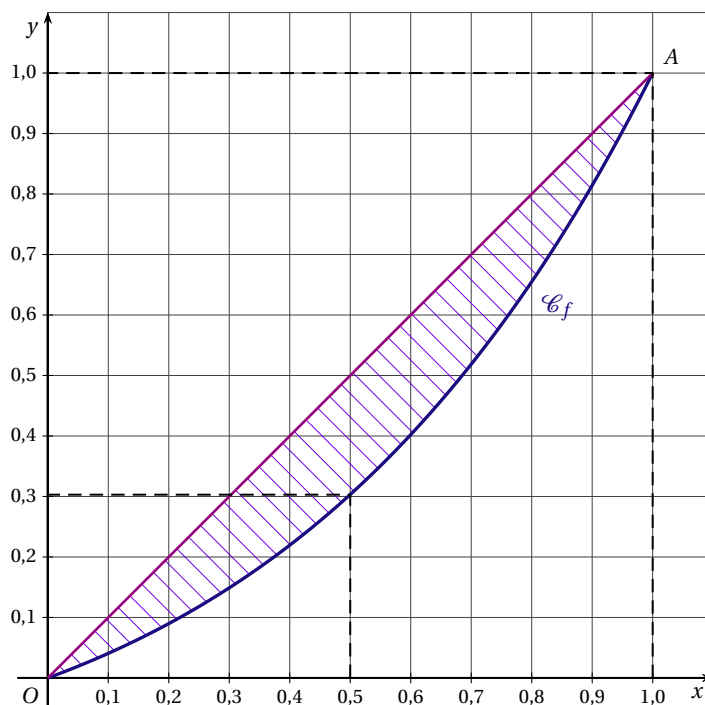
PARTIE A

Soit f une fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{x-1}$.

- Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq x$.
- On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
- Montrer que la fonction f est strictement croissante.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Vérifier que la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $F(x) = (x-1)e^{x-1}$ est une primitive de la fonction f .

PARTIE B

La courbe $\mathcal{C}_f$, représentative de la fonction f , est la courbe de Lorenz qui modélise la répartition des salaires d'une entreprise.



- sur l'axe des abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale correspondante.

Par exemple $f(0,5) \approx 0,303$ signifie que : « environ 30,3% de la masse salariale est détenue par la moitié des employés ayant les salaires les plus faibles ».

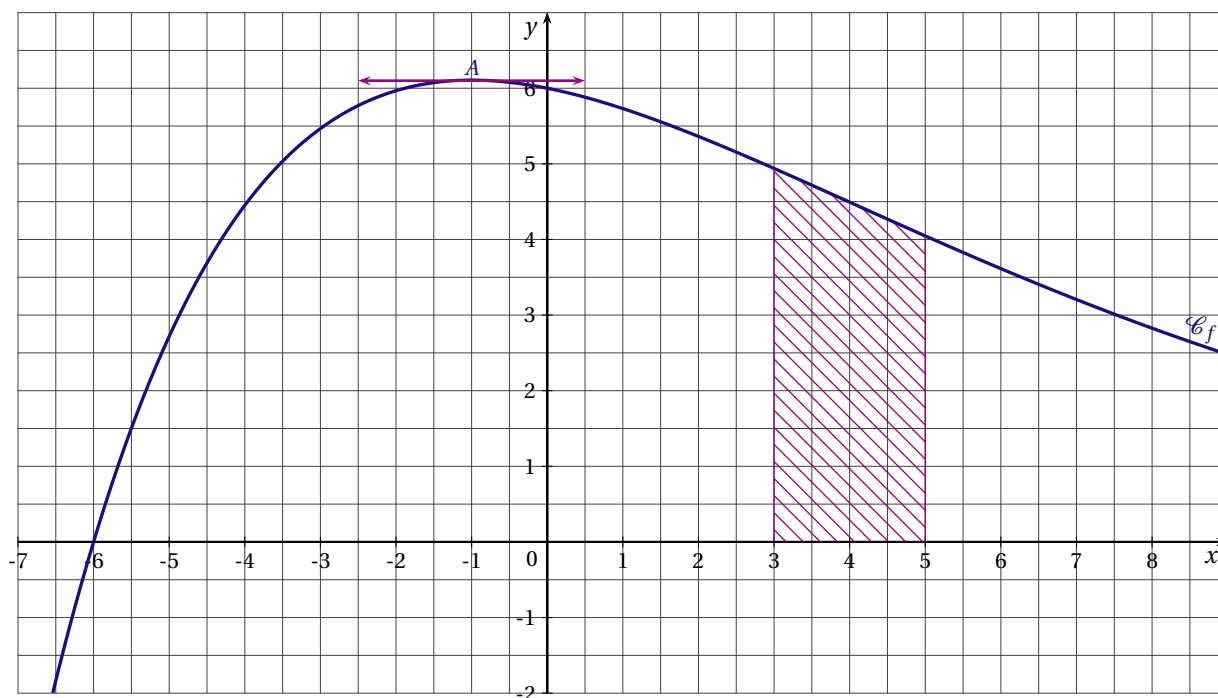
1. Déterminer la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles qui détiennent 50 % de la masse salariale. (On donnera le résultat arrondi à 0,1% près.)
2. On mesure l'inégalité de la répartition en comparant l'écart entre la situation d'équité parfaite et la situation réelle. On définit alors l'indice de Gini noté γ par $\gamma = 2 \times \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré compris entre le segment $[OA]$ et la courbe de Lorenz $\mathcal{C}_f$.
 - a) Montrer que $\gamma = 1 - 2 \times \int_0^1 f(x) dx$.
 - b) Calculer γ . (On donnera la valeur exacte de γ et la valeur arrondie à 10^{-3} près.)

EXERCICE 14

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(-1)$.
2. Déterminer le signe de $f'(4)$.
3. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine hachuré.

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+6)e^{-0,2x}$.

On note f' sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel x , on a $f'(x) = (-0,2x - 0,2)e^{-0,2x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que $f''(x) = (0,04x - 0,16)e^{-0,2x}$, pour tout réel x .
b) Étudier la convexité de la fonction f .
c) Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.
3. a) Démontrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (-5x - 55)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer l'intégrale $I = \int_3^5 f(x) dx$; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

PARTIE C : Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1; 8]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 4 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie B, déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \quad \text{sur } [1; 8]$$

Calculer $E(4)$. Interpréter le résultat.

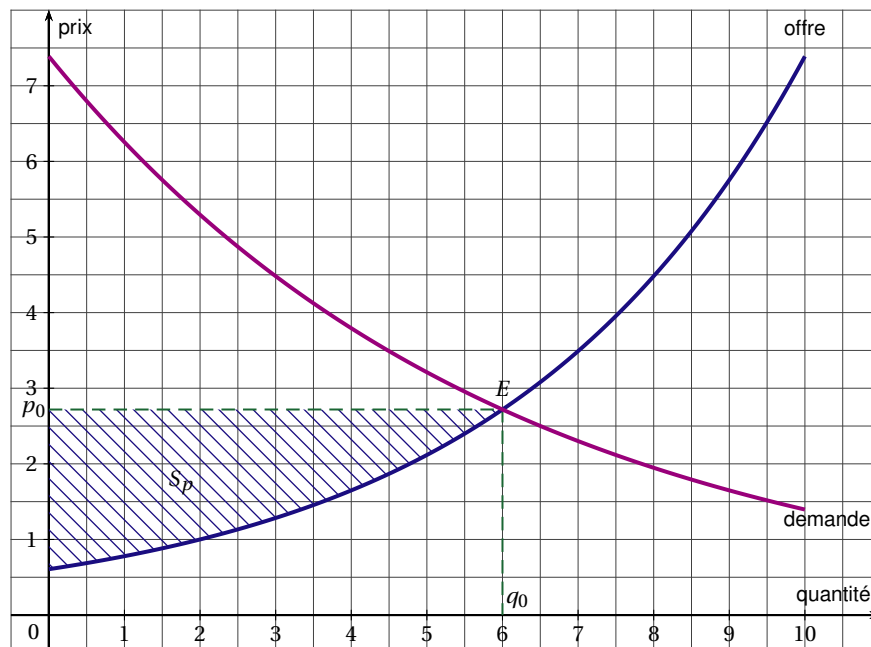
EXERCICE 15

Les fonctions d'offre et de demande d'un produit sont définies sur $[0; 10]$ par :

- fonction d'offre $f(x) = e^{\frac{x}{4} - \frac{1}{2}}$;
- fonction demande $g(x) = e^{2 - \frac{x}{6}}$.

Où x est la quantité en milliers d'articles et $f(x)$ et $g(x)$ sont des prix unitaires en euros.

1. Étudier les variations des fonctions f et g .
2. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont données ci-dessous. Au point E d'équilibre du marché, le prix p_0 en euro demandé par les consommateurs est égal au prix d'offre des producteurs et la quantité échangée sur le marché en milliers d'articles est égale à q_0 .



Calculer la quantité d'équilibre q_0 en nombre d'articles et le prix d'équilibre p_0 arrondi au centime d'euro près.

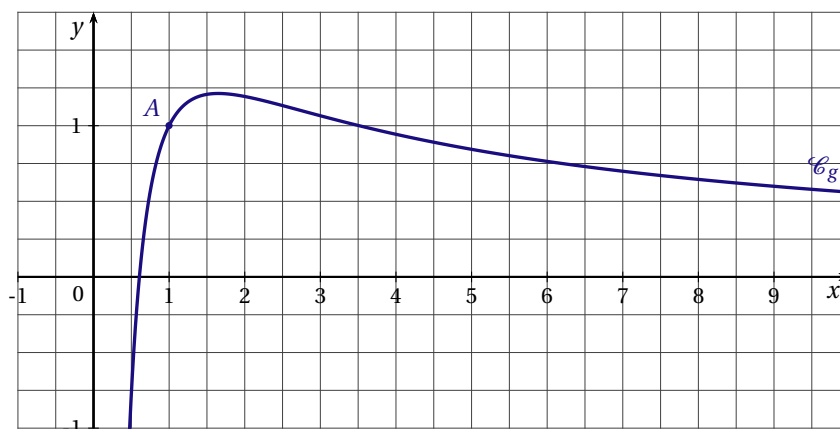
3. On considère les nombres $I = \int_0^{q_0} g(x) dx$ et $J = p_0 q_0$. Donner une interprétation graphique de $I - J$.
4. On admet que la quantité d'équilibre q_0 est de 6 milliers d'articles.
 - a) Exprimé en milliers d'euros, le surplus des consommateurs, est donné par $S_d = \int_0^6 g(x) dx - 6e$. Déterminer le surplus des consommateurs arrondi à l'euro près.
 - b) L'aire S_p du domaine hachuré représente en milliers d'euros, le surplus des producteurs. Déterminer le surplus des producteurs arrondi à l'euro près.

EXERCICE 16

PARTIE A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$.

On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.



1. a) Calculer $f'(x)$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Montrer que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
4. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On pourra remarquer que $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$.
b) Soit $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$. Déterminer la valeur exacte de I , puis en donner une valeur approchée au centième près.

PARTIE B - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
2. Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 €?

Chapitre 7

LOIS DE PROBABILITÉ À DENSITÉ

I	INTRODUCTION	113
II	DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ	114
1	variable aléatoire continue	114
2	fonction de densité	114
3	loi de probabilité	114
4	espérance mathématique	115
5	probabilité conditionnelle	115
III	LOI UNIFORME	115
1	définition	115
2	propriété	116
3	espérance mathématique	116
IV	LOI NORMALE	117
1	vers une approximation de la loi binomiale	117
2	loi normale centrée réduite	118
3	loi normale	120
	EXERCICES	123

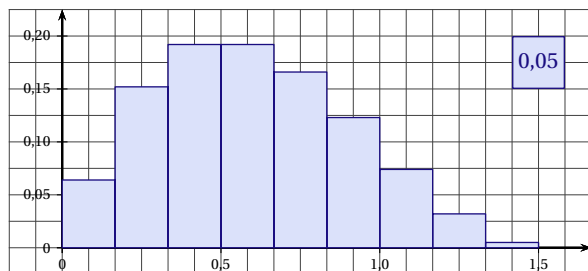
I INTRODUCTION

Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont dites continues.

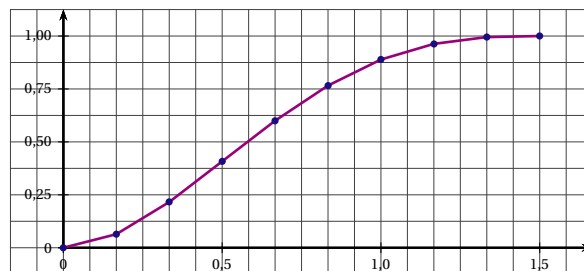
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	[0; 10[	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[	[60; 70[	[70; 80[	[80; 90]
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.



Histogramme



Polygone des fréquences cumulées

On modélise la situation à l'aide d'une variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations de cet hôpital avec $X \in [0; 1,5]$.

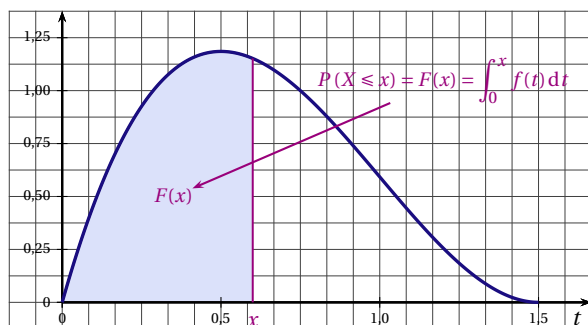
Pour une telle variable aléatoire, les événements étudiés sont ceux qui correspondent à des intervalles du type $X \in [0; 0,3]$, $0,5 \leq X \leq 1$ ou $X > 0,5$.

Le calcul de la probabilité $P(X = 0,345)$ que le temps d'attente soit exactement de 20 minutes et 42 secondes n'a pas de sens.

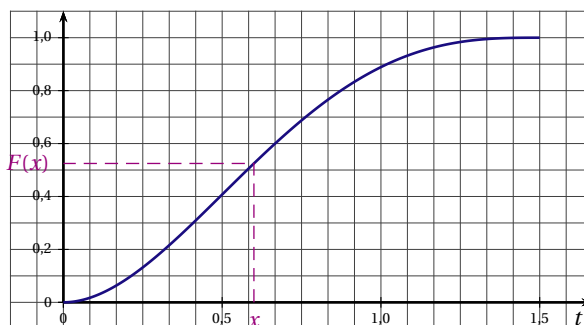
Dans le cas d'une variable aléatoire continue le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe représentative de la fonction de répartition F permettant de calculer des probabilités.

On suppose que la fonction F est définie sur l'intervalle $[0; 1,5]$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ où f est la fonction définie sur

$[0; 1,5]$ par $f(t) = \frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3}$. On dit que f est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X .



Fonction de densité



Fonction de répartition

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1,5]$, $F(x)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction de densité f , les axes du repère et la droite d'équation $t = x$.

On en déduit que :

$$— P(X \leq 0,3) = F(0,3) = \int_0^{0,3} f(t) dt = 0,1808.$$

$$— P(0,5 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0,5) = \int_{0,5}^1 f(t) dt = \frac{13}{27}.$$

$$— P(X > 0,5) = 1 - P(X \leq 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \int_0^{0,5} f(t) dt = \frac{16}{27}.$$

II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2 FONCTION DE DENSITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1,5]$ par $f(t) = \frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3}$ est une fonction de densité de probabilité sur $[0; 1,5]$.

— La fonction f est dérivable sur $[0; 1,5]$ donc continue.

— Pour tout réel t , $\frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3} = \frac{16t(4t^2 - 12t + 9)}{27} = \frac{16t(2t - 3)^2}{27}$.

Par conséquent, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; 1,5]$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $[0; 1,5]$ par $F(t) = \frac{16t^4}{27} - \frac{64t^3}{27} + \frac{8t^2}{3}$ d'où

$$\int_0^{1,5} f(t) dt = F(1,5) - F(0) = 1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0; 1,5]$

3 LOI DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I .

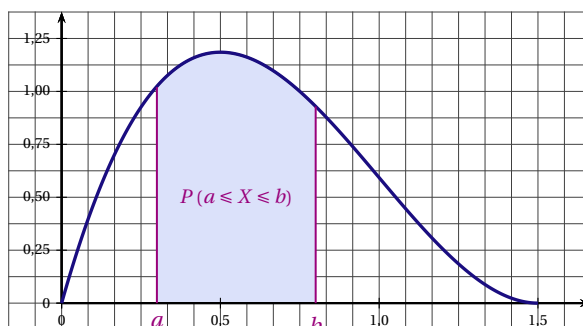
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I , la probabilité de l'événement $X \in [a; b]$ est :

$$P(X \in [a; b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

REMARQUE

$P(a \leq X \leq b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité étudiée dans l'exemple précédent.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0; 1,5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I .

Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X = a) = \int_a^a f(t) dt = 0$
2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
3. $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a; b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t) dt$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations dont la fonction de densité f est définie sur $[0; 1,5]$ par $f(t) = \frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{1,5} \left(\frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3} \right) dt \\ &= \left[\frac{64t^4}{135} - \frac{64t^3}{27} + \frac{8t^2}{3} \right]_0^{1,5} \\ &= 3,6 - 9 + 6 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

Le temps d'attente moyen aux consultations est de 0,6 h soit 36 minutes.

5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I , J_1 et J_2 deux intervalles de I tel que $P(X \in J_1) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de l'évènement $X \in J_2$ sachant que l'évènement $X \in J_1$ est réalisé est :

$$P_{X \in J_1}(X \in J_2) = \frac{P(X \in J_1 \cap J_2)}{P(X \in J_1)}$$

EXEMPLE

Calculons la probabilité que le temps d'attente d'une personne soit inférieur à une heure sachant qu'elle a patienté plus d'une demi-heure.

Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_{X > 0,5}(X < 1)$. $J_1 =]0,5; 1,5]$, $J_2 = [0; 1[$ et $J_1 \cap J_2 =]0,5; 1[$ d'où

$$P_{X > 0,5}(X < 1) = \frac{P(0,5 < X < 1)}{P(X > 0,5)} = \frac{\frac{13}{27}}{\frac{16}{27}} = \frac{13}{16} = 0,8125$$

Ainsi, la probabilité que le temps d'attente d'une personne qui a patienté plus d'une demi-heure soit inférieur à une heure est égale à 0,8125.

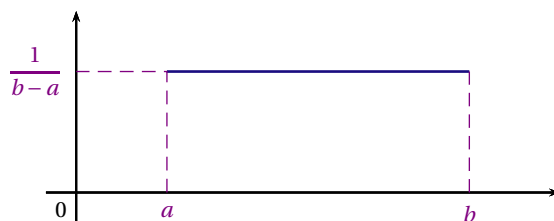
III LOI UNIFORME

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a; b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a; b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a; b]$:

— f est continue et positive sur $[a; b]$.

$$— \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$$

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.

Pour tout intervalle $[c; d]$ inclus dans $[a; b]$, $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$.

* DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_c^d \\ &= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est le réel

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

* DÉMONSTRATION

Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T , en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5; 9,5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5; 9,5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0,5; 9,5]$ par $f(t) = \frac{1}{9,5-0,5} = \frac{1}{9}$.

Le temps d'attente T , en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5; 9,5]$.

1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X \leq 2) = \frac{2-0,5}{9} = \frac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X \geq 3) = \frac{9,5-3}{9} = \frac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \frac{0,5+9,5}{2} = 5$.
Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

IV LOI NORMALE

1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE

RAPPEL

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n; p)$.
L'espérance mathématique est $E(X) = np$; l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

LA FONCTION DE GAUSS

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p .

On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes :

$$z_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leq k \leq n$$

Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :

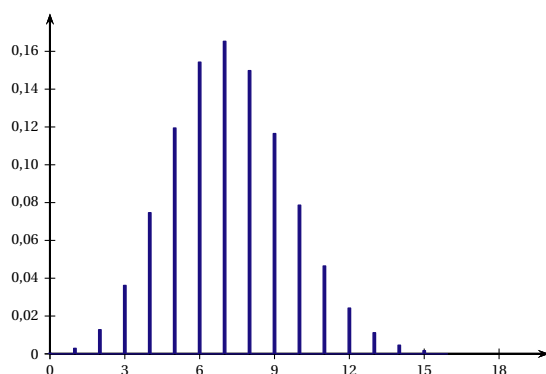
$$P(Z_n = z_k) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(X_n = k) = p_k$$

Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k , alors Z_n prend la valeur $\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k .

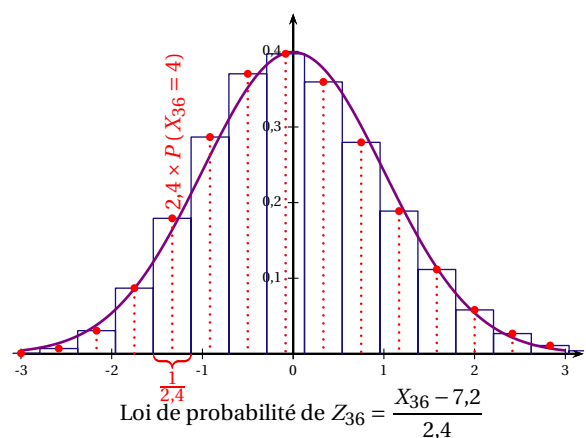
On a représenté graphiquement ci-dessous, pour $X_n \in [E(X_n) - 3\sigma_n; E(X_n) + 3\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n = 36$ et $n = 400$ avec $p = 0,2$.

La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.

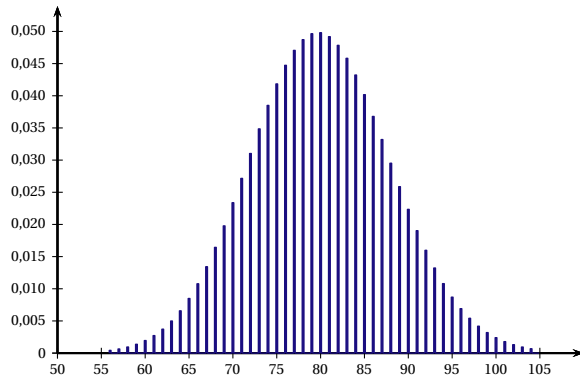
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n = z_k) = p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n \times P(X_n = k)$ et $\frac{1}{\sigma_n}$.



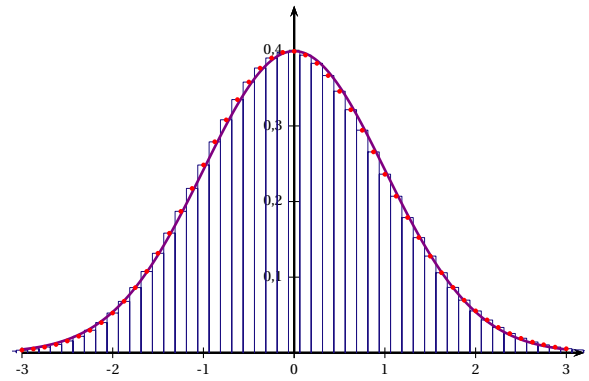
Loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0,2$



Loi de probabilité de $Z_{36} = \frac{X_{36} - 7,2}{2,4}$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,2$



Loi de probabilité de $Z_{400} = \frac{X_{400} - 80}{8}$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction de Gauss :

$$P(a \leq Z_n \leq b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

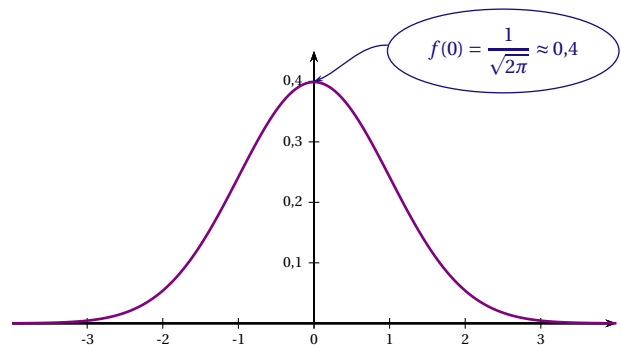
2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

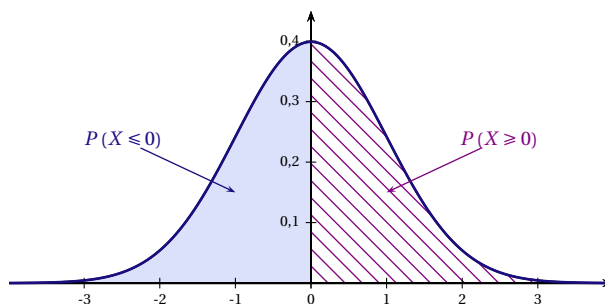
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

PROPRIÉTÉ

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 0)$ sont égales, d'où $P(X \leq 0) = P(X \geq 0)$.

Comme $P(X \leq 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$$

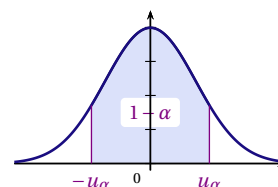


Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$$

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

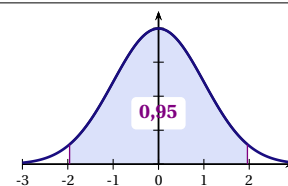
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que :
 $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

$$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$$



CALCULS

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leq a)$ ou $P(X \geq a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leq a)$ avec $a < 0$	$P(X \leq a)$ avec $a > 0$	$P(X \geq a)$ avec $a < 0$	$P(X \geq a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < 0)$	$0,5 + P(0 < X \leq a)$	$0,5 + P(a \leq X < 0)$	$0,5 - P(0 < X < a)$

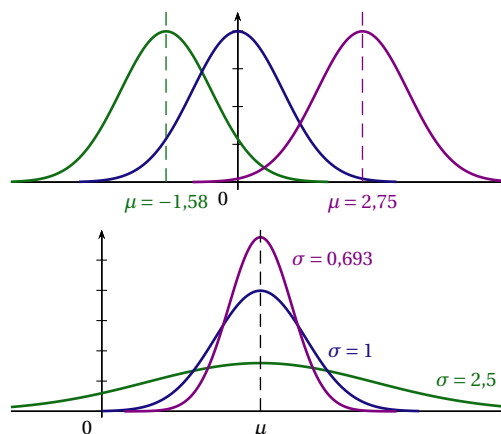
3 LOI NORMALE

DÉFINITION

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , signifie que la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

REMARQUES :

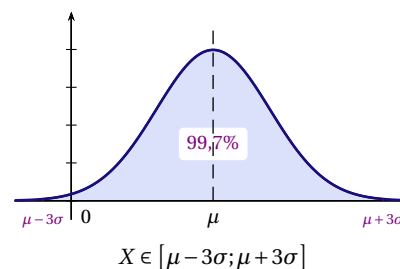
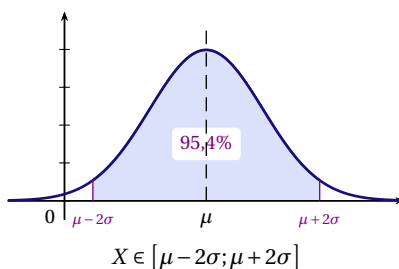
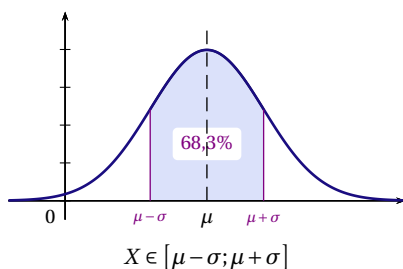
- Si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors sa variance $V(X) = \sigma^2$.
- La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
- L'espérance μ de la loi normale est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.
- L'écart-type $\sigma > 0$ de la loi normale est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ .



INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE

Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.



LOI NORMALE ET CALCULATRICES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ . Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a \leq X \leq b)$
2. Le réel k tel que $P(X \leq k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche ^{distrib} var	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leq X \leq b)$	normalFrep(a, b, μ, σ) ou normalCdf(a, b, μ, σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd normCD(a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leq k) = \alpha$	FracNormale(α, μ, σ) ou invNorm(α, μ, σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN InvNormCD(α, σ, μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125; 20,25)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{20,25} = 4,5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(122 \leq X \leq 128); \quad P(X \leq 120); \quad P(X \leq 129,5); \quad P(X \geq 130,4); \quad P(X \geq 118,7).$$

2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leq a) = 0,871$.

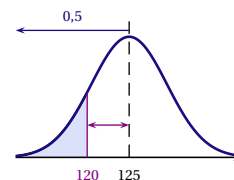
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geq b) = 0,02$.

4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0,81$.

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leq X \leq 128) \approx 0,495$.

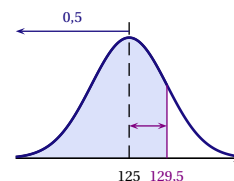
b)

$$\begin{aligned} P(X \leq 120) &= P(X \leq 125) - P(120 < X \leq 125) \\ &= 0,5 - P(120 < X \leq 125) \\ &\approx 0,133 \end{aligned}$$



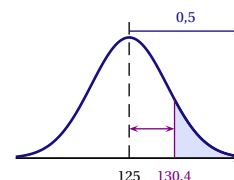
c)

$$\begin{aligned} P(X \leq 129,5) &= P(X \leq 125) + P(125 < X \leq 129,5) \\ &= 0,5 + P(125 < X \leq 129,5) \\ &\approx 0,841 \end{aligned}$$



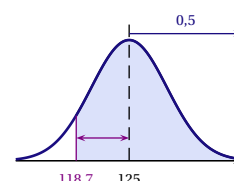
d)

$$\begin{aligned} P(X \geq 130,4) &= P(X \geq 125) - P(125 \leq X < 130,4) \\ &= 0,5 - P(125 \leq X < 130,4) \\ &\approx 0,115 \end{aligned}$$



e)

$$\begin{aligned} P(X \geq 118,7) &= P(118,7 \leq X \leq 125) + P(X > 125) \\ &= 0,5 + P(118,7 \leq X \leq 125) \\ &\approx 0,919 \end{aligned}$$



2. Avec la calculatrice, $P(X \leq a) = 0,871$ pour $a \approx 130,09$.

3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leq k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0; 1[$. Or

$$P(X \geq b) = 0,02 \iff 1 - P(X < b) = 0,02 \iff P(X < b) = 0,98$$

Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134,242$.

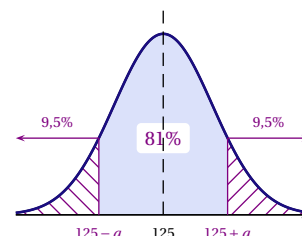
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.

On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leq X \leq 125 + a) = 0,81$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(125; 4,5^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(125 - a \leq X \leq 125 + a) = 0,81 &\iff 1 - 2 \times P(X < 125 - a) = 0,81 \\ &\iff P(X < 125 - a) = \frac{1 - 0,81}{2} = 0,095 \end{aligned}$$



Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119,102$ d'où $a \approx 5,898$ et $125 + a \approx 130,898$.

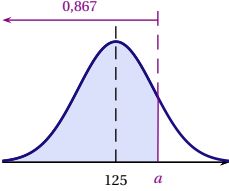
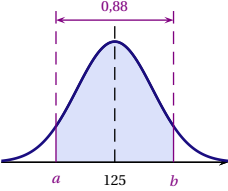
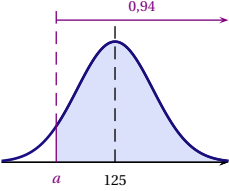
Donc $I = [119,102; 130,898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119,1; 130,9]$)

REMARQUE

Trouver l'intervalle associé à une probabilité donnée avec la calculatrice **TI-83** Premium CE (système d'exploitation 5.3)

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$

Menu **2nde** puis sur la touche **distrib** **var** option 3 : invNormale (

$P(X \leq a) = 0,867$ 	$P(a \leq X \leq b) = 0,88$ 	$P(X \geq a) = 0,94$ 
invNormale aire : 0.867 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR DROIT	invNormale aire : 0.88 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR DROIT	invNormale aire : 0.94 μ : 125 σ : 4.5 Zone : GAUCH CTR DROIT
$a \approx 130$	$a \approx 118$ et $b \approx 132$	$a \approx 118$

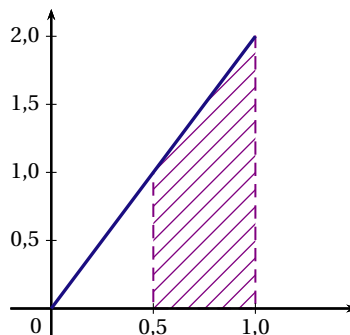
EXERCICE 1

(D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2016)

La fonction f est définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x$.

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f .

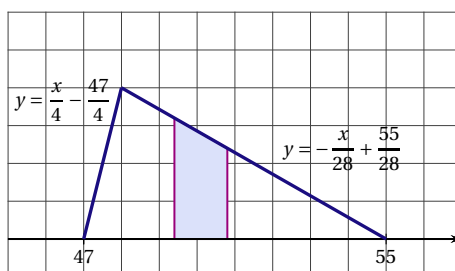
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.



1. a) Quelle est la valeur, en unité d'aire, de la surface hachurée? Préciser la démarche utilisée.
b) Interpréter ce résultat en terme de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0 \leq X \leq 0,75)$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47; 55]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{47}{4} & \text{si } 47 \leq x < 48 \\ -\frac{x}{28} + \frac{55}{28} & \text{si } 48 \leq x \leq 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47; 55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
On a $C \in [47; 55]$.
a) Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49; 50,8]$.
b) Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum?
c) Calculer l'espérance mathématique de la variable C . Interpréter le résultat.

EXERCICE 3

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{e^{0,5x}}{2} dx$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{e^{0,5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur $[0; 2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f . La probabilité $P(X \geq 1,2)$ est-elle supérieure à 0,5?

EXERCICE 4

On s'intéresse à la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1. a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $\ln$.
b) Trouver un nombre réel $a > 1$ tel que $\int_1^a \ln x \, dx = 1$.
On peut alors considérer la fonction $\ln$ comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1; a]$.
2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité $\ln$ sur l'intervalle $[1; a]$.
a) Calculer $p(X \leq 2)$.
b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

EXERCICE 5

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X .
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

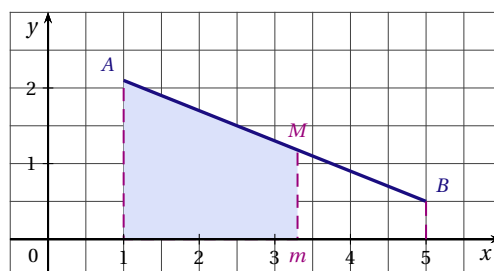
EXERCICE 6

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?
2. Calculer la probabilité que le point M :
a) soit le milieu I du segment $[AB]$;
b) soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;
c) soit plus près du point B que du milieu I .

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le segment $[AB]$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 5]$ par $f(x) = -0,4x + 2,5$. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note m son abscisse.



1. Soit E l'évènement « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = m$ est inférieure à 4 ».
a) Justifier que la situation relève d'une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ que l'on précisera.
b) Calculer la probabilité de l'évènement E .
2. Calculer la probabilité de l'évènement F « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = m$ est supérieure à 1 ».

EXERCICE 8

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».

On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.

On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X . Quelle est son espérance mathématique?

2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - 240}{12}$ par la loi normale centrée réduite. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- Montrer que $P(225 \leq X \leq 270) = P(-1,25 \leq Z \leq 2,5)$.
Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270?
 - Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

EXERCICE 9

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(180; 10,5^2)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

- Déterminer les probabilités suivantes :
 $P(170 \leq X \leq 200)$; $P(X \leq 150)$; $P(X \geq 160)$; $P(X \geq 190)$.
- Déterminer le réel a tel que $P(X < a) = 0,875$.
- Déterminer le réel b tel que $P(X \geq b) = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 10

L'admission en première année d'un groupe d'écoles a lieu après une épreuve écrite et une épreuve orale selon les modalités suivantes :

- À l'issue de l'épreuve écrite, 60% des candidats sont déclarés admissibles à l'oral.
- $\frac{1}{3}$ des candidats admissibles sont admis à la fin de l'épreuve orale.

- Calculer la probabilité qu'un candidat soit admis.
- On suppose que n candidats se sont inscrits.
 - Déterminer en fonction de n , la probabilité p_n qu'au moins un candidat soit admis.
 - Quel est le plus petit nombre n de candidats inscrits pour que $p_n > 0,999$?
- Les épreuves d'admission ont lieu dans plusieurs centres, chaque centre gérant l'admission d'un groupe de 225 candidats.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 225 candidats associe le nombre de candidats admis.
On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 6$.
 - Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit compris entre 35 et 60.
 - Déterminer la probabilité que le nombre de candidats admis dans un centre soit inférieur à 30.

EXERCICE 11

PARTIE A

Un magasin vend deux sortes d'articles électroménager ou informatique. Pour chaque article une extension de garantie est proposée lors de l'achat.

Une étude statistique sur les factures des ventes réalisées a permis d'établir que :

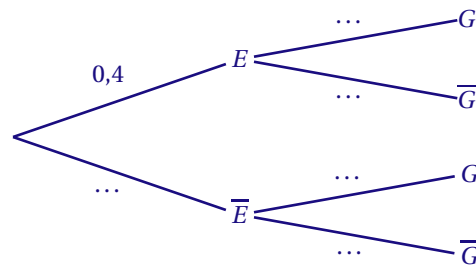
- L'électroménager représente 40 % des ventes.
- L'extension de garantie a été souscrite pour 12 % des appareils d'électroménager vendus et pour 24 % des appareils du rayon informatique vendus.

On prélève au hasard la facture d'un appareil vendu. On note :

- E l'évènement « la facture est celle d'un appareil électroménager »
- G l'évènement « une extension de garantie a été souscrite »

On rappelle que si A et B sont deux évènements, la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus $\bar{A}$ désigne l'évènement contraire de A .

- Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



- Calculer la probabilité que la facture choisie soit celle d'un appareil électroménager vendu avec une extension de garantie.
- Montrer que $P(G) = 0,192$.
- Calculer $P_G(\bar{E})$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

PARTIE B

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} près.

À la fin d'un mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.

On note M la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures, associe son montant en euros.

On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 125$.

- Calculer $P(400 \leq M \leq 900)$.
- Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 300 euros le magasin propose le paiement en trois fois sans frais.
Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais.

EXERCICE 12

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Pour contacter une compagnie d'assurance, deux possibilités sont offertes :

- se rendre en agence ;
- à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients qui se rendent à l'agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.

À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

- 380 se sont rendus en agence ;
- parmi les clients qui se sont rendus en agence, 95 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil ;
- parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'ils n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

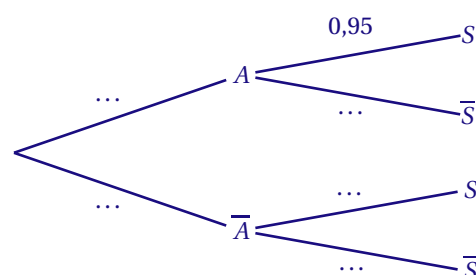
On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

- A : « Le client s'est rendu en agence »
- S : « Le client est satisfait de l'accueil »

On rappelle que l'évènement contraire de A se note $\bar{A}$, que la probabilité de l'évènement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $P_B(A)$.

Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} , si nécessaire.

- Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
3. Montrer que la probabilité de S est 0,888.
4. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence?

PARTIE B

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros. L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres?
2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.
3. Calculer $P(X > 1000)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} .
4. À l'aide de la calculatrice, estimer la valeur du nombre réel a , arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geq a) = 0,04$.
Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 13

(D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017)

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.

Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.

Ils ont également constaté, en observant les années précédentes, que :

- 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course ;
- 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course ;
- 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

PARTIE A

À la fin de la course, on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis. On note :

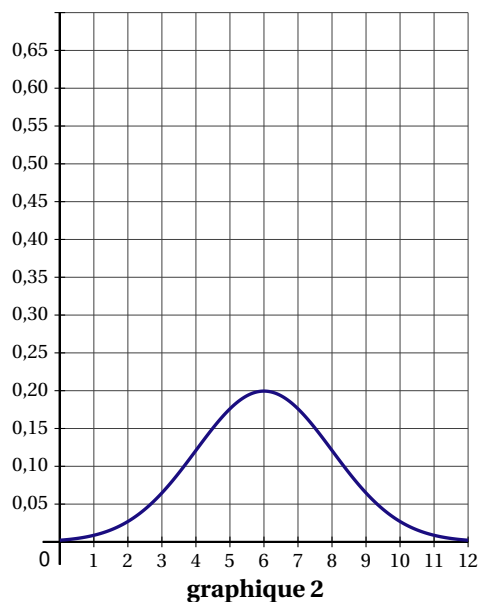
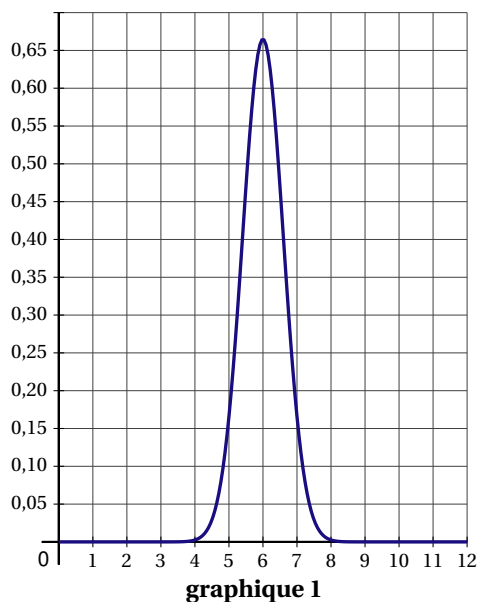
- V l'évènement « Le coureur a choisi le parcours vert » ;
- B l'évènement « Le coureur a choisi le parcours bleu » ;
- R l'évènement « Le coureur a choisi le parcours rouge » ;
- A l'évènement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $V \cap A$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert?
4. Démontrer que $P(B \cap A) = 0,012$.
5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.
- Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h ?
 - Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?

EXERCICE 14

(D'après sujet bac Amérique du Nord 2017)

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.

On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.

On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.

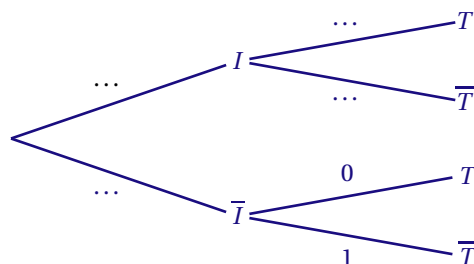
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1^{er} janvier 2016.

On considère les évènements :

- I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;
- T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

PARTIE A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



- Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
- Montrer que $p(T) = 0,002$.

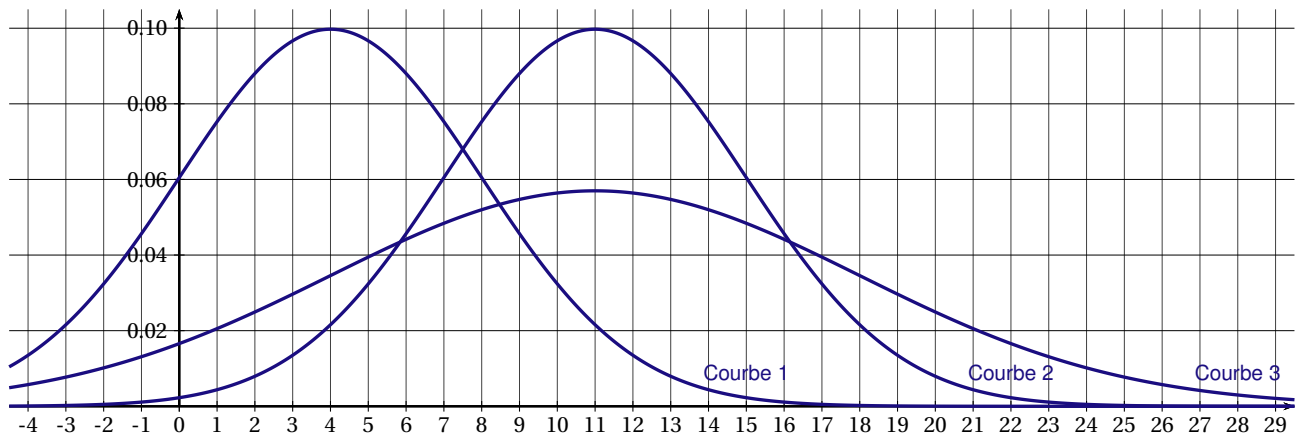
PARTIE B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.

On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.

On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
2. Calculer $p(X \leq 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Sachant que $p(X \leq a) = 0,84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



EXERCICE 15

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

La compagnie aérienne Truc-Air utilise pour ses vols moyen-courriers des avions pouvant transporter 200 passagers. Suite à une étude qui a permis d'établir que 10% des clients qui ont réservé un vol ne se présentent pas à l'embarquement, la direction commerciale a décidé de pratiquer le « surbooking ».

PARTIE A

La compagnie accepte pour un vol donné, 210 réservations.

On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
b) Déterminer la probabilité $P(X \leq 200)$.
2. On choisit d'approcher la loi binomiale de X par une loi normale d'espérance $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X)$. Soit Y l'approximation normale de X .
a) Déterminer $P(Y \leq 200)$.
b) Déterminer un intervalle I de centre 189 tel que $P(Y \in I) \approx 0,95$.
3. La compagnie prend-elle un risque important en acceptant 210 réservations pour ce vol?

PARTIE B

La compagnie accepte pour un vol donné n réservations.

On note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,9)$.

On cherche à déterminer le nombre maximal de réservations pour que la probabilité de l'évènement « $X_n \leq 200$ » soit supérieure à 0,95.

On admet que la loi de probabilité de X_n peut être approchée par une loi normale d'espérance $\mu = E(X_n) = 0,9n$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X_n) = 0,3\sqrt{n}$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}$ qui suit la loi normale centrée réduite.
a) Montrer que $X_n \leq 200$ équivaut à $Z_n \leq \frac{200 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}$.
b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-3} près, du réel k tel que $P(Z_n \leq k) \geq 0,95$.
c) En déduire que n est solution de l'inéquation $0,9n + 0,4935\sqrt{n} - 200 \leq 0$.
2. a) On pose $x = \sqrt{n}$ avec $x \geq 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $0,9x^2 + 0,4935x - 200 \leq 0$.
b) En acceptant le risque maximum de 5% de voir plus de 200 passagers se présenter à l'embarquement, quel est le nombre maximal de réservations que cette compagnie peut prendre pour ce vol?

Chapitre 8

ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

I	FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE	131
1	intervalle de fluctuation au seuil de 95%	131
2	intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%	131
3	décision à partir de la fréquence d'un échantillon	132
II	INTERVALLE DE CONFIANCE	133
1	définition	133
	EXERCICES	135

I FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

1 INTERVALLE DE FLUCTUATION AU SEUIL DE 95%

On s'intéresse à un caractère de proportion p connue au sein d'une population.

On considère la variable aléatoire F_n qui à chaque échantillon aléatoire de taille n associe la fréquence du caractère étudié.

DÉFINITION

On appelle intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95%, tout intervalle $[\alpha; \beta]$ tel que la probabilité $P(F_n \in [\alpha; \beta]) \geq 0,95$

EXEMPLE

En première partie de soirée une série a attiré près de 6,2 millions de téléspectateurs soit 34 % de part d'audience.

Déterminons un intervalle de fluctuation de la part d'audience de cette série pour un échantillon de taille 100.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de 100 personnes ayant regardé la télévision en première partie de soirée.

Le nombre de téléspectateurs en première partie de soirée est suffisamment important pour considérer que la variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,34$.

Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 25 et, le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 43.

Un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des téléspectateurs qui ont regardé cette série dans un échantillon de taille 100 est :

$$I = \left[\frac{25}{100}; \frac{43}{100} \right] \text{ soit } I = [0,25; 0,43]$$

2 INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE AU SEUIL DE 95%

On appelle intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire F_n , l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

INTERPRÉTATION

L'intervalle I_n contient la fréquence F_n avec une probabilité proche de 0,95 pourvu que n soit suffisamment grand.

En pratique, on utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 dès que :

$$n \geq 30, np \geq 5 \text{ et } n(1-p) \geq 5.$$

EXEMPLE

Avec $p = 0,34$ et $n = 100$ on a $np = 34$ et $n(1-p) = 66$, les critères d'approximation sont vérifiés.

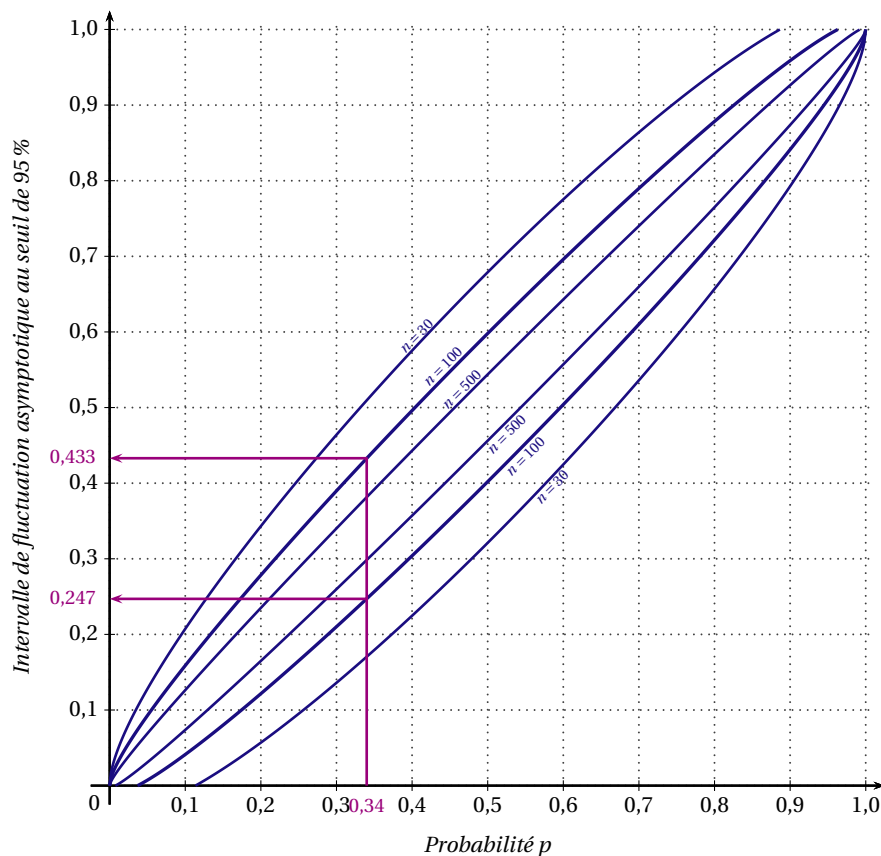
L'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 sur un échantillon de taille 100 est :

$$I_{100} = \left[0,34 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,34 \times 0,66}{100}}; 0,34 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,34 \times 0,66}{100}} \right]$$

Soit avec des valeurs approchées à 10^{-3} près des bornes de l'intervalle, $I_{100} \approx [0,247; 0,433]$.

REMARQUE

On a tracé ci-dessous, sur l'intervalle $]0; 1[$, les courbes représentatives des fonctions $f_{\inf} = p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ et $f_{\sup} = p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ associées aux bornes des intervalles de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour les valeurs de $n = 30$, $n = 100$ et $n = 500$.



3 DÉCISION À PARTIR DE LA FRÉQUENCE D'UN ÉCHANTILLON

Quand les critères d'approximation sont vérifiés, l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n permet de déterminer des seuils de décision :

- pour accepter ou rejeter l'hypothèse selon laquelle p est la proportion d'un caractère dans la population ;
- pour déterminer si un échantillon issu de la population est représentatif.

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p .

On prélève dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.

Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ on pose :

$$I_n = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

- Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I_n , alors on rejette l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.
- Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I_n , alors l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population est acceptée.

EXEMPLE

Dans un forum on a constaté que 28 personnes sur 100 ont regardé la série dont la part d'audience a été estimée à 34 %. Ce résultat remet-il en question l'estimation de la part d'audience de la série ?

La fréquence observée de la part d'audience dans l'échantillon de taille 100 est : $f = \frac{28}{100} = 0,28$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la part d'audience de la série dans les échantillons de taille 100 est $I_{100} = [0,247; 0,433]$.

Comme $0,28 \in [0,247; 0,433]$, l'estimation d'une part d'audience de 34 % pour la série n'est pas remise en cause.

II INTERVALLE DE CONFIANCE

On cherche à estimer avec un certain niveau de confiance, la proportion p **inconnue** d'un caractère au sein d'une population à partir d'un échantillon de taille n .

1 DÉFINITION

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n .

Sous les conditions usuelles d'approximation $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion inconnue p dans la population.

REMARQUES

- En pratique, les conditions de validité de la formule peuvent être vérifiées à posteriori.
- La précision de l'intervalle de confiance est donnée par son amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Plus la taille de l'échantillon est grande, plus les intervalles de confiance obtenus sont précis.
- La différence entre deux fréquences f_1 et f_2 observées sur deux échantillons est considérée comme significative quand les intervalles de confiance correspondants sont disjoints.
Dans ce cas, on considère que les deux proportions p_1 et p_2 sont différentes. Dans le cas contraire, on ne peut pas conclure.

EXEMPLE

On interroge au hasard 100 clients ayant effectué des achats à la sortie d'une grande surface. Le temps d'attente aux caisses a été jugé raisonnable par 52 personnes interrogées.

1. Peut-on considérer que plus de 50% des clients de cette grande surface estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable?

Soit $f = \frac{52}{100} = 0,52$ la fréquence des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.

Les bornes de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable sont :

$$f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,52 - \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,42 \text{ et } f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,52 + \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,62$$

On a : $n = 100$, $0,42 \leq p \leq 0,62$, $100 \times 0,42 \leq np \leq 100 \times 0,62$ et $100 \times (1 - 0,62) \leq n(1 - p) \leq 100 \times (1 - 0,42)$.

Soit $n \geq 30$, $42 \leq np \leq 62$ et $38 \leq n(1 - p) \leq 58$. Les conditions d'approximation d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % sont vérifiées.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion de clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable est $[0,42; 0,62]$.

La borne inférieure de l'intervalle de confiance est 0,42, il est donc possible que moins de 50% des clients trouvent que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.

2. Déterminer le nombre minimal de clients qu'il faut interroger pour estimer la proportion p de clients qui trouvent le temps d'attente aux caisses raisonnable avec une précision inférieure à 0,1.

La précision de l'estimation de p est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,1 &\iff \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,05 \\ &\iff \sqrt{n} > \frac{1}{0,05} \\ &\iff \sqrt{n} > 20 \\ &\iff n > 400 \end{aligned}$$

Il faut interroger plus de 400 clients pour obtenir une estimation de la proportion p de clients qui trouvent le temps d'attente aux caisses raisonnable avec une précision inférieure à 0,1.

3. À fréquence observée égale à 0,52, quel nombre de clients aurait-il fallu interroger pour estimer que plus de 50% des clients trouvent que le temps d'attente aux caisses est raisonnable ?

La borne inférieure de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 sur un échantillon de taille n est $0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où n est solution de l'inéquation :

$$\begin{aligned} 0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,5 &\iff -\frac{1}{\sqrt{n}} \geq -0,02 \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \\ &\iff \sqrt{n} \geq \frac{1}{0,02} \\ &\iff \sqrt{n} \geq 50 \\ &\iff n \geq 2500 \end{aligned}$$

Avec une fréquence observée égale à 0,52, il faudrait un échantillon de taille supérieure à 2500 pour que la proportion p de clients qui trouvent le temps d'attente aux caisses raisonnable appartienne à un intervalle de confiance dont la borne inférieure est supérieure à 0,5.

EXERCICE 1

Une entreprise produit en grande quantité des emballages alimentaires de forme cubique. Elle utilise pour cela la technique du thermoformage, qui consiste à chauffer une plaque de plastique puis à la former à l'aide d'un moule. Lors du refroidissement, la pièce rétrécit légèrement mais conserve la forme du moule.

A. LOI NORMALE

La mesure de l'arête d'une boîte est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart type $\sigma = 0,185$.

1. Calculer $P(X \geq 16,5)$.
2. Calculer $P(X \geq 17,5)$.
3. Une boîte est jugée conforme lorsque la mesure de son arête, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[16,6; 17,4]$.
 - a) Calculer $P(16,6 \leq X \leq 17,4)$.
 - b) Déterminer la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

B. LOI BINOMIALE

L'entreprise conditionne ces boîtes par lots de 200. On prélève au hasard une boîte dans la production.

On note p la probabilité de l'évènement : « la boîte prélevée au hasard dans la production est non conforme ».

On prélève au hasard 200 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire Y qui, à un lot de 200 boîtes, associe le nombre de boîtes non conformes qu'il contient. On admet que Y suit une loi binomiale de paramètres 200 et p , et, qu'en moyenne chaque lot de 200 boîtes en contient 6 non conformes.

1. Justifier que $p = 0,03$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux boîtes non conformes dans ce lot de 200 boîtes.

C. INTERVALLE DE FLUCTUATION

Dans le cadre d'un fonctionnement correct du thermoformage, on admet que la proportion p de boîtes non conformes dans la production est 3 %.

1. Déterminer les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % pour un échantillon de taille 200.
2. On contrôle le bon fonctionnement du thermoformage en prélevant au hasard dans la production des échantillons de 200 boîtes. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a compté 10 boîtes non conformes.
Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la thermoformeuse ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.

La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245 ; 255]$. *Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}*

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes fabriqués ne sont pas conformes pour la longueur.

On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
2. Calculer la probabilité $P(X = 2)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres. Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité?

PARTIE C

Le cahier des charges établit que la proportion dans la production de 2 % de tubes refusés par le contrôle de conformité est acceptable.

On veut savoir si une machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 250 dans lequel 6 tubes se révèlent être non conformes.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non conformes dans un échantillon de taille 250.
2. La machine de production doit-elle être révisée? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des batteries Lithium-ion pour smartphone.

PARTIE A

Ces batteries sont produites par trois ateliers. L'atelier A produit 15% des batteries, l'atelier B en produit 20% et l'atelier C fournit le reste de la production.

Le contrôle de qualité mis en place a permis d'établir que sur l'ensemble de la production 3% des batteries sont défectueuses, 6% des batteries produites dans l'atelier A sont défectueuses et 4% des batteries produites dans l'atelier B sont défectueuses.

On prélève au hasard une batterie parmi la production totale de l'entreprise et, on définit les événements suivants :

- A : « la batterie provient de l'atelier A »;
- B : « la batterie provient de l'atelier B »;
- C : « la batterie provient de l'atelier C »;
- D : « la batterie est défectueuse ».

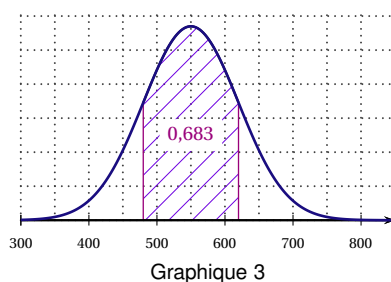
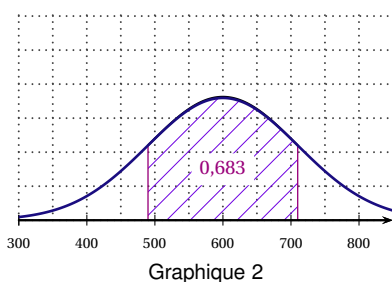
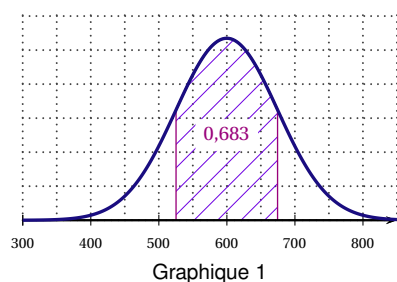
1. a) En utilisant l'énoncé, donner les probabilités $P(D)$, $P_A(D)$, $P_B(D)$ et calculer $P(C)$.
b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer $P(A \cap D)$ et formuler une interprétation de ce résultat.
3. a) Montrer $P(C \cap D) = 0,013$.
b) En déduire la probabilité qu'une batterie produite par l'atelier C soit défectueuse.
4. La batterie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par l'atelier A?
5. On prélève au hasard 10 batteries dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à 10 tirages avec remise. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que parmi les 10 batteries, il y en ait au moins une qui soit défectueuse?

PARTIE B

Le nombre de cycles de charge d'une batterie est appelé durée de vie de la batterie.

La durée de vie des batteries Lithium-ion mises en vente par cette entreprise est modélisée par la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 74,6$.

1. La fonction densité associée à X est représentée sur un seul de trois graphiques ci-dessous. Quel est ce graphique? Expliquer le choix.



2. a) Déterminer $P(550 \leq X \leq 1000)$ en donnant le résultat arrondi au centième.
b) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une batterie soit inférieure à 500 cycles de charge?

PARTIE C

Le service commercial affirme que 91% des batteries proposées à la vente ont une durée de vie supérieure à 500 cycles de charge.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire indépendant a reconstitué la vie de 100 batteries en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer leur durée de vie en fonction de différents facteurs.

Sur ce lot, on a constaté que 13 batteries ont eu une durée de vie inférieure à 500 cycles de charge.

Le résultat de ce test remet-il en question l'affirmation du service commercial?

EXERCICE 4

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondis à 10^{-4} près.

Une usine fabrique en grande quantité des lames de parquet en chêne. Les bois proviennent de deux fournisseurs A et B.

PARTIE A

Dans le stock de cette usine, 75 % des bois proviennent du fournisseur A.

On constate que 9 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur A et 13 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur B présentent un léger défaut qui ne justifie pas le déclassement des lames.

On prélève au hasard une lame. On considère les évènements suivants :

- A : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur A » ;
- B : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur B » ;
- D : « la lame prélevée a un léger défaut ».

1. Calculer la probabilité $P(B \cap D)$.
2. Calculer la probabilité que la lame a un léger défaut.
3. Calculer la probabilité qu'une lame ayant un léger défaut provienne de bois du fournisseur A.

PARTIE B

On prélève au hasard 40 lames dans le stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une lame prélevée au hasard dans ce stock ait un défaut est égale à 0,1.

Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 lames à un tirage avec remise de 40 lames.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre lames qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux lames ont un défaut.

PARTIE C

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard dans le stock 400 lames.

On admet que la loi de la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 400 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut peut être approchée par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

1. Déterminer, la probabilité que dans un prélèvement de 400 lames, il y ait plus de 50 lames ayant un défaut.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de lames ayant un défaut. En déduire le nombre de lames ayant un défaut que le client peut trouver avec une probabilité proche de 0,95.

PARTIE D

Le fabricant souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients satisfaits par son produit. Pour cela, il effectue un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. Sa clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage aléatoire avec remise.

Lors de ce sondage, 156 clients se sont déclarés satisfaits par son produit.

- Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p de clients satisfaits.
- Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2} .
- Ce fabricant peut-il être certain que plus de 70% de sa clientèle est satisfaite par son produit?

EXERCICE 5

(D'après sujet bac Amérique du Sud 2017)

Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.

Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au mois de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Au mois de janvier, lors du premier test, le laboratoire a prélevé au hasard 1 000 poissons parmi l'ensemble des poissons du bassin.

La fréquence de poissons infectés par la bactérie dans cet échantillon est $f_1 = 5\%$.

Au mois de juin, le laboratoire a prélevé de nouveau 1 000 poissons.

Pour ce second test, la fréquence de poissons infectés est $f_2 = 10\%$.

La fréquence de poissons infectés dans les deux échantillons ayant doublé en cinq mois, le laboratoire préconise d'arrêter la vente des poissons de l'entreprise.

On note p_1 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de janvier et p_2 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de juin.

- Déterminer les intervalles de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 puis de la proportion p_2 .
On arrondira les bornes des intervalles à 10^{-3} .
- Quel argument pourrait donner l'entreprise pour éviter l'arrêt de la vente?

PARTIE B

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

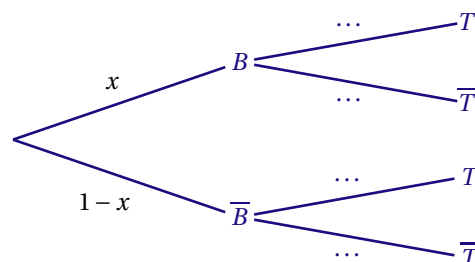
- sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;
- sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

- B l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;
- T l'évènement : « le test du poisson est positif » ;
- $\overline{B}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de B et T .

On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

- Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



- Démontrer que $p(T) = 0,5x + 0,1$.
 - Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif.
Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement?

PARTIE C

Un traitement antibiotique permet de guérir les poissons infectés par la bactérie.

Le temps de guérison d'un poisson infecté, exprimé en jours, peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 21$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Déterminer la probabilité $p(14 < X < 28)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un poisson infecté ne soit pas encore guéri après 5 semaines de traitement antibiotique.

EXERCICE 6

(D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2017)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

PARTIE A

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.

Trois types de visites sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide. Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

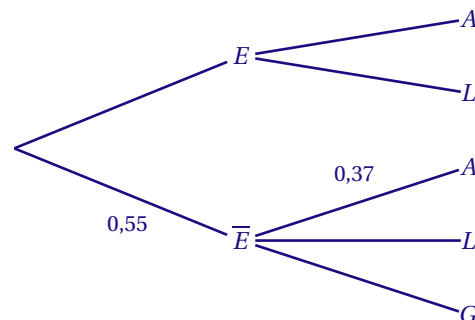
- 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide;
- 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015. On considère les événements suivants :

- E : « le billet a été acheté en ligne »;
- A : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide »;
- L : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide »;
- G : « le billet correspond à une visite de groupe ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'événement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'événement E sachant que l'événement F est réalisé. On note $\bar{E}$ l'événement contraire de E .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à 0,135.
3. Montrer que $p(A) = 0,3385$.

4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. Quelle est la probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée?
On arrondira le résultat au millième.

PARTIE B

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée D d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 15$.

1. Déterminer $p(90 \leq D \leq 120)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2 % des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes par visite.
Quelle sera alors sa décision?

PARTIE C

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22 % des visiteurs sont de nationalité étrangère.

Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.

Que peut en conclure le directeur de ce musée? Argumenter.

EXERCICE 7

(D'après sujet bac Polynésie 2017)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publiée par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC). Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6 %.

On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.

On considère les événements suivants :

- A « le candidat a suivi la filière AAC » ;
- R « le candidat a été reçu à l'examen ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\bar{E}$ désigne l'évènement contraire de E .

1. a) Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\bar{A}}(R)$.
b) Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.
b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
3. Justifier que $P(R) = 0,6028$.
4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC.
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

PARTIE B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.

Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école?
Justifier votre réponse.

PARTIE C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.
2. Déterminer $P(X \leq 1155)$.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
3. a) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geq a) = 0,2$.
b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 8

(D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2017)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1 exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 12]$.
 - a) Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge?
 - b) Quel est le temps moyen d'attente à une caisse?
2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.
Le temps d'attente T_2 , exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.
Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.
3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.
 - Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.
 - La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0,1$.
 - Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.
 - a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
 - b) Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.
4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :
« Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »
Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.
Cela remet-il en question l'affirmation du gérant?

DEUXIÈME PARTIE

ENSEIGNEMENT ES SPÉCIALITÉ

Chapitre 1

MATRICES

ACTIVITÉS : INTRODUCTION	144
I DÉFINITIONS	145
1 matrice	145
2 cas particuliers	145
3 égalité de deux matrices	145
II MATRICES ET OPÉRATIONS	146
1 transposée d'une matrice	146
2 addition de matrices	146
3 multiplication par un réel	146
4 produit de matrices	147
5 propriétés	148
III MATRICES CARRÉES	149
1 matrice identité	149
2 puissances d'une matrice carré	149
3 inverse d'une matrice carrée	150
4 application aux systèmes linéaires	150
5 Compléments (<i>hors programme</i>)	151
EXERCICES	154

ACTIVITÉ 1

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B. Ces produits sont fabriqués sur trois sites de production S1, S2 et S3.

En septembre 2016 :

- le site S1 a fabriqué 50 milliers d'articles A et 70 milliers d'articles B ;
- le site S2 a fabriqué 40 milliers d'articles A et 90 milliers d'articles B ;
- le site S3 a fabriqué 120 milliers d'articles B ;

On représente la production du mois de septembre à l'aide de la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.

La production du mois d'octobre 2016 est donnée par la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Déterminer la matrice T_1 représentant la production totale des mois de septembre et octobre pour chaque site.
2. En novembre 2016, pour faire face à la demande, la direction décide d'augmenter de 10% la production du mois d'octobre de chaque article, dans chaque site.
Déterminer la matrice P_2 représentant la production de novembre 2016.

PARTIE B

1. Le coût de la main d'œuvre est le même pour chaque article fabriqué, mais il diffère selon le site de production. Pour S1 le coût de la main d'œuvre est de 25 € ; pour S2, il est de 28 € ; pour S3, il est de 30 €.
 - a) Calculer le coût de la main d'œuvre, en octobre 2016, pour la fabrication des articles A.
 - b) Représenter le coût de la main d'œuvre par un vecteur-colonne C .
 - c) En considérant les matrices P_1 et C , déterminer la matrice M_1 représentant le coût de la main d'œuvre pour la fabrication en octobre 2016 des articles A et des articles B.
2. Le prix de la matière première nécessaire à la fabrication de chaque article est de 18 € pour un article A et 22 € pour un article B.
 - a) Représenter le coût de la matière première par un vecteur-ligne L .
 - b) En considérant les matrices L et P_1 , déterminer la matrice A_1 représentant le montant des achats de matière première nécessaire à la fabrication des articles en octobre 2016 pour chacun des trois sites.

PARTIE C

1. 20% des articles A et 40 % des articles B sont destinés à l'exportation.

- a) Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

- b) Donner une interprétation du produit :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le prix de vente d'un article A est de 56 € et celui d'un article B est de 62 €.

À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le chiffre d'affaire réalisé par cette entreprise en octobre 2016, en supposant que toute la production a été vendue.

I DÉFINITIONS

1 MATRICE

On appelle matrice de dimension $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \left[\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{array} \right]$$

EXEMPLE

La matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2×3 , le coefficient $a_{2,3}$ de la matrice P est $a_{2,3} = 120$.

2 CAS PARTICULIERS

MATRICE CARRÉE

Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une matrice carrée d'ordre n .

EXEMPLE

La matrice $M = \begin{pmatrix} -12 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3.

VECTEUR LIGNE

Une matrice formée d'une seule ligne et de n colonnes est une matrice ligne ou vecteur ligne.

EXEMPLE

La matrice $A = (60 \ 50 \ 0)$ est une matrice ligne de dimension 1×3 .

VECTEUR COLONNE

Une matrice formée de m lignes et d'une seule colonne est une matrice colonne ou vecteur colonne.

EXEMPLE

La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1 .

3 ÉGALITÉ DE DEUX MATRICES

Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont même dimension et que tous leurs éléments situés à la même place sont égaux.

EXEMPLE

Dire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$ sont égales signifie que

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ b+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

II MATRICES ET OPÉRATIONS

1 TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE

La transposée tA (aussi notée A^T) d'une matrice A de dimension $m \times n$ est la matrice de dimension $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

EXEMPLE

La transposée de la matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 2×3 est la matrice ${}^tP = \begin{pmatrix} 60 & 70 \\ 50 & 90 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 3×2 .

2 ADDITION DE MATRICES

La somme de deux matrices A et B de **même dimension** est la matrice notée $A+B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors

$$A+B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

EXEMPLE

Soient les matrices $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$:

$$P_0 + P_1 = \begin{pmatrix} 50+60 & 40+50 & 0+0 \\ 70+70 & 90+90 & 120+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS

Si A , B et C sont des matrices de même dimension alors :

- $A+B = B+A$.
- $A+(B+C) = (A+B)+C$

3 MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k .

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice d'ordre $m \times n$ alors pour tout réel k

$$kA = (ka_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

EXEMPLE

Si $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ alors :

$$1,1 \times P = \begin{pmatrix} 1,1 \times 60 & 1,1 \times 50 & 1,1 \times 0 \\ 1,1 \times 70 & 1,1 \times 90 & 1,1 \times 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 55 & 0 \\ 77 & 99 & 132 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux matrices de même dimension et k un réel on a :

$$k(A+B) = kA + kB$$

4 PRODUIT DE MATRICES

MULTIPLICATION D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Soient A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et B une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$(a_1 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_n) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_n \times b_n)$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

EXEMPLE

$$(60 \quad 50 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = (60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30) = (2900)$$

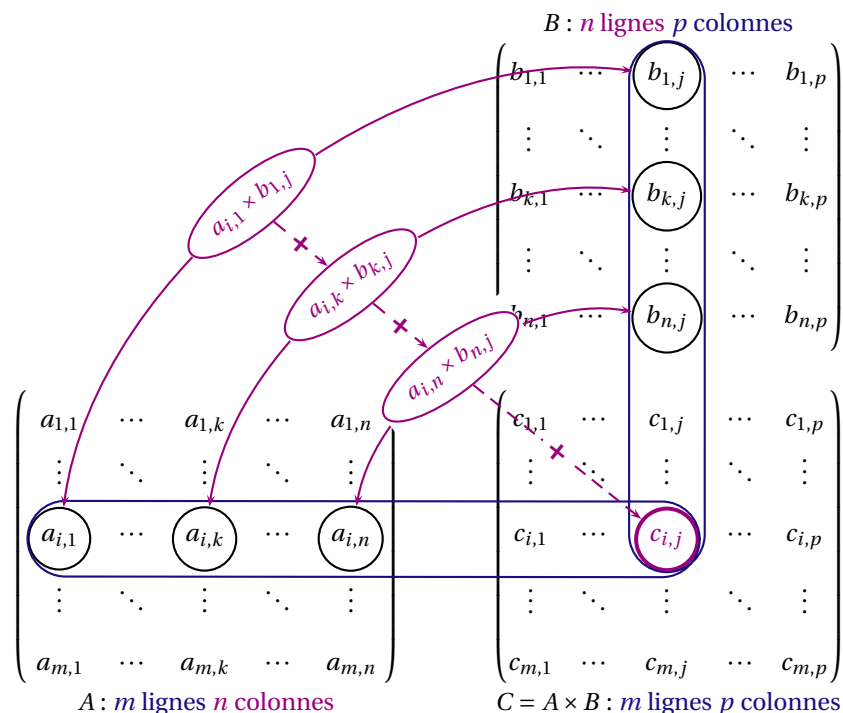
PRODUIT DE DEUX MATRICES

Si $A = (a_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ est une matrice de dimension $m \times n$ et si $B = (b_{k,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de dimension $n \times p$, le

produit $C = A \times B = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de dimension $m \times p$.

Chaque élément $c_{i,j}$ de la matrice C est le produit de la matrice constituée de la i -ième ligne de la matrice A par la matrice constituée de la j -ième colonne de la matrice B ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$).

En pratique, il est commode de disposer les deux matrices de la façon suivante pour effectuer le produit :



EXEMPLE

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$

La matrice A est d'ordre 2×2 et la matrice B est d'ordre 2×3 . Le produit $C = A \times B$ est une matrice d'ordre 2×3 :

- L'élément $c_{1,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = [0,2 \times 60 + 0,4 \times 70]$
- L'élément $c_{1,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = [0,2 \times 50 + 0,4 \times 90]$
- L'élément $c_{1,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = [0,2 \times 0 + 0,4 \times 120]$
- L'élément $c_{2,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = [0,8 \times 60 + 0,6 \times 70]$
- L'élément $c_{2,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = [0,8 \times 50 + 0,6 \times 90]$
- L'élément $c_{2,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = [0,8 \times 0 + 0,6 \times 120]$

Soit en définitive :

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 & 48 \\ 90 & 94 & 72 \end{pmatrix}$$

REMARQUE

Si le nombre de colonnes de la matrice B est différent du nombre de lignes de la matrice A , le produit $B \times A$ n'est pas défini!

5 PROPRIÉTÉS

Soient A , B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

REMARQUES

- En général $A \times B \neq B \times A$ il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- $A \times C = B \times C$ ne signifie pas que $A = B$.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III MATRICES CARRÉES

1 MATRICE IDENTITÉ

MATRICE DIAGONALE

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée matrice diagonale.

EXEMPLES

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

DÉFINITION

La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n , on la note I_n .

EXEMPLES

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPRIÉTÉ

Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n .

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2 PUISSANCES D'UNE MATRICE CARRÉE

Soit A une matrice carrée d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.

La puissance p -ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A .

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention $A^0 = I_n$.

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3 INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE

DÉFINITION

Une matrice carrée A d'ordre n est inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n .
La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée A^{-1}

EXEMPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible?

Calculons a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. a, b, c et d sont les solutions éventuelles du système :

$$\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 4b - 2d = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - c = \frac{1}{2} \\ -3a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = -2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

4 APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n , $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si la matrice A est inversible, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

EXEMPLE

Soit le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors le système peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

Soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi, l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

5 COMPLÉMENTS

(hors programme)

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES À L'AIDE DE LA MATRICE AUGMENTÉE

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.

Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires :

- multiplier une équation par un réel non nul;
- permuter deux équations;
- ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Soit un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est la matrice $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right)$

Les opérations élémentaires appliquées à un système d'équations linéaires correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée. Ces opérations sont les suivantes :

- multiplier une ligne par un réel non nul;
- permuter deux lignes;
- ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

EXEMPLE

Utilisons les opérations élémentaires pour résoudre le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

La matrice augmentée associée au système est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -6 & 1 \end{array} \right)$$

1. Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 1.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -14 \\ 0 & -9 & -2 & 25 \end{array} \right)$$

2. Obtenir 1 à la place du terme $a_{2,2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & -9 & -2 & 25 \end{array} \right)$$

3. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

4. Obtenir 1 à la place du terme $a_{3,3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow -5L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

5. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{8}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Cette matrice augmentée correspond au système

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

On obtient l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

DÉTERMINER L'INVERSE D'UNE MATRICE

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Pour déterminer l'inverse, si elle existe, de la matrice A on applique la méthode précédente à la matrice augmentée $(A|I_n)$.

Si la matrice A est inversible, à l'aide des opérations élémentaires on transforme la matrice augmentée $(A|I_n)$ pour obtenir la matrice $(I_n|A^{-1})$

EXEMPLE

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. La matrice augmentée est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1. Permuter, s'il le faut, la première ligne avec une autre, pour que l'élément de la première ligne et de la première colonne soit non nul.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. Obtenir 1 à la place du terme $a_{1,1}$

$$L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3. Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right)$$

4. Obtenir 1 à la place du terme $a_{2,2}$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right)$$

5. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{aligned}$$

6. Obtenir 1 à la place du terme $a_{3,3}$

$$L_3 \leftarrow -2L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

7. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \\ L_2 &\leftarrow L_2 + 3L_3 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 9 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 1

Une entreprise vend quatre types de produits notés P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

La matrice des commandes de trois clients notés X , Y et Z est $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5 & 15 \\ 13 & 0 & 12 & 5 \\ 2 & 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}$ les lignes étant relatives aux clients et les colonnes aux produits.

1. Effectuer le produit $C \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat.
2. Effectuer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times C$ et interpréter le résultat.
3. Les prix unitaires de chacun des quatre produits sont respectivement 45 €, 15 €, 20 € et 30 €. Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant en euros de la commande de chacun des clients.

EXERCICE 2

Une usine fabrique deux articles A et B à partir de quatre composants différents C_1 , C_2 , C_3 et C_4 . La fabrication de chacun des composants nécessite trois ressources X , Y et Z (*par exemple travail, matières premières et énergie*). Les deux tableaux suivants présentent les quantités de composants utilisées pour produire un article A et un article B et les quantités de ressources, exprimées dans la même unité, nécessaires à la fabrication de chaque composant.

	C_1	C_2	C_3	C_4
A	3	2	2	1
B	4	3	0	2

	X	Y	Z
C_1	10	15	3
C_2	15	18	8
C_3	1	6	2
C_4	4	11	2

1. À l'aide d'un produit de matrices, calculer les quantités de chaque ressource intervenant dans la fabrication de chaque article.
2. À l'aide d'un produit de matrices, calculer les quantités de ressources nécessaires à la production de 1 300 articles A et 800 articles B .

EXERCICE 3

Calculer les produits suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 14 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{4}{3} \\ -3 & -1 & \frac{5}{3} \\ -2 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B :

- la fabrication d'un article A nécessite 6 unités de matières premières, 4 unités de main d'œuvre et 1 unité d'énergie;
- la fabrication d'un article B nécessite 9 unités de matières premières, 3 unités de main d'œuvre et 2 unités d'énergie.

1. On note $C = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 80 \end{pmatrix}$ la matrice ligne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (*matières premières, main d'œuvre et énergie*). Calculer sous forme d'un produit de matrices, la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} p_A & p_B \end{pmatrix}$ des prix de revient des produits A et B .
2. Le bénéfice est égal à 20% du prix de revient sur le produit A et à 25% du prix de revient sur le produit B .
 - a) Déterminer les éléments de la matrice carrée M telle que la matrice ligne $V = \begin{pmatrix} v_A & v_B \end{pmatrix}$ des prix de vente de chaque article soit égale au produit des deux matrices P et M .

- b) Calculer V .
3. L'entreprise reçoit une commande de 100 produits A et 80 produits B . Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

EXERCICE 5

Pour la fabrication de deux produits A et B , on distingue quatre facteurs techniques de production : des unités de matières premières, des unités de conditionnement, des unités de main d'œuvre et des unités d'énergie. Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'une unité de produit A et à celle d'une unité de produit B ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces facteurs.

Facteurs techniques	Produit A	Produit B	Coût de revient unitaire du facteur (en euros)
Nombre d'unités de matières premières	5	6	3
Nombre d'unités de conditionnement	3	4	1
Nombre d'unités de main d'œuvre	4	3	4
Nombre d'unités d'énergie	1	2	2

La marge bénéficiaire sur chaque produit A et B est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 30 % pour le produit A et à 35 % pour le produit B .

On considère les matrices suivantes :

— $F = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux produits A et B .

— U dont les éléments sont les coûts unitaires des facteurs de production.

— C dont les éléments sont les coûts de production des deux produits A et B .

— V dont les éléments sont les prix de vente des deux produits A et B .

- Déterminer les éléments de la matrice U de façon à ce que le produit des matrices F et U soit égal à la matrice C des coûts de production. Calculer la matrice C .
- Déterminer les éléments de la matrice carrée M telle que la matrice V des prix de vente soit égale au produit des deux matrices M et C . Calculer V .
- Un client commande 150 unités de produit A et 200 unités de produit B .
À l'aide d'un produit de matrices, calculer le montant total (en euros) de la commande.

EXERCICE 6

Soit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels non nuls.

Déterminer les éléments de la matrice J telle que $M = aI_2 + bJ$.

EXERCICE 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 , en déduire l'inverse de la matrice A .
- Calculer A^3 et A^4 . Quel est l'inverse de la matrice A^2 ?

EXERCICE 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 2 & -1 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}$

Calculer le produit AB . Peut-on conclure que B est l'inverse de A ?

EXERCICE 9

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Soit $D = P^{-1}MP$, calculer D et D^2 .
3. Vérifier que $M^2 = PD^2P^{-1}$.
4. On admet que pour tout entier n , $D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Calculer M^5 .

EXERCICE 10

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.
2. Calculer M^2 .
3. En déduire A^2 .

EXERCICE 11

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.

EXERCICE 12

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P . Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer D^2 , D^3 et D^4 .
4. Calculer A^2 , A^3 et A^4 .

EXERCICE 13

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. En déduire A^6 puis A^{3n} où n est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de la matrice A^3 .
4. a) Développer le produit $(A - I_3) \times (A^2 + AI_3 + I_3^2)$.
b) En déduire l'inverse de la matrice $B = A - I_3$

EXERCICE 14

On se place dans le cas d'une économie fermée à deux branches A et B.

Une partie de la production de chaque branche ne sert pas directement à la consommation finale, chaque branche utilisant des consommations intermédiaires de production pour produire.

On suppose que :

- La production d'une unité de la branche A consomme 0,1 unité de production du secteur A et 0,4 unité de production du secteur B.
- La production d'une unité de la branche B consomme 0,3 unité de production du secteur A et 0,2 unité de production du secteur B.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice des coefficients techniques. $X = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}$ est la matrice production des productions totales exprimées en unité monétaire de chaque branche et $D = \begin{pmatrix} d_A \\ d_B \end{pmatrix}$ est la matrice demande des consommations finales exprimées en unité monétaire de chaque branche.
On considère dans tout l'exercice que X , A et D vérifient l'égalité matricielle :

$$\underbrace{X}_{\text{Production totale}} = \underbrace{AX}_{\text{Consommations intermédiaires}} + \underbrace{D}_{\text{Consommations finales}}$$

1. On suppose dans cette question que la production totale p_A de la branche A est de 400 unités monétaires et que la production totale p_B de la branche B est de 500 unités monétaires.

- Déterminer les consommations intermédiaires de chacune des deux branches.
- Quelles sont les consommations finales de chacune des deux branches?

2. On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2. La matrice $I_2 - A$ est inversible et $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

- Montrer que $X = (I_2 - A)^{-1} D$.
- Si la demande des consommations finales en unité monétaire est $D = \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \end{pmatrix}$, quelle doit être la production de chaque branche pour satisfaire la demande des consommations finales?

EXERCICE 15

Une économie fictive est structurée en trois secteurs A , B et C (par exemple Agriculture, Industrie et Services).

Une partie de la production de chaque secteur ne sert pas directement à la **consommation finale** des consommateurs. En effet, chaque secteur utilise une part de la production des différents secteurs pour travailler, il s'agit des **consommations intermédiaires**.

On considère dans tout l'exercice que :

- la production d'une unité du secteur A consomme 0,1 unité de production du secteur A , 0,2 unités de production du secteur B et 0,1 unité de production du secteur C ;
- la production d'une unité du secteur B consomme 0,3 unités de production du secteur A et 0,25 unités de production du secteur B et 0,2 unités de production du secteur C ;
- la production d'une unité du secteur C consomme 0,2 unités de production du secteur B et 0,2 unités de production du secteur C ;
- la production totale de chaque secteur est la somme de toutes les consommations intermédiaires et de la consommation finale des consommateurs.

1. On suppose dans cette question que le vecteur colonne des productions totales de chacun des trois secteurs est

$$P = \begin{pmatrix} 150 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

- À l'aide d'un produit de matrices, calculer le vecteur colonne des consommations intermédiaires de chacun des trois secteurs.
 - Quelles sont les consommations finales des consommateurs de chacun des trois secteurs?
2. On suppose dans cette question que la demande des consommations finales est de 81 unités du secteur A , 144 unités du secteur B et 108 unités du secteur C .

Déterminer la production totale de chaque secteur pour satisfaire la demande des consommations finales?

EXERCICE 16

Les 1500 salariés d'une entreprise sont répartis dans trois services A , B et C . Pour rééquilibrer les effectifs des trois services, il a été décidé que :

- 10% des salariés du service B seront affectés au service C .
- 5% des salariés du service A seront affectés au service B et 15% au service C .

Après cette restructuration, le nombre de salariés du service B a diminué de 15 personnes et 159 salariés ont été mutés dans le service C.

On note x , y et z le nombre de salariés respectifs des trois services A, B et C avant la restructuration.

Calculer les effectifs de chaque service après la restructuration.

EXERCICE 17

Dans une entreprise de 60 personnes, le salaire moyen mensuel des employés est de 1500 €, celui des techniciens est de 2600 € et celui des cadres de 4200 €.

La masse des salaires versés chaque mois par cette entreprise est de 114 000 €.

Si on augmente de 6,4% le salaire des employés et de 4,5% celui des cadres et techniciens alors la masse des salaires mensuels augmente de 5,6%.

Quel est l'effectif de chaque catégorie de salariés de cette entreprise?

EXERCICE 18

Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative est la parabole $\mathcal{C}_f$ passant par les points $A(-1; -3)$, $B(3; -5)$ et $C(4; -13)$.

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer les réels a , b et c sachant que $f(2) = 0$, $f(-1) = 3$ et $f'(1) = -3$.

EXERCICE 20

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

La parabole $\mathcal{P}$ passe par le point $A(1; 2)$ et coupe la droite d d'équation $y = -2x + 3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2 .

Déterminer l'équation de la parabole $\mathcal{P}$.

EXERCICE 21

Une commune met en place un nouveau service internet par abonnement. L'abonnement d'une durée de un an est renouvelable à la fin de chaque année.

On suppose que l'effectif de la population concernée par ce service n'évolue pas et est égal à 50 000.

On estime que chaque année, 79% des abonnés renouvelleront leur abonnement en fin d'année et que 4% des non abonnés d'une année s'abonneront l'année suivante.

On note a_n le nombre d'abonnés la n -ième année et b_n le nombre de personnes qui ne sont pas abonnés la n -ième année.

On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 50000$

1. Soit n un entier naturel. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction a_n et b_n .

2. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,79 & 0,04 \\ 0,21 & 0,96 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 21 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 21 & -4 \end{pmatrix}$

4. a) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D et D^2 .

b) Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$.

5. On admet que, pour tout entier n strictement positif, $A^n = PD^nP^{-1}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,75^n \end{pmatrix}$ et $X_n = A^nX_0$.

a) Calculer A^n .

b) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de la suite (a_n) et interpréter ce résultat.

d) Calculer la somme $a_n + b_n$

EXERCICE 22

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

PARTIE A

1. Calculer D^2 et D^3 .

2. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P . Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3. Soit A la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Calculer A .

4. Montrer que $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$ et $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$.

1. Pour tout entier n , on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

a) Donner V_0 et V_1 .

b) Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.

2. On admet que pour tout entier n , $V_n = A^n \times V_0$ où $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

a) Calculer $P \times D^6$.

b) Calculer V_6 .

c) En déduire les valeurs de u_6 et u_7 .

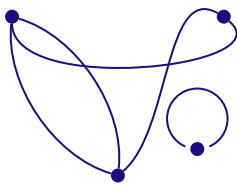
Chapitre 2

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GRAPHS

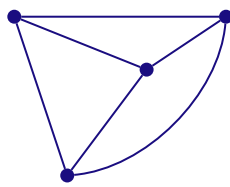
I	GRAPHES PREMIÈRES DÉFINITIONS	161
1	définitions	161
2	degré d'un sommet	162
3	représentation matricielle d'un graphe	164
4	graphes isomorphes	164
II	CHAÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ	167
1	définitions	167
2	chaînes de longueur donnée	167
3	connexité	168
4	cycle eulérien	169
	EXERCICES	172

I GRAPHS PREMIÈRES DÉFINITIONS

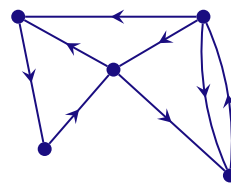
De manière générale, un graphe est un ensemble de sommets et d'arêtes (ou arcs) reliant ces sommets. Il existe différents types de graphes, orientés ou non, ou autorisant plusieurs arcs entre deux sommets.



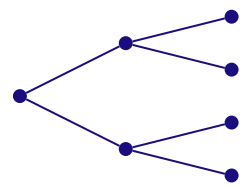
Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3



Graphe G_4

1 DÉFINITIONS

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :

- un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*
- un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes*.

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G , une arête a de l'ensemble A s'écrit $a = \{x_i, x_j\}$ où x_i et x_j sont les *extrémités* de a .

Les sommets x_i et x_j sont alors *adjacents* dans le graphe G et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arête a .

Lorsque les deux extrémités sont confondues ($x_i = x_j$) l'arête s'appelle une *boucle*.

Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

ORDRE D'UN GRAPHE

On appelle ordre d'un graphe le nombre (n) de sommets de ce graphe.

Par exemple :

les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4 ; le graphe G_3 est d'ordre 5 et le graphe G_4 est d'ordre 7.

GRAPHE SIMPLE

Un graphe est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

GRAPHE ORIENTÉ

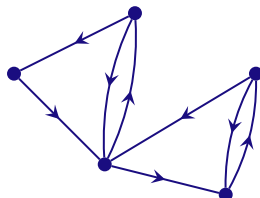
Un graphe peut être orienté, une arête est alors appelée un *arc*. Un arc est défini par un couple ordonné (x_i, x_j) de sommets.

REMARQUE

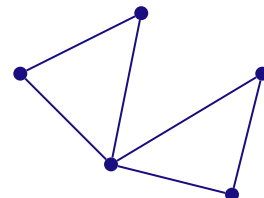
À tout graphe orienté, on peut associer un graphe simple.

Par exemple sur un plan de ville où sont indiquées les rues en sens uniques, un piéton ne tiendra pas compte de l'orientation pour se déplacer.

Au graphe orienté



on associe le graphe simple



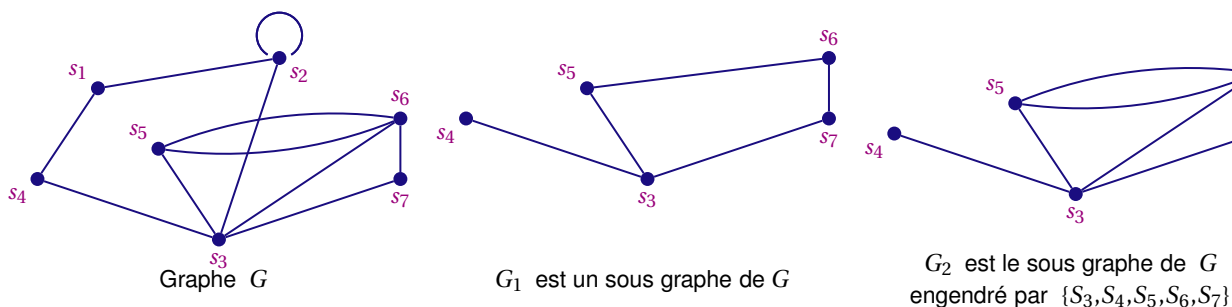
SOUS GRAPHE

Il arrive que dans certains problèmes on ait besoin de considérer une partie d'un graphe :

$G' = (S', A')$ est un sous-graphe de $G = (S, A)$ si S' est un sous ensemble de S et A' un sous ensemble de A tel que les extrémités des arêtes de A' sont des sommets de S' .

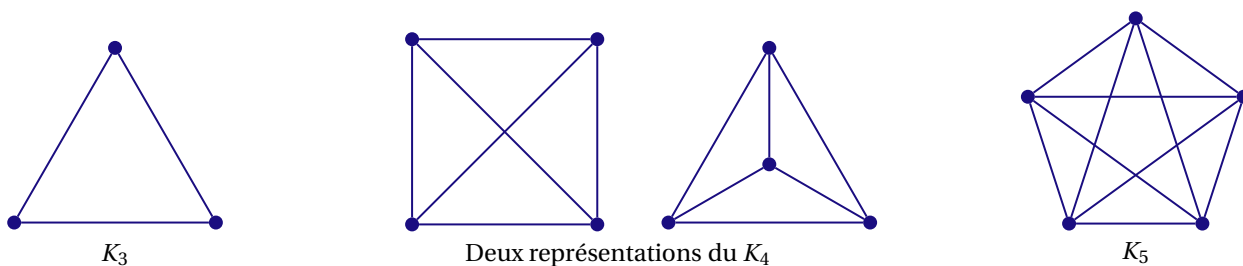
Si A' est constitué de toutes les arêtes de A ayant pour extrémités les sommets de S' alors on dit que $G' = (S', A')$ est le sous-graphe engendré par S' .

EXEMPLE



GRAPHE COMPLET

Un graphe complet K_n est un graphe simple d'ordre $n \geq 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.



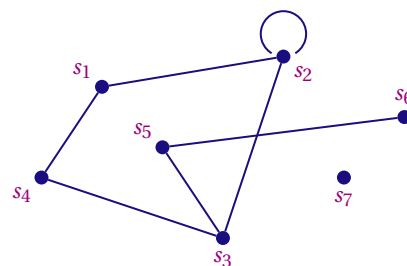
2 DEGRÉ D'UN SOMMET

On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

Sommets	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Degrés	2	4	2	3	2	1	0



DEGRÉ D'UN SOMMET DANS UN GRAPHE ORIENTÉ

Soit s un sommet d'un graphe orienté G .

- On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
- On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.

Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$$d^+(s_1) = 2 \text{ et } d^-(s_1) = 1 \text{ d'où } d(s_1) = 3$$

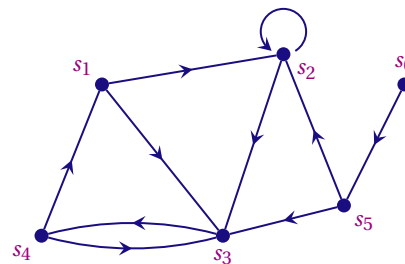
$$d^+(s_2) = 2 \text{ et } d^-(s_2) = 3 \text{ d'où } d(s_2) = 5$$

$$d^+(s_3) = 1 \text{ et } d^-(s_3) = 4 \text{ d'où } d(s_3) = 5$$

$$d^+(s_4) = 2 \text{ et } d^-(s_4) = 1 \text{ d'où } d(s_4) = 3$$

$$d^+(s_5) = 2 \text{ et } d^-(s_5) = 1 \text{ d'où } d(s_5) = 3$$

$$d^+(s_6) = 1 \text{ et } d^-(s_6) = 0 \text{ d'où } d(s_6) = 1$$



REMARQUE

Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont égales au nombre d'arcs.

Si on note a le nombre d'arcs d'un graphe orienté alors $\sum d^+(s) = \sum d^-(s) = a$.

Par exemple si dans une réunion on échange des cadeaux, le nombre de cadeaux offerts est égal au nombre de cadeaux reçus, c'est le nombre de cadeaux échangés.

THÉORÈME

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe; c'est donc un nombre pair.

* DÉMONSTRATION

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

COROLLAIRE

Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est un entier pair.

* DÉMONSTRATION

Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.

$m + p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.

Or une somme d'entiers impairs est paire si, et seulement si, il y a un nombre pair de termes.

On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair.

PROPOSITION

Dans un graphe simple d'ordre $n > 1$, il existe deux sommets distincts s_i et s_j ayant le même degré.

* DÉMONSTRATION

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 1$. Le degré d'un sommet s quelconque du graphe G est un entier $d(s)$ tel que : $0 \leq d(s) \leq n - 1$.

Supposons que les degrés des sommets soient différents.

Les degrés des n sommets sont les entiers $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ et il existe un sommet s_i de degré 0 et un sommet s_j de degré $n - 1$.

Or si $d(s_j) = n - 1$ cela signifie qu'il est adjacent à tous les sommets du graphe et en particulier au sommet s_i donc $d(s_i) \geq 1$

Ce qui est en contradiction avec $d(s_i) = 0$.

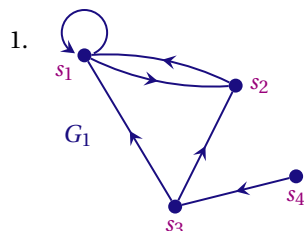
3 REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UN GRAPHE

Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

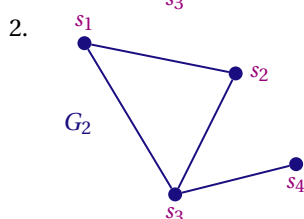
La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j .

Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j .

EXEMPLES



La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

REMARQUES

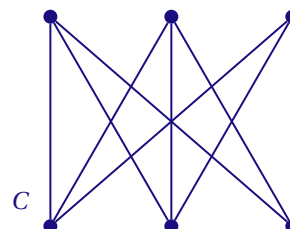
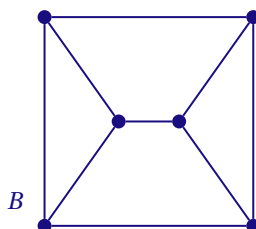
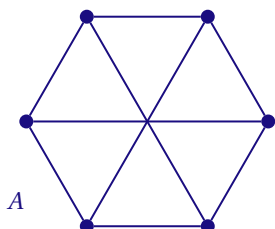
1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.
3. La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au nombre d'arêtes de ce graphe.
4. La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est égale au nombre d'arcs de ce graphe.
 - La somme des coefficients de la ligne i est égale au nombre de successeurs du sommet s_i .
 - La somme des coefficients de la colonne i est égale au nombre de prédécesseurs du sommet s_i .

4 GRAPHES ISOMORPHES

Deux graphes isomorphes ont la même structure : peu importe la façon dont ils sont dessinés, il est possible de déplacer les sommets pour que l'un soit la copie conforme de l'autre.

EXEMPLE

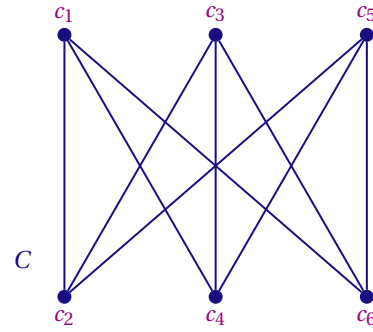
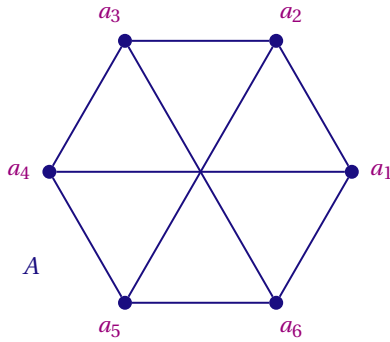
Considérons les trois graphes ci-dessous :



Les trois graphes ont le même ordre (6), le même nombre d'arêtes (9) et les sommets des trois graphes sont tous de degré 3.

Or dans B il y a deux sous graphes complets d'ordre 3 ce qui n'est pas le cas pour les graphes A et C . Donc B n'est pas isomorphe à A et C .

Montrons que les graphes A et C sont isomorphes.



Les sommets étant numérotés comme indiqué ci-dessus les deux graphes ont la même matrice d'adjacence :

$$M_A = M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A et C sont isomorphes.

REMARQUES

- Le graphe B est *planaire* : on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent.
- Le graphe C (ou A) est un graphe *biparti* : il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête du graphe a une extrémité dans X et l'autre dans Y .
Ce n'est pas un graphe planaire, il est impossible de le dessiner sans que ses arêtes se croisent.

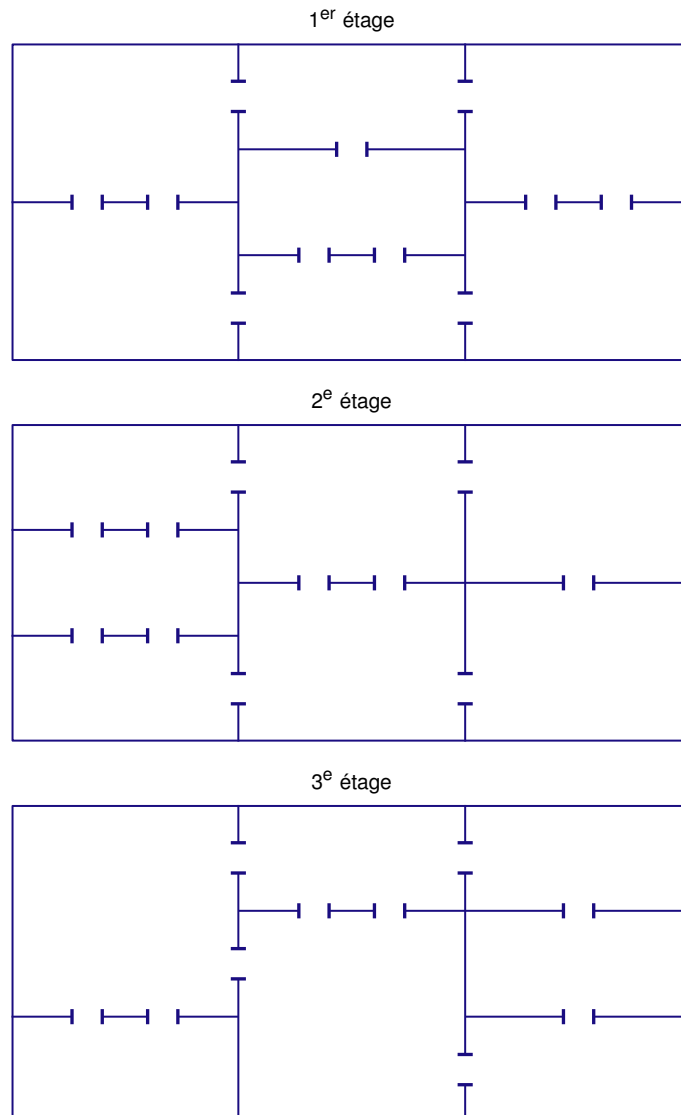
ACTIVITÉ 1

Voici le plan de trois étages d'un musée. À chaque étage, un visiteur se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

Pour chacun des étages :

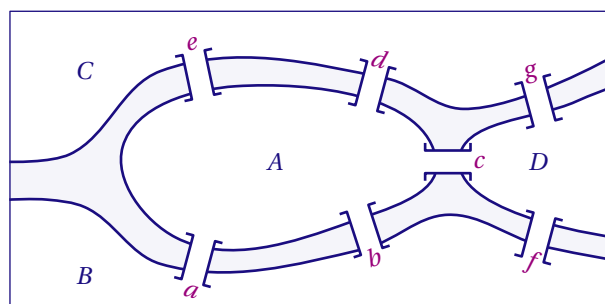
Est-il possible de faire le tour de l'étage en passant exactement une seule fois par chacune des portes?

Dans ce cas, où faut-il placer les portes d'entrée et de sortie de l'étage pour que ce parcours reste possible?



ACTIVITÉ 2

Voici un plan de la ville de Königsberg :



Est-il possible de se promener en ne passant qu'une seule fois sur chacun des sept ponts?

II CHAÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

1 DÉFINITIONS

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste. Le premier et le dernier élément de la liste sont les extrémités initiale et finale de la chaîne.

Si le graphe est simple, on peut définir une chaîne par la liste de ses sommets ou de ses arêtes.

1. La *longueur d'une chaîne* est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
2. Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une *chaîne simple*.
3. Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
4. Une *chaîne est fermée* si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
5. Une chaîne fermée est un *cycle* si elle est composée d'arêtes toutes distinctes.

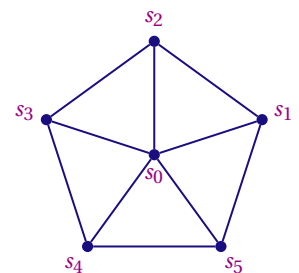
REMARQUE

Les définitions précédentes, peuvent être transposées au cas des graphes orientés. On parlera de *chaîne orientée* ou *chemin* et de *cycle orienté* ou *circuit*.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre :

- La chaîne $\{s_0; s_1; s_0; s_2; s_0; s_3; s_0; s_4; s_0; s_5; s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_3; s_0; s_4; s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{s_1; s_2; s_0; s_3; s_4; s_0; s_5; s_1\}$ est un cycle de longueur 7.



2 CHAÎNES DE LONGUEUR DONNÉE

NOMBRE DE CHAÎNES

Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice M^n .

DISTANCE

Soit G un graphe; si x et y sont deux sommets de G , la distance de x à y notée $d(x, y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y .

REMARQUES

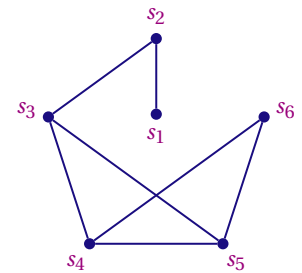
- La distance d'un sommet à lui même est nulle.
- S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y , la distance de x à y est infinie.

DIAMÈTRE

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

EXEMPLE

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre



Déterminons la matrice des distances D du graphe, dont le coefficient $d_{i,j}$ est égal à la distance entre les sommets i et j .

La distance d'un sommet à lui même est nulle et, on utilise le symbole ∞ pour indiquer que la distance entre deux sommets n'est pas encore fixée.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 1 :

La matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 2 :

La matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 3 :

La matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ donne les distances égales à 4 :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La plus grande des distances entre deux sommets du graphe est 4 donc le diamètre du graphe est 4.

3 CONNEXITÉ

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G .

Autrement dit : Un graphe est connexe si on peut atteindre n'importe quel sommet à partir d'un sommet quelconque en parcourant différentes arêtes

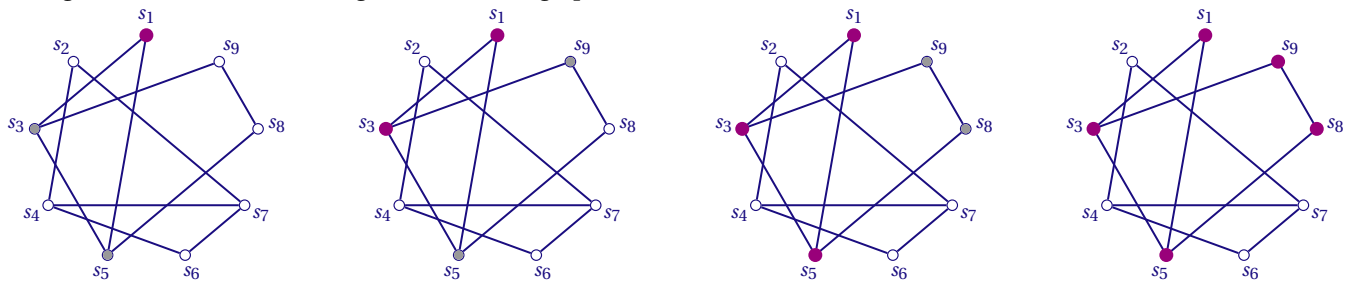
ALGORITHME

L'algorithme suivant permet de déterminer tous les sommets qui peuvent être atteints à partir d'un sommet.

Marquer provisoirement (*au crayon*) le sommet x ;
Tant que des sommets sont provisoirement marqués
 choisir un sommet y provisoirement marqué;
 marquer provisoirement les sommets adjacents non marqués;
 marquer définitivement (*à l'encre*) y ;
Fin Tant que

Si tous les sommets sont définitivement marqués alors le graphe est connexe, sinon on a obtenu *la classe de connexité* du sommet x .

La figure suivante illustre cet algorithme sur un graphe



Le graphe n'est pas connexe, il n'existe pas de chaîne entre les sommets s_1 et s_2 .

4 CYCLE EULÉRIEN

DÉFINITION

Un cycle eulérien (*respectivement une chaîne eulérienne*) dans un graphe G est un cycle (*respectivement une chaîne*) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

THÉORÈME 1

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

* DÉMONSTRATION

Si le graphe possède 0 ou 1 sommet, la preuve est triviale, on suppose donc que l'ordre du graphe est supérieur ou égal à 2.

Si le graphe connexe admet un cycle eulérien alors en chaque sommet le cycle eulérien « entrant » dans le sommet doit « ressortir » et comme les arêtes du cycle ne peuvent être utilisées qu'une fois, chaque sommet est de degré pair.

Réciproquement :

Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.

Comme G possède au moins deux sommets, tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe au moins un cycle dans G .

Formons un cycle C_1 dans G (chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes).

— Si C_1 contient toutes les arêtes du graphe alors G admet un cycle eulérien et le théorème est démontré.

— Dans le cas contraire, le sous graphe H de G défini par les arêtes non utilisées par C_1 a tous ses sommets de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet.

Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle C_1 . Soit x_i un tel sommet. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle C_2 dans H à partir de x_i .

En insérant dans le cycle C_1 à partir du sommet x_i le cycle C_2 , on obtient un cycle C'_1 . Si ce cycle contient toutes les arêtes de G , C'_1 est le cycle eulérien cherché.

Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.

THÉORÈME 2

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne

* DÉMONSTRATION

Soit G un graphe connexe. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, alors le graphe G admet un cycle eulérien.

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2. Soit s_i et s_j les deux sommets de degré impair.

Le graphe G' obtenu en ajoutant l'arête $s_i s_j$ au graphe G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. G' admet un cycle eulérien dont l'origine est le sommet s_i .

Par conséquent G contient une chaîne eulérienne qui commence en s_i et se termine en s_j .

ALGORITHME

Les démonstrations précédentes permettent de construire une chaîne eulérienne dans un graphe connexe dont le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

```
SI deux sommets sont de degré impair ALORS
    construire une chaîne simple  $C$  ayant pour extrémités ces deux sommets;
Fin SI
SI tous les sommets sont de degré pair ALORS
    construire un cycle  $C$  à partir d'un sommet quelconque;
Fin SI
marquer les arêtes de  $C$ ;
Tant que il reste des arêtes non marquées
    choisir un sommet  $x$  de  $C$ ;
    SI il existe un cycle d'origine  $x$  ne contenant aucune des arêtes marquées ALORS
        marquer les arêtes du cycle d'origine  $x$ ;
        remplacer dans  $C$  le sommet  $x$  par le cycle d'origine  $x$ ;
    Fin SI
Fin Tant que
```

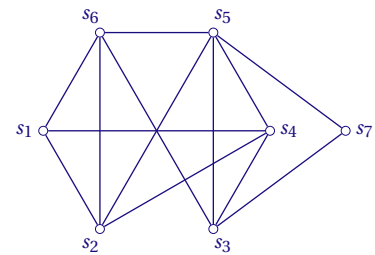
EXEMPLE

Le cycle $\{s_1; s_6; s_5; s_7; s_3; s_4; s_2; s_1\}$ contient tous les sommets du graphe G ci-contre.

Donc G est connexe.

Il n'y a que deux sommets de degré impair s_1 et s_5 .

Il existe une chaîne eulérienne d'extrémités s_1 et s_5 .

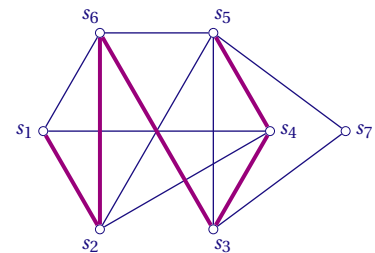


ÉTAPE 1

Les deux sommets de degré impair sont s_1 et s_5

On construit une chaîne simple joignant ces deux sommets;

$$C = \{s_1; s_2; s_6; s_3; s_4; s_5\}$$



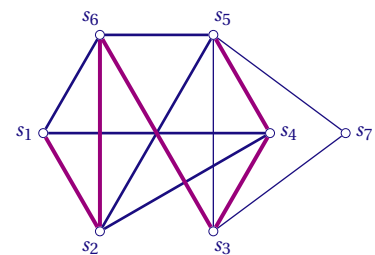
ÉTAPE 2

Le cycle simple $c_1 = \{s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_1 en remplaçant le sommet s_2 dans la chaîne C par le cycle c_1 .

$$C = \{s_1; s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2; s_6; s_3; s_4; s_5\}$$

Il reste encore des arêtes non marquées, on recommence l'étape 2

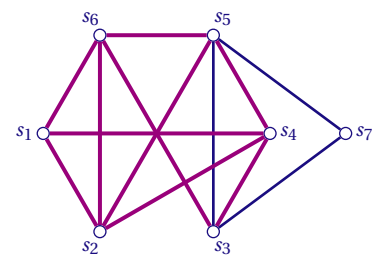


Le cycle $c_2 = \{s_3; s_7; s_5; s_3\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C .

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_2 en remplaçant le sommet s_3 dans la chaîne C par le cycle c_2 .

$$C = \{s_1; s_2; s_4; s_1; s_6; s_5; s_2; s_6; s_3; s_7; s_5; s_3; s_4; s_5\}$$

Toutes les arêtes sont marquées C est une chaîne eulérienne.



EXERCICE 1

Monsieur et madame X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains ont été échangées.

Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main.

Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.

M. X constate que les autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.

Combien de poignées de mains M. X a-t-il échangé avec les autres membres de la réunion ?

EXERCICE 2

Lors d'une soirée, certaines personnes se serrent la main.

1. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.
2. La conjecture : « Au cours de la soirée, deux personnes ont serré le même nombre de mains » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 3

Est-il possible de tracer cinq segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement trois autres ?

EXERCICE 4

Pour chacune des listes suivantes, déterminer s'il existe un graphe simple admettant cette liste pour liste des degrés des sommets. S'il existe un tel graphe, le dessiner, sinon expliquer pourquoi.

1. (0,1,2,3,4,5)
2. (2,3,3,4,4,5)
3. (1,1,1,3)
4. (1,1,2,4,4)
5. (2,3,3,4,5,6,7)

EXERCICE 5

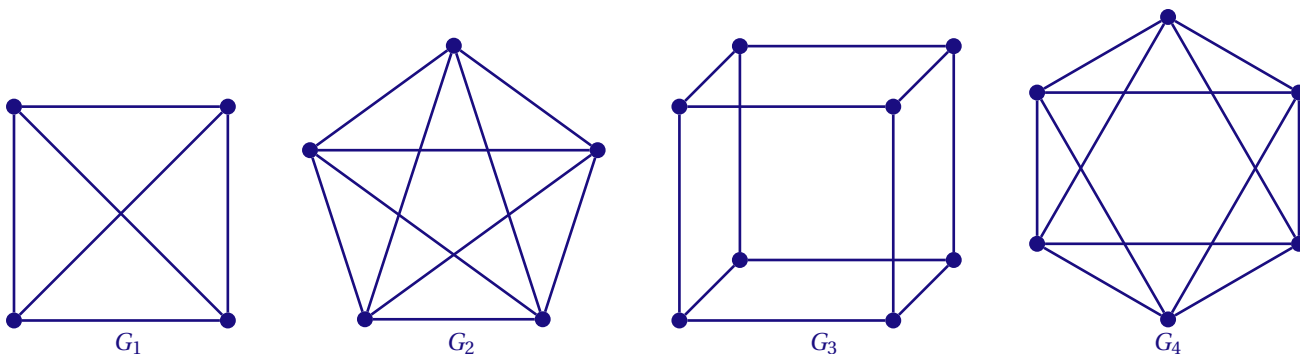
1. Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple G si la liste des degrés des sommets est (2,2,3,3,4) ?
2. Dans un graphe simple d'ordre n , quel est le nombre maximal d'arêtes ?

EXERCICE 6

Trouver deux graphes d'ordre 5 qui ne sont pas isomorphes et dont les degrés des sommets sont donnés par la liste (1,2,2,2,3).

EXERCICE 7

Un graphe est « *planaire* » si on peut le dessiner dans le plan sans que deux arêtes se croisent. Les graphes suivants sont-ils planaires ?



EXERCICE 8

1. Dessiner le graphe simple d'ordre 8 dont l'ensemble des arêtes est :

$$A = \{(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;7),(3;5),(3;6),(3;7),(4;5),(4;7),(5;6),(5;7),(6;7),(6;8),(7;8)\}$$

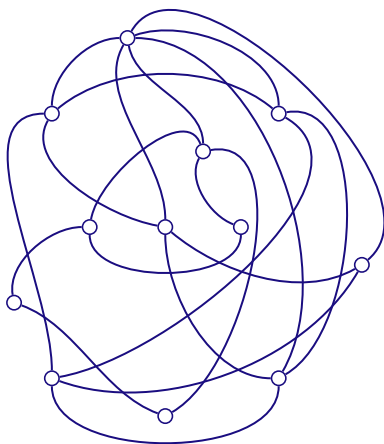
2. Donner la matrice M associée à ce graphe.
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 permettant de se rendre du sommet 1 au sommet 8 ?
Les donner tous.
4. Est-il possible de parcourir toutes les arêtes de ce graphe sans passer plus d'une fois par la même arête ?
Si oui donner un parcours possible.
5. Existe-il un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ?

EXERCICE 9

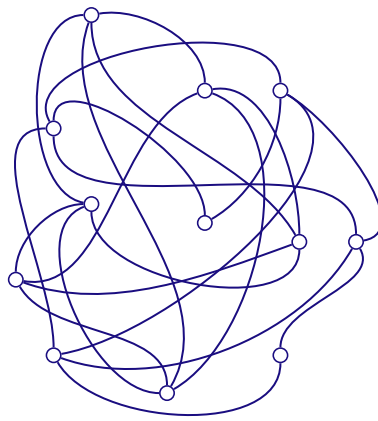
1. Dessiner un graphe simple dont la liste des degrés des sommets est $(6,6,2,2,2,2,1,1)$
 - a) qui possède une chaîne eulérienne ;
 - b) qui ne possède pas de chaîne eulérienne.
2. Est-il possible d'avoir un graphe qui possède un cycle eulérien si la liste des degrés des sommets est $(6,6,4,2,2,2,2)$?

EXERCICE 10

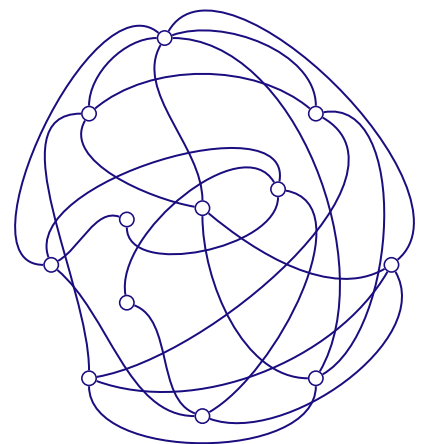
Pour chacun des graphes suivants, existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?



Graphe G



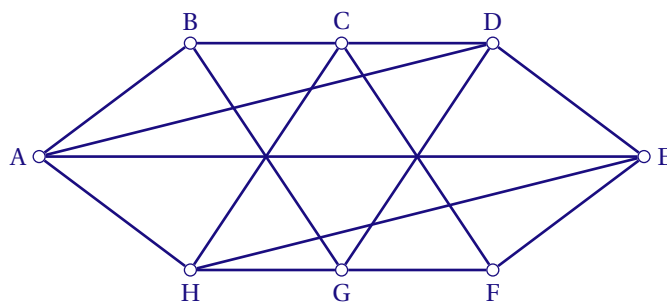
Graphe H



Graphe I

EXERCICE 11

On considère le graphe suivant :



1. Le graphe est-il connexe ?
2. Le graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.

- Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien?
- Soit M la matrice associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

On donne $M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 12 & 7 & 8 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 11 & 1 & 8 & 1 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 12 & 4 & 10 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 1 & 10 & 0 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

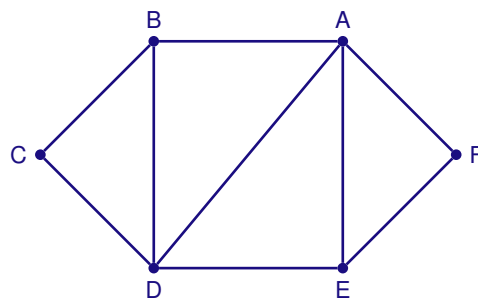
Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet G et aboutissant au sommet E.
Citer alors toutes ces chaînes.

EXERCICE 12

PARTIE A

Le graphe suivant modélise le plan d'une zone résidentielle. Les arêtes du graphe représentent les rues et les sommets du graphe les carrefours.

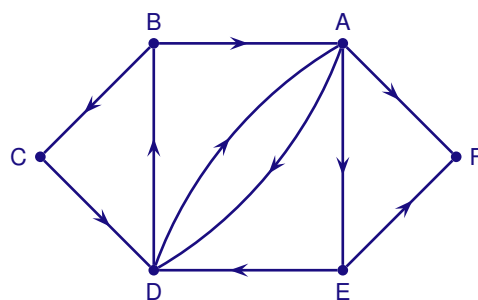
- Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
- Un piéton peut-il parcourir toutes ces rues sans emprunter plusieurs fois la même rue :
 - en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ? Justifier la réponse.
 - en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent? Justifier la réponse.



PARTIE B

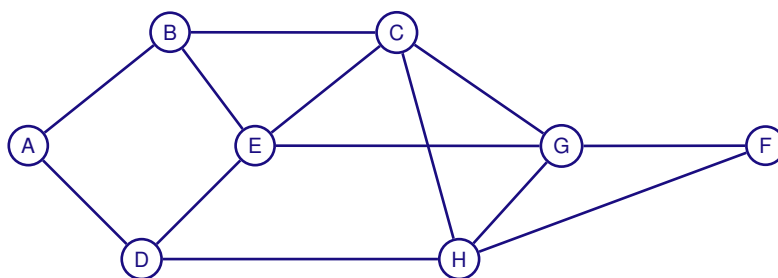
Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même zone résidentielle, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes rues.

- Expliquer pourquoi le sommet F représente une impasse.
- Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)
- En partant du carrefour C quel est le nombre minimal de rues qu'il faut emprunter pour arriver en E?
- Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 qui arrivent en F?



EXERCICE 13

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



- Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
- Déterminer en justifiant si ce graphe est : complet? connexe?

- Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.
- On range les sommets par ordre alphabétique. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
- Une des trois matrices R , S ou T est la matrice M^3 .

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 20 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 20 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 20 & 6 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 20 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

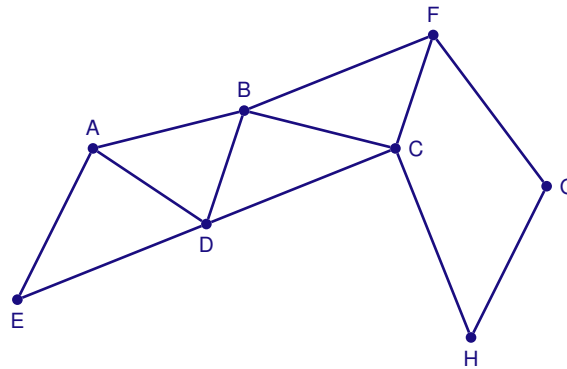
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 5 & 1 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

- Sans calculer la matrice M^3 , indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant votre choix.
- Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à F. Les citer tous.

EXERCICE 14

(D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2016)

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent des lieux où sont placés les indices ; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



PARTIE A

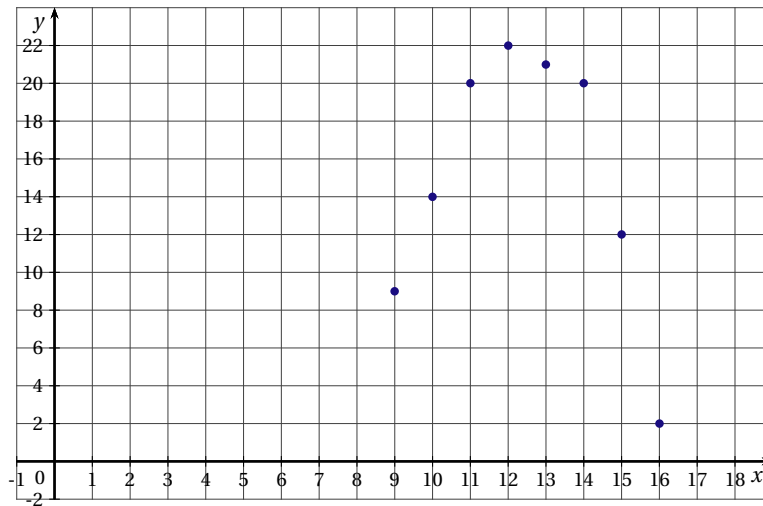
- Un enfant pourra-t-il parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule ? Si oui, indiquer un circuit possible et sinon expliquer pourquoi.
- On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$

Déterminer le nombre de parcours allant de E à H en 4 chemins pédestres. Les citer tous.

PARTIE B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9h à 16h. On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.

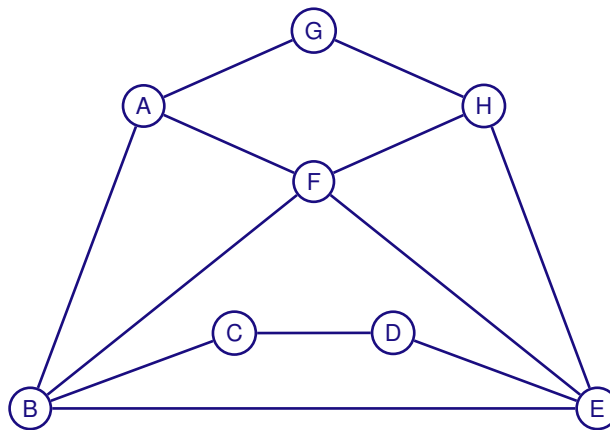
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.

On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points (9;9), (11;20) et (16;2) appartiennent à la représentation graphique de f .

1. Calculer les trois réels a, b et c .
2. En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.

EXERCICE 15

On considère le graphe Γ ci-dessous.



PARTIE A

1. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

$$2. \text{ On donne : } M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 1 & 6 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 8 & 6 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer, en justifiant, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à H. Les citer toutes.
 - b) Quelle est la distance entre les sommets B et G?
3. a) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.
 - b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.

PARTIE B

Le graphe Γ modélise le plan d'un parc. Les arêtes du graphe représentent les allées du parc et les sommets du graphe sont les intersections.

En fin de journée, un agent du service d'entretien fait le tour du parc pour nettoyer les allées.

1. Est-il possible de planifier un parcours pour que cet agent passe par toutes les allées sans emprunter plusieurs fois la même allée? Justifier la réponse. Si oui proposer un parcours.
2. Pour rationaliser le nettoyage des allées, on souhaite établir un circuit commençant et finissant par l'entrée du parc G et qui passe par toutes les allées une et une seule fois.
Quel est le nombre minimal d'allées qu'il faudrait tracer pour obtenir un tel circuit.

PARTIE C

La buvette du parc vend des crêpes (3,50 €), des glaces (3 €) et des bouteilles d'eau minérale (2,50 €).

À la fin d'une journée, la recette est de 1 120 €.

Le responsable de la buvette constate qu'il a vendu deux fois plus de bouteilles d'eau minérale que de crêpes et que le nombre de glaces vendues est égal à la somme du nombre de bouteilles d'eau minérale et de crêpes vendues.

On note a le nombre de glaces, b le nombre de bouteilles d'eau minérale et c le nombre de crêpes qui ont été vendues ce jour là.

1. Justifier que a , b et c sont solutions du système :
$$\begin{cases} 3a + 2,5b + 3,5c = 1120 \\ b - 2c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} .$$
2. Déterminer les matrices A , X et B pour que le système précédent soit équivalent à $AX = B$.
3. Déterminer a , b et c . Interpréter le résultat.

Chapitre 3

GRAPHES : PLUS COURT CHEMIN

I	GRAPHE PONDÉRÉ	179
1	définition	179
2	longueur d'un chemin	179
II	ALGORITHME DE DIJKSTRA	179
	EXERCICES	182

La recherche du meilleur itinéraire que ce soit en distance, en temps ou en coût d'un point à un autre peut être modélisée par la recherche du plus court chemin dans un graphe.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe entre deux sommets donnés.

I GRAPHE PONDÉRÉ

1 DÉFINITION

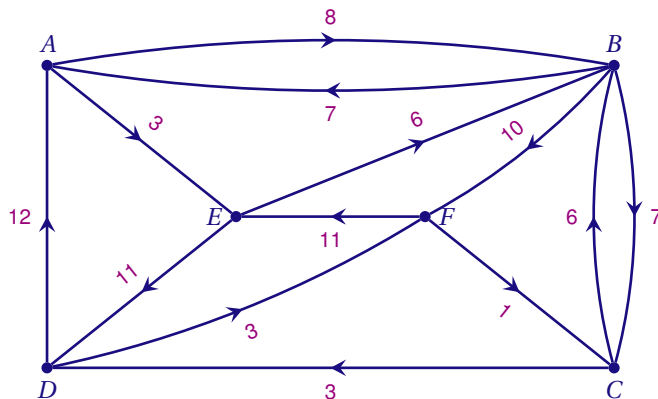
On appelle *graphe pondéré*, un graphe (orienté ou non) dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé poids (ou coût).

Par analogie avec la matrice d'adjacence, on peut définir la matrice des poids $P(a_{i,j})$ du graphe, dont les coefficients $a_{i,j}$ correspondent aux poids des arêtes (ou des arcs dans le cas d'un graphe orienté) :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{s'il n'existe pas d'arêtes (ou d'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \\ p_{ij} & \text{où } p_{ij} \text{ est le poids de l'arête (ou de l'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \end{cases}$$

On utilise le symbole ∞ pour indiquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets.

EXEMPLE



Les sommets du graphe étant rangés dans l'ordre alphabétique :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 7 & 0 & 7 & \infty & \infty & 10 \\ \infty & 6 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 6 & \infty & 11 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LONGUEUR D'UN CHEMIN

Soit $C(x,y)$ un chemin (ou une chaîne) dans un graphe pondéré G du sommet x vers le sommet y . La longueur de ce chemin est égale à la somme des poids de chacun arcs (ou de chacune des arêtes) qui le constituent.

REMARQUE

Cette définition généralise la définition de la longueur d'une chaîne dans un graphe non pondéré, il suffit d'attribuer un poids égal à 1 à chaque arête du graphe.

Dans l'exemple précédent, la longueur du chemin $AEBF$ est 19.

Si on souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F, on peut essayer d'énumérer tous les chemins ABF , $AEBF$, $AEDF$, $ABCDF$, $AEBCDF$ et calculer leurs longueurs. Mais avec un graphe de taille plus importante, ceci risque de devenir rapidement impossible.

Pour résoudre ce problème, on fait appel à des algorithmes.

En terminale ES, on n'étudie que le cas particulier où **les poids de tous les arcs sont des réels positifs**.

II ALGORITHME DE DIJKSTRA

E. W. Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres dans un graphe pondéré dont tous les poids sont positifs.

L'algorithme comporte une phase d'initialisation. À chaque sommet on attribue un poids qui vaut 0 pour le sommet de départ et infini pour les autres sommets.

Le traitement de l'algorithme consiste à examiner les sommets les uns après les autres et à sélectionner le sommet x auquel on a affecté la plus petite distance du sommet de départ jusqu'à x .

On recommence tant qu'il reste des sommets à sélectionner.

Soit G un graphe *connexe* dont les arêtes sont pondérées par des nombres *positifs*.

NOTATIONS :

S la liste des sommets du graphe

s_0 le sommet du graphe à partir duquel on veut déterminer les plus courts chemins aux autres sommets

$l(x,y)$ le poids de l'arête entre deux sommets x et y

$\delta_s(x)$ la longueur d'un chemin du sommets s_0 au sommet x

$V^+(x)$ la liste des successeurs du sommet x

$p(x)$ le prédécesseur du sommet x

X liste des sommets restant à traiter.

E liste des sommets déjà traités.

INITIALISATION :

POUR CHAQUE $x \in S$ FAIRE $\delta_s(x) = \infty$

On attribue un poids ∞ à chacun des sommets x

$\delta_s(s_0) = 0$

Le poids du sommet s_0 est nul

$X = S$

La liste des sommets restant à traiter est initialisée à S

$E = \emptyset$

La liste des sommets déjà traités vide

TRAITEMENT :

TANT_QUE $X \neq \emptyset$ FAIRE

Tant que la liste des sommets restant à traiter n'est pas vide

 Sélectionner dans la liste X le sommet x avec $\delta_s(x)$ minimum

 Retirer le sommet x de la liste X

 Ajouter le sommet x à la liste E

 POUR CHAQUE $y \in V^+(x) \cap X$ FAIRE

On examine tous les successeurs y du sommet x qui ne sont pas traités

 SI $\delta_s(y) > \delta_s(x) + l(x,y)$ ALORS

$\delta_s(y)$ prend la valeur $\delta_s(x) + l(x,y)$

La distance du sommet s_0 au sommet y est minimale

$p(y) = x$

le sommet x est le prédécesseur du sommet y

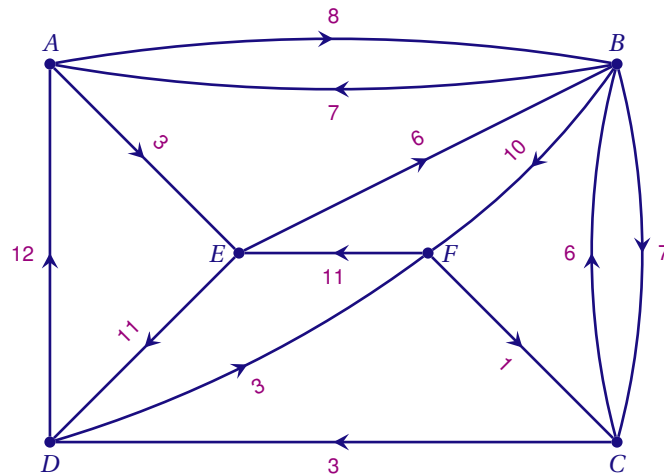
 FIN SI

 FIN POUR

FIN TANT_QUE

EXEMPLE

Considérons le graphe suivant :



On souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F.

A	B	C	D	E	F	Sommets sélectionnés	
0	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)	Initialisation; $\delta(A) = 0$ A est sélectionné.
	8(A)	∞	∞	3(A)	∞	E(3)	B et E sont les successeurs de A qui ne sont pas traités; $0 + 8 < \infty$ donc $\delta(B) = 8$ et $p(B) = A$; $0 + 3 < \infty$ donc $\delta(E) = 3$ et $p(E) = A$; $\delta_{min} = 3$, Le sommet E est sélectionné.
	8(A)	∞	14(E)		∞	B(8)	B et D sont les successeurs de E qui ne sont pas traités; $3 + 6 > 8$ on ne change pas $\delta(B) = 8$ et $p(B) = A$; $3 + 11 < \infty$ donc $\delta(D) = 14$ et $p(D) = E$; $\delta_{min} = 8$, Le sommet B est sélectionné.
		15(B)	14(E)		18(B)	D(14)	C et F sont les successeurs de B qui ne sont pas traités; $8 + 7 < \infty$ donc $\delta(C) = 15$ et $p(C) = B$; $8 + 10 < \infty$ donc $\delta(F) = 18$ et $p(F) = B$; $\delta_{min} = 14$, Le sommet D est sélectionné.
	15(B)				17(D)	C(15)	F est le successeur de D qui n'est pas traité; $14 + 3 < 18$ donc $\delta(F) = 17$ et $p(F) = D$; $\delta_{min} = 15$, Le sommet C est sélectionné.
					17(D)	F(17)	le successeur de C est déjà traité; Le sommet F est le dernier sommet traité.

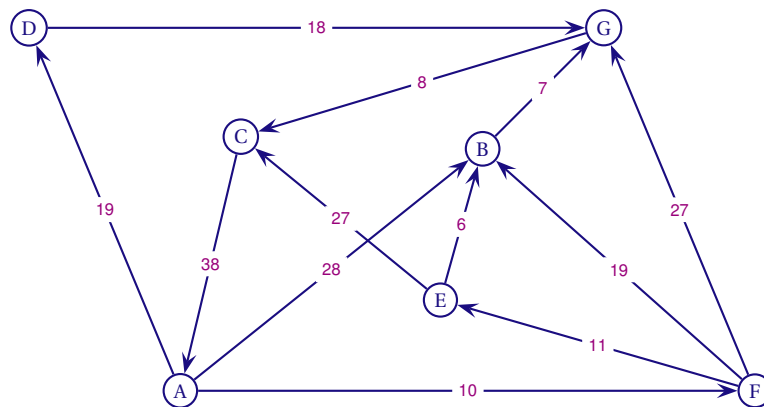
- L'algorithme de Dijkstra fournit les longueurs des plus courts chemins du sommet origine aux différents sommets.
- Pour déterminer le plus court chemin du sommet origine à un sommet x , il suffit de remonter la liste des prédécesseurs en partant de x .

Ainsi, le plus court chemin de A à F est un chemin de longueur 17.

Dans la colonne F on lit que le prédécesseur de F est le sommet D. Le prédécesseur de D est E et, le prédécesseur de E est A.

Ainsi, la liste des prédécesseurs est $F \leftarrow D \leftarrow E \leftarrow A$.

Le plus court chemin de A à F est donc : A-E-D-F.

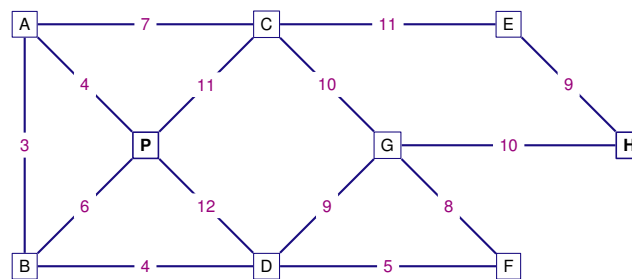


Un automobiliste doit se rendre de A à C. En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le plus rapide pour aller de A à C.

Le retour sera-t-il plus rapide que l'aller?

EXERCICE 4

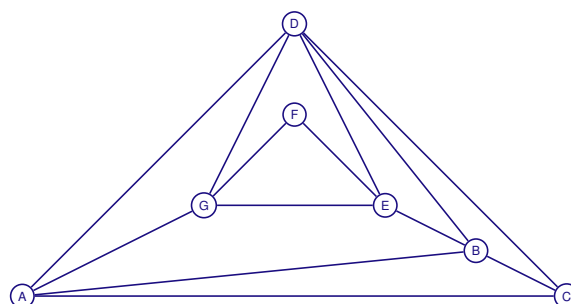
Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'un quartier. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



- Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.
 - Montrer qu'un tel parcours est possible.
 - Un tel parcours est-il possible pour ce candidat en partant de sa permanence électorale située en P? si oui le donner, sinon proposer un parcours possible en partant d'un autre endroit.
- Un candidat aux élections municipales se trouve dans sa permanence située en zone P quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone H.
 - Quel est le nombre minimal de voies d'accès principales que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous?
 - Le poids des arêtes du graphe précédent donne, en minutes, les durées moyennes des trajets existants entre les différents lieux :
En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.
Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet?

EXERCICE 5

On considère le graphe ci-dessous :

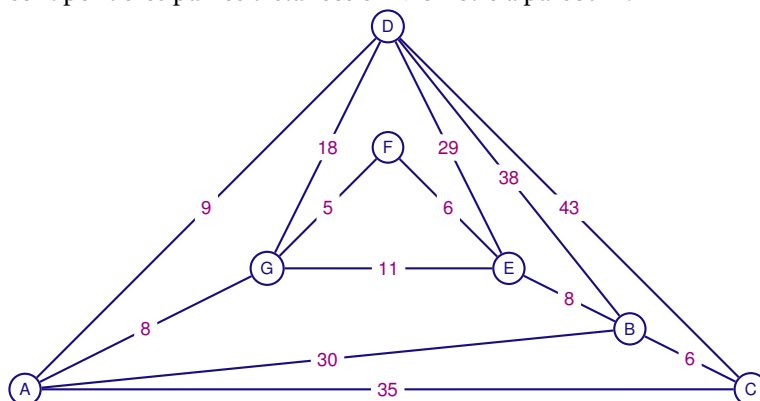


1. On appelle M la matrice associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
Une des trois matrices R , S ou T est la matrice M^3 .

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 12 & 8 & 9 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 6 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 11 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 7 & 11 & 6 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 11 & 7 & 6 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sans calculer la matrice M^3 , indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant votre choix.

2. Ce graphe est-il complet? Ce graphe est-il connexe?
3. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
4. Un représentant, a modélisé à l'aide du graphe ci-dessous le réseau routier reliant différents clients notés A, B, C, D, E, F et G. Les arêtes sont pondérées par les distances en kilomètre à parcourir.



Après avoir visité le client C, ce représentant souhaite se rendre chez le client D.

- a) En précisant la méthode utilisée, déterminer le trajet le plus court (en kilomètres) pour aller de C à D. Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.
b) Existe-t-il un parcours de même distance permettant à ce représentant de visiter tous ses clients?

EXERCICE 6

PARTIE A

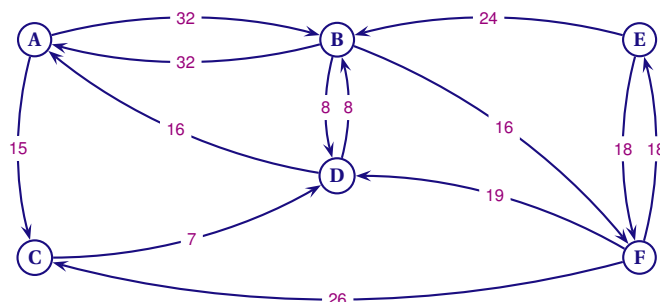
On considère le graphe de sommets A, B, C, D, E et F dont la matrice associée est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Quel est le nombre d'arêtes de ce graphe?
2. Ce graphe est-il complet? Ce graphe est-il connexe?
3. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.

PARTIE B

Après avoir chargé son camion à l'entrepôt noté A , un livreur doit livrer cinq clients notés B, C, D, E et F .

Le graphe ci-dessous, modélise le réseau routier en tenant compte des sens de circulation et des temps de parcours en minutes.

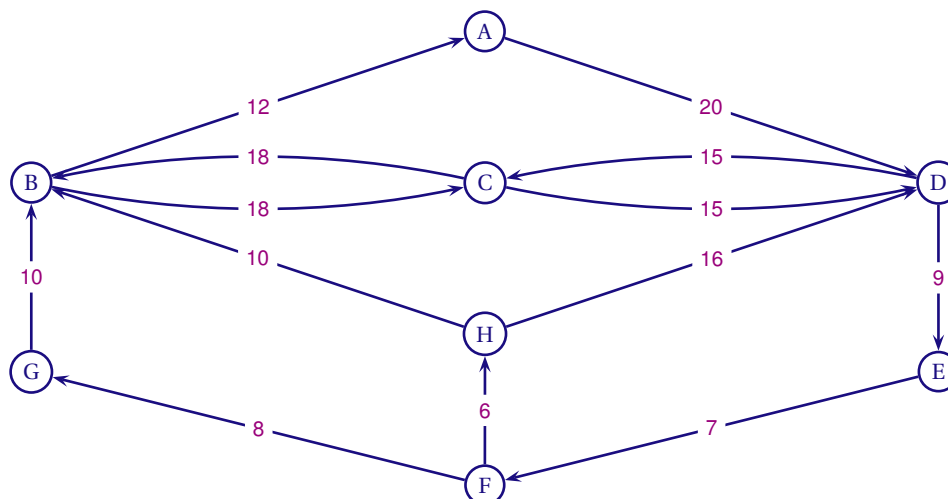


1. Quel trajet permet de minimiser le temps de parcours pour effectuer les cinq livraisons?
2. Après avoir effectué ses livraisons, le livreur doit retourner l'entrepôt. Quel trajet lui permet de minimiser son temps de parcours pour le retour?
En ne tenant pas compte des arrêts nécessaires pour effectuer les livraisons, le trajet du retour est-il plus rapide que celui de l'aller?

EXERCICE 7

PARTIE A

Le graphe orienté ci-dessous modélise le plan de circulation des poids lourds entre différents villages d'une zone touristique. Les arêtes sont pondérées par les distances entre deux villages, exprimées en kilomètres.



Un fournisseur dont le dépôt est situé dans le village D doit effectuer une livraison de produits frais, en camion frigorifique, à un client du village B.

À l'aide d'un algorithme, déterminer l'itinéraire le plus court entre les villages D et B. Quelle est la distance parcourue?

PARTIE B

Une agence de voyage propose un circuit touristique pour visiter les trois villages A, B et C. Le client peut choisir la durée du séjour dans chaque village.

L'agence distingue deux périodes, la haute et la basse saison, et différencie ses tarifs selon la période.

Les tarifs dans les différents villages, en euro par personne et par jour, sont donnés dans le tableau suivant.

	Village A	Village B	Village C
Nombre de jours	1	1	1
Tarif haute saison	160	220	140
Tarif basse saison	130	180	110

On note P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 160 & 220 & 140 \\ 130 & 180 & 110 \end{pmatrix}$.

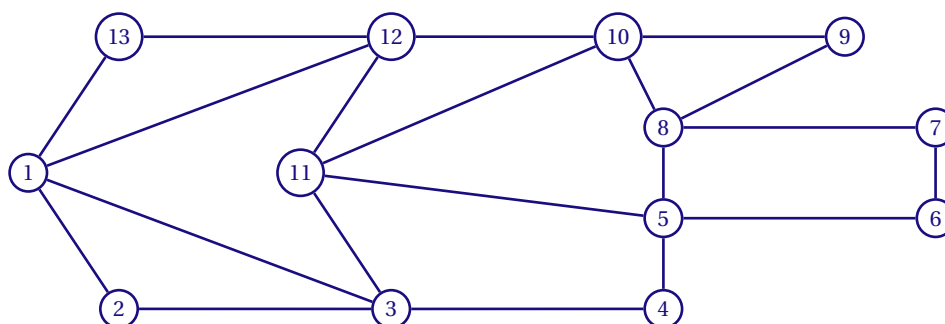
Un client souhaite effectuer un circuit qui comprend quatre jours dans le village A, six jours dans le village B et deux jours dans le village C. On associe à ce choix la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $P \times S$. Que représentent les termes de la matrice obtenue?
2. Ce client dispose d'un budget de 2 000 €. Pourra-t-il réaliser son voyage?

PARTIE C

Dans le village C se trouve un camping dont le plan est schématisé par le graphe ci-dessous.

Les arêtes sont les allées du camping et les sommets les carrefours.



Afin d'optimiser le nettoyage des allées, le gestionnaire du camping souhaite établir un parcours qui passe une seule fois par chaque allée.

Un tel parcours est-il possible ?

Chapitre 4

GRAPHES PROBABILISTES

ACTIVITÉ	188
I DÉFINITIONS	189
1 graphe probabiliste	189
2 matrice de transition	189
3 état probabiliste	189
II ÉVOLUTION D'UN ÉTAT AU COURS DU TEMPS	190
1 proposition	190
2 théorème	190
3 état stable	190
4 propriété	191
EXERCICES	193

ACTIVITÉ 1

Étude du marché du travail de la population (15-65 ans) d'un pays fictif.

En 2016, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.
Les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail de ce pays les années précédentes sont données, en pourcentage, dans le tableau suivant :

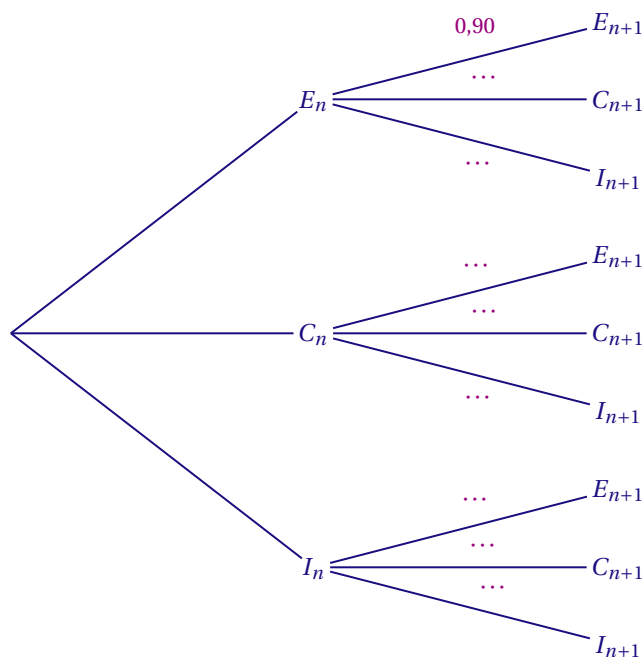
Année n	Année $n + 1$		
	Emploi	Chômage	Inactif
Emploi	90	3	7
Chômage	30	43	27
Inactif	14	7	79

Ce tableau synthétise les changements de situation entre deux années consécutives : 90% des personnes qui ont un emploi une année donnée occupent un emploi l'année suivante.

On interroge au hasard une personne de la population (15-65 ans). Soit n un entier naturel, on note :

- E_n l'évènement « Cette personne occupe un emploi l'année 2016 + n » ;
- C_n l'évènement « Cette personne est au chômage l'année 2016 + n » ;
- I_n l'évènement « Cette personne est inactive l'année 2016 + n ».
- e_n , c_n et i_n les probabilités respectives $P(E_n)$, $P(C_n)$ et $P(I_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré qui traduit l'évolution de la situation entre les années n et $n + 1$



2. Calculer les probabilités e_1 et c_1 . En déduire la probabilité i_1 .
3. Calculer la probabilité c_2 .
4. Exprimer les probabilités e_{n+1} , c_{n+1} et i_{n+1} en fonction des probabilités e_n , c_n et i_n .

I DÉFINITIONS

1 GRAPHE PROBABILISTE

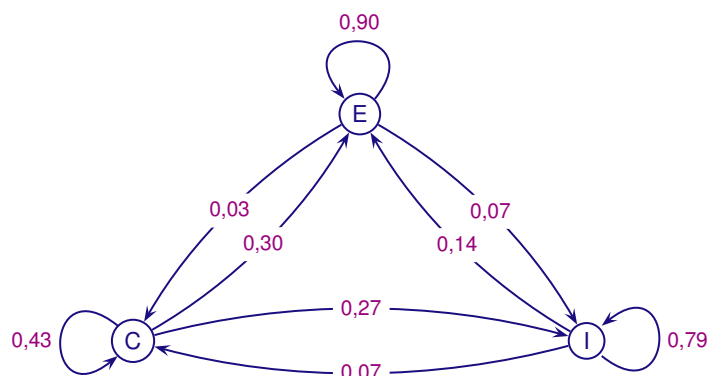
Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré (sans arêtes parallèles) dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :

- les sommets du graphe sont les états possibles du système;
- le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'évènement j à l'étape $n + 1$ sachant que l'évènement i est réalisé à l'étape n .

EXEMPLE

Notons respectivement E, C et I les trois états emploi chômage et inactivité de l'activité 1. Le graphe probabiliste associé est :



2 MATRICE DE TRANSITION

La matrice de transition associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et pour chaque ligne la somme des coefficients est égale à 1.

Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n + 1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n .

EXEMPLE

La matrice de transition M du graphe précédent est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$$

3 ÉTAT PROBABILISTE

Un état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.
Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que la somme des termes est égale à 1.

EXEMPLE

Dans l'activité 1, en 2016, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.

Notons P_0 l'état probabiliste de l'année 2016 :

$$P_0 = (0,69 \quad 0,06 \quad 0,25)$$

II ÉVOLUTION D'UN ÉTAT AU COURS DU TEMPS

Étudions l'évolution au cours du temps du système à trois états (emploi, chômage, inactif) de l'activité 1 :

Soit $P_n = (e_n \quad c_n \quad i_n)$ l'état probabiliste du système l'année n .

D'après la formule des probabilités totales, l'année $n + 1$:

$$e_{n+1} = e_n \times 0,90 + c_n \times 0,30 + i_n \times 0,14$$

$$c_{n+1} = e_n \times 0,03 + c_n \times 0,43 + i_n \times 0,27$$

$$i_{n+1} = e_n \times 0,14 + c_n \times 0,07 + i_n \times 0,79$$

L'état probabiliste du système l'année $n + 1$ est :

$$P_{n+1} = (e_n \times 0,90 + c_n \times 0,30 + i_n \times 0,14 \quad e_n \times 0,03 + c_n \times 0,43 + i_n \times 0,27 \quad e_n \times 0,14 + c_n \times 0,07 + i_n \times 0,79)$$

$$\text{Soit } P_{n+1} = (e_n \quad c_n \quad i_n) \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$$

1 PROPOSITION

On considère un système qui peut se trouver dans k états $1, 2, \dots, k$ avec une certaine probabilité et on étudie l'évolution de ce système au cours du temps.

Soit $P_n = (a_1 \quad \dots \quad a_k)$ l'état probabiliste du système à l'instant n , M la matrice de transition et P_{n+1} l'état probabiliste du système à l'instant $n + 1$. Alors, pour tout entier n , on a

$$P_{n+1} = P_n M$$

EXEMPLE

Avec les données de l'exemple précédent :

$$P_1 = (0,69 \quad 0,06 \quad 0,25) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix} = (0,674 \quad 0,064 \quad 0,262)$$

En 2017 6,4% de la population était au chômage.

2 THÉORÈME

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre p , si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n , on a $P_n = P_0 \times M^n$

EXEMPLE

Calculons l'état probabiliste prévisible en 2020 :

$$P_4 = (0,69 \quad 0,06 \quad 0,25) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}^4 \approx (0,648 \quad 0,068 \quad 0,284)$$

En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur les transitions dans le marché du travail, en 2020 environ 6,8% de la population (15-65 ans) de ce pays serait au chômage.

3 ÉTAT STABLE

Un état stable d'un graphe probabiliste de matrice de transition M est un état P tel que $P = PM$.

EXEMPLE

Déterminons l'état stable P du système emploi, chômage et inactivité sur le marché du travail.

Soit $P = (e \quad c \quad i)$ l'état stable. Nous avons :

$$P = PM \iff (e \quad c \quad i) = (e \quad c \quad i) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$$

$$\iff (e \quad c \quad i) = (0,9e + 0,3c + 0,14i \quad 0,03e + 0,43c + 0,07i \quad 0,07e + 0,27c + 0,79i)$$

Or P est un état probabiliste d'où $e + c + i = 1$. Par conséquent e , c et i sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0,9e + 0,3c + 0,14i = e \\ 0,03e + 0,43c + 0,07i = c \\ 0,07e + 0,27c + 0,79i = i \\ e + c + i = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0,1e + 0,3c + 0,14i = 0 \\ 0,03e - 0,57c + 0,07i = 0 \\ 0,07e + 0,27c - 0,21i = 0 \\ e + c + i = 1 \end{cases} \quad L_3 = -(L_1 + L_2)$$

$$\iff \begin{cases} -0,1e + 0,3c + 0,14i = 0 \\ 0,03e - 0,57c + 0,07i = 0 \\ e + c + i = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,4c + 0,24i = 0,1 \\ 0,6c - 0,04i = 0,03 \\ e + c + i = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e + c + i = 1 \\ 0,4c + 0,24i = 0,1 \\ 0,8i = 0,24 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e = 0,63 \\ c = 0,07 \\ i = 0,30 \end{cases}$$

L'état stable du système est $P = (0,63 \quad 0,07 \quad 0,30)$.

En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur le marché du travail, sur le long terme environ 7% de la population (15-65 ans) serait au chômage.

REMARQUE

Le taux de chômage est le rapport entre le chômage et la population active (emploi+chômage) soit :

$$\frac{0,07}{0,63 + 0,07} = 0,1$$

Sur le long terme, le taux du chômage se stabilise à 10%

4 PROPRIÉTÉ

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0 .

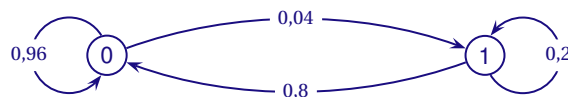
EXEMPLE

En salle des professeurs, il y a deux photocopieuses qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque photocopieuse en état de marche a une probabilité égale à 0,2 de tomber en panne pendant la journée. Dans le cas où une photocopieuse tombe en panne pendant la journée, elle est réparée en fin de journée et se retrouve donc en état de marche le lendemain.

Supposons que l'on ne puisse pas réparer plus d'une photocopieuse chaque jour.

On s'intéresse au nombre de photocopieuses en panne en début de journée.

Le graphe probabiliste est un graphe à deux états 0 ou 1 :



dont la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Soit $P = (a \quad b)$ l'état stable du système. Nous avons :

$$\begin{aligned} P = PM &\iff (a \quad b) = (a \quad b) \times \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \\ &\iff (a \quad b) = (0,96a + 0,8b \quad 0,04a + 0,2b) \end{aligned}$$

Or P est un état probabiliste d'où $a + b = 1$. Par conséquent a et b sont solutions du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,96a + 0,8b &= a \\ 0,04a + 0,2b &= b \\ a + b &= 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 0,04a - 0,8b &= 0 \\ 0,04a - 0,8b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0,04a - 0,8b &= 0 \\ a + b &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= \frac{20}{21} \\ b &= \frac{1}{21} \end{cases} \end{aligned}$$

L'état stable du système est $P = \left(\frac{20}{21} \quad \frac{1}{21} \right)$. Quel que soit l'état initial, au bout d'un certain nombre jours, la probabilité que chaque jour aucune photocopieuse ne soit en panne est égale à $\frac{20}{21}$.

EXERCICE 1

Une chaîne de magasins de prêt à porter a adopté en fonction du succès ou de l'échec d'un type de vêtement mis en vente, la stratégie commerciale suivante :

- En cas de succès du modèle vendu on conserve le même modèle le mois suivant. Il a alors une probabilité 0,5 de se retrouver en situation d'échec.
 - En cas d'échec on change de modèle le mois suivant en adoptant une politique commerciale plus agressive (prix plus ajusté, publicité etc). Il a alors une probabilité 0,6 d'avoir du succès.
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états.
 2. On suppose qu'en cas de succès d'un modèle, l'entreprise gagne 12€ par article et qu'en cas d'échec, elle perd 1,20€ par article.
 - a) En cas de succès d'un modèle, quel est le gain moyen sur ce modèle un mois plus tard?
 - b) Quel est le montant du gain moyen que cette entreprise peut espérer réaliser sur le long terme?

EXERCICE 2

1. Représenter le graphe probabiliste à trois états $\{A, B, C\}$ dont la matrice de transition associée est $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
2. On note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n .
On suppose que $P_0 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}\right)$. Calculer P_1 et P_3
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système.

EXERCICE 3

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

- une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle;
- une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

- 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule;
- 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2016, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ avec $a_n + b_n = 1$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année 2016 + n . L'état probabiliste initial est donc $P_0 = (0,8 \quad 0,2)$.
 - a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2017.
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.
3. On pose pour tout entier n , $u_n = a_n - 0,4$.
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
 - b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,4 \times (1 + 0,5^n)$
 - c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite (a_n) . Donner une interprétation concrète de ce résultat.
 - d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401?

EXERCICE 4

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.

Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.

Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n -ième mois après l'étude et $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n -ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$.

- Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
- Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
 - Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $(0,564 \quad 0,436)$.
- Soit $P = (a \quad b)$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$. Déterminer les réels a et b . Interpréter ce résultat.
- À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_n = a_n - 0,6$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.
 - Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$.
 - À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à $0,595$?

EXERCICE 5

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.

Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

- 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative;
- Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif;
- 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

- Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F , N et R .

- On note M la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,28 & 0,1 \\ 0,32 & \dots & 0,1 \\ \dots & \dots & 0,7 \end{pmatrix}$.

- L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.

L'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n , b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n .

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0 = (0 \quad 1 \quad 0)$.

- Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est $P_1 = (0,32 \quad 0,58 \quad 0,1)$.
- Déterminer l'état probabiliste P_3 . Interpréter ce résultat.
- Déterminer l'état probabiliste stable du système.
- En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire?

EXERCICE 6

Un industriel décide de modifier l'emballage d'un de ses produits.

On note A le conditionnement actuel du produit et B le nouveau conditionnement.

À partir des études réalisées au préalable, la direction commerciale estime que 28 % des consommateurs choisissant le conditionnement A et 12 % des consommateurs choisissant le conditionnement B changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Pour tout entier naturel n , on note a_n et b_n les probabilités qu'un consommateur choisisse respectivement le conditionnement A et le conditionnement B le n -ième mois après la mise sur le marché du conditionnement B et $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n -ième mois après la mise sur le marché du nouveau conditionnement. Ainsi, $P_0 = (1 \quad 0)$.

PARTIE A

- Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
- Donner la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

- b) Calculer la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement B deux mois après sa mise sur le marché.
3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
Déterminer les réels a et b . Interpréter ce résultat.

PARTIE B

L'industriel décide de ne plus proposer le conditionnement A à partir du mois où il prévoit que moins de 32 % des consommateurs choisiront ce conditionnement.

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,12$.
- Recopier et compléter l'algorithme suivant pour calculer le nombre de mois au bout duquel le conditionnement A sera retiré du marché.

```

A ← 1
N ← 0
Tant que .....
    A ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
    
```

- Pour tout nombre entier naturel n , on définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,3$.
 - Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $a_n = 0,7 \times 0,6^n + 0,3$.
- Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,7 \times 0,6^n + 0,3 \leq 0,32$.
En déduire au bout de combien de mois, le conditionnement A sera retiré du marché.

EXERCICE 7

Après avoir effectué quelques parties au jeu « 2048 » Léa a constaté que :

- quand elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,64.
- quand elle a perdue, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à 0,14.

On note G l'état : « Léa a gagné la partie » et P l'état : « Léa a perdu la partie ».

Pour un jour donné, on note également pour tout entier naturel n :

- g_n la probabilité que Léa gagne la n -ième partie;
- p_n la probabilité que Léa perde la n -ième partie;
- $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n -ième partie.

On suppose que la veille du jour considéré, Léa avait gagné sa dernière partie, on a donc $g_0 = 1$ et $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Traduire les données par un graphe probabiliste.
 - Préciser la matrice de transition M associée à ce graphe.
 - Calculer la probabilité que Léa gagne sa troisième partie.
 - Déterminer l'état stable du graphe probabiliste.
- Montrer que pour tout entier naturel n , on a $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,14$.
- On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n , par $u_n = g_n - 0,28$.
 - Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
 - En déduire que pour tout entier naturel n , $g_n = 0,72 \times 0,5^n + 0,28$.
- À partir de combien de parties dans la journée la probabilité que Léa gagne sa partie sera-t-elle strictement inférieure à 0,3 ?

EXERCICE 8

(D'après sujet bac Polynésie 2015)

PARTIE A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

Le tableau 1 indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le tableau 2 indique le coût horaire par poste de travail.

Poste 1	25 €/h
Poste 2	20 €/h
Poste 3	15 €/h

- Soit H et C les deux matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.
 - Donner la matrice produit $P = H \times C$.
 - Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?
- Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :
Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €
Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a , b et c , permettant d'obtenir ces prix de revient.
 - Montrer que les réels a , b et c doivent être solutions du système $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer les réels a , b et c .

PARTIE B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1. a) Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.
b) Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe, $M = \begin{pmatrix} \cdots & 0,3 \\ 0,5 & \cdots \end{pmatrix}$.
2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état d'un spot à l'étape n , où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.
On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.
a) Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n .
b) Déterminer les coefficients de la matrice P_3 . Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes?
3. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste.

EXERCICE 9

(D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017)

Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos réservé à ses habitants.

Pour cette étude, on suppose que la population de la ville reste constante.

Le 1^{er} janvier 2017, la ville compte 5 % d'abonnés parmi ses habitants. Ces dernières années, le responsable du service location a constaté que :

- 93 % des abonnements sont renouvelés;
- 1 % des habitants qui n'étaient pas abonnés l'année précédente souscrivent un abonnement.

On note A l'état : « un habitant est abonné » et P l'état : « un habitant n'est pas abonné ».

Pour tout entier naturel n , on désigne par a_n la probabilité qu'un habitant soit abonné l'année $2017 + n$ et p_n la probabilité qu'un habitant ne soit pas abonné l'année $2017 + n$.

La matrice ligne $R_n = (a_n \quad p_n)$ donne l'état probabiliste du nombre d'abonnés l'année 2017 + n .

Ainsi $R_0 = \begin{pmatrix} a_0 & p_0 \end{pmatrix} = (0,05 \quad 0,95)$.

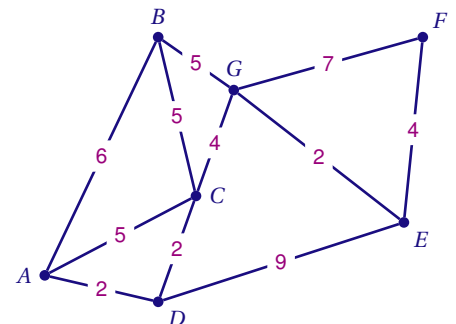
1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et P où le sommet A représente l'état « un habitant est abonné » et P l'état « un habitant n'est pas abonné ».
2. Déterminer la matrice de transition T de ce graphe en respectant l'ordre A puis P des sommets.
3. Déterminer R_1 .
4. Déterminer l'état probabiliste en 2021.
Les résultats seront arrondis au millièmes.
5. On admet qu'il existe un état stable $(x \ y)$.
 - a) Justifier que x et y sont solutions du système :
$$\begin{cases} -7x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$
 - b) Déterminer l'état stable de ce graphe.

PARTIE B

Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville.

On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-contre dont les sommets représentent les parkings à vélo.

Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.



1. Le responsable peut-il planifier un parcours partant de son bureau situé en A jusqu'à la mairie située en F en passant par toutes les pistes cyclables sans emprunter deux fois le même chemin ?
2. Le responsable est pressé. Déterminer le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à F.

EXERCICE 10

(D'après sujet bac Amérique du Sud 2017)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

PARTIE A

Pour les déplacements entre les principales villes d'une région, les habitants peuvent acquérir soit la carte d'abonnement bus (PassBus), soit la carte d'abonnement train (PassTrain), toutes les deux étant valables un an.

Une étude récente montre que le nombre global d'abonnements reste constant dans le temps et que, chaque année, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :

- 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain ;
- 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus.

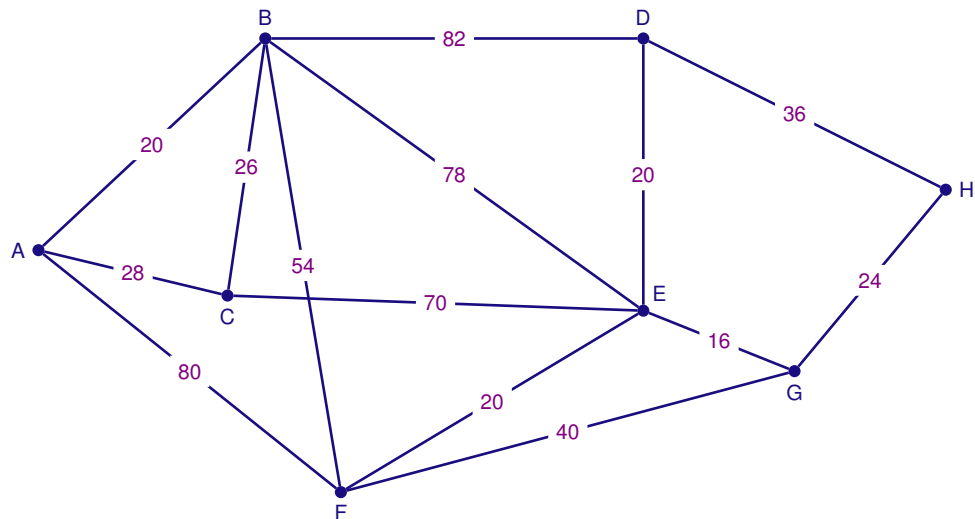
1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où le sommet B représente l'état « abonné PassBus » et T l'état « abonné PassTrain ».
2. Déterminer la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre B, T des sommets.
3. En 2016, les abonnements PassBus représentaient 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentaient 75 %.
Quelle sera la part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements ?
Donner le résultat en pourcentage arrondi à 0,1 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

Le réseau ferroviaire de la région est schématisé par le graphe ci-dessous.

Les sommets représentent les villes et les arêtes représentent les voies ferrées.

Sur les arêtes du graphe sont indiquées les distances exprimées en kilomètre entre les villes de la région.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller de la ville A à la ville H. Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

LES CONTRÔLES (2017-2018)

DST T^{LE} ES 4

CONTRÔLE DU 26 SEPTEMBRE 2017	201
CONTRÔLE DU 17 OCTOBRE 2017	203
CONTRÔLE DU 21 NOVEMBRE 2017	205
CONTRÔLE DU 19 DÉCEMBRE 2017	207
CONTRÔLE DU 23 JANVIER 2018	210
CONTRÔLE DU 13 FÉVRIER 2018	212

EXERCICE 1

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1760$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,65u_n + 861$.

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2460$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 2460 - 700 \times 0,65^n$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

PARTIE B

Une étude réalisée sur le nombre d'emplacements de camping d'une région touristique a permis d'établir que la demande d'emplacements peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'emplacements l'année $2017 + n$.

1. Un réaménagement de l'offre d'emplacements de camping sera nécessaire dès que la demande dépassera 2 400 emplacements.

On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 1760
N ← 0
Tant que U ≤ 2400
    N ← N + 1
    U ← 0,65 × U + 861
Fin Tant que
  
```

- a) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	...	
Valeur de U	1 760		...	
Condition $U \leq 2400$	Vraie		...	

- b) Donner la valeur affectée à la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Selon ce modèle, est-il possible d'envisager une demande supérieure à 2 500 emplacements?

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 10 milliers d'articles.

Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0; 10]$ par

$$C(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 320$$

La courbe représentative de la fonction C , notée $\mathcal{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

PARTIE A

1. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C .
Calculer $C'(4)$ et $C'(6)$.
2. Justifier que la fonction C est strictement croissante sur $[0; 10]$.

PARTIE B

Chaque article est vendu 273 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 273x$$

1. a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathcal{D}$ représentative de la fonction R .
b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
 - a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné.
 - b) On note B' la dérivée de la fonction B .
Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$ on a $B'(x) = -3x^2 - 24x + 252$.
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0; 10]$.
 - d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal.
Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

PARTIE C

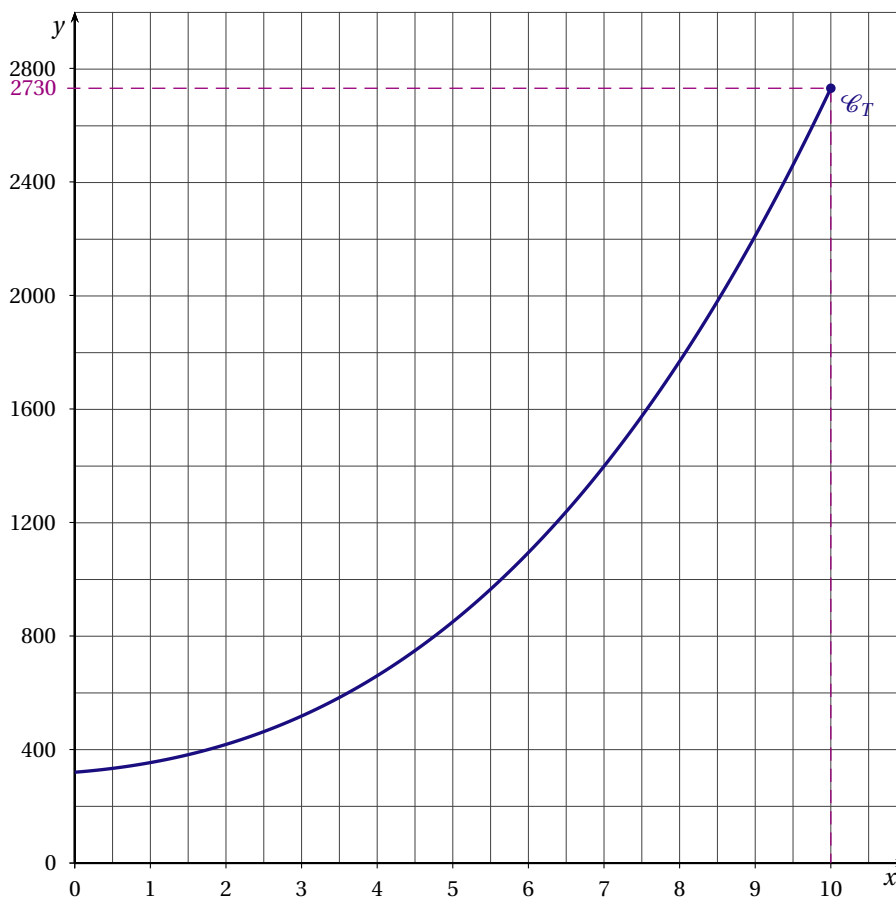
On note $f(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par $f(x) = \frac{x^3 + 12x^2 + 21x + 320}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 10]$ et on appelle f' sa fonction dérivée.

1. Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x) = \frac{(x-4)(2x^2 + 20x + 80)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; 10]$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; 10]$.
3. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice?

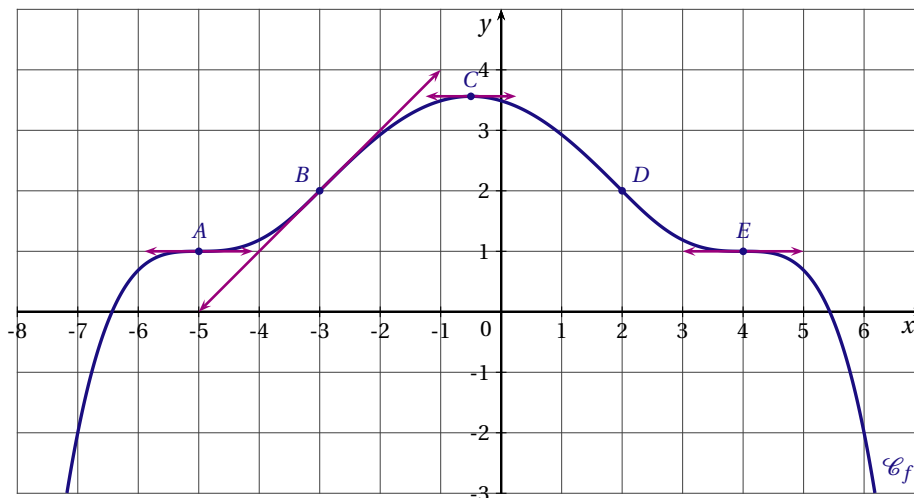
ANNEXE
(à rendre avec la copie)



EXERCICE 1

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- L'abscisse du point C est égale à $(-0,5)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(-3;2)$ passe par le point de coordonnées $(-5;0)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y = -x + 4$.



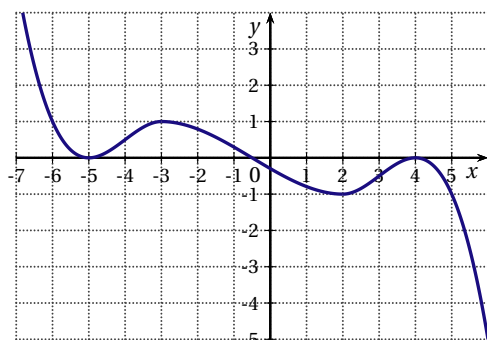
On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1. a) Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D.
b) Déterminer $f'(2)$.

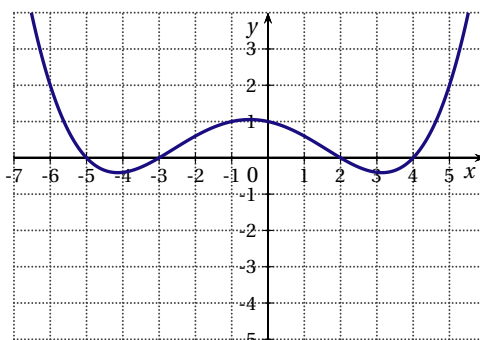
Les réponses aux questions suivantes seront justifiées à partir d'arguments graphiques.

2. Déterminer $f'(-3)$ et $f'(4)$.
3. Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $\leq$, $=$ ou $\geq$ est approprié :
 $f'(-5) \dots 0$ $f'(-7) \dots f'(6)$ $f''(-1) \dots f''(3)$ $f''(2) \dots 0$
4. Quels sont les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?
5. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .

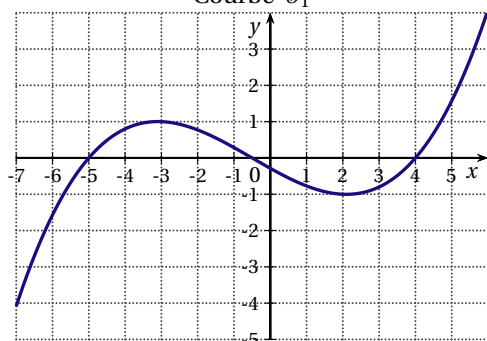
Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f'' .



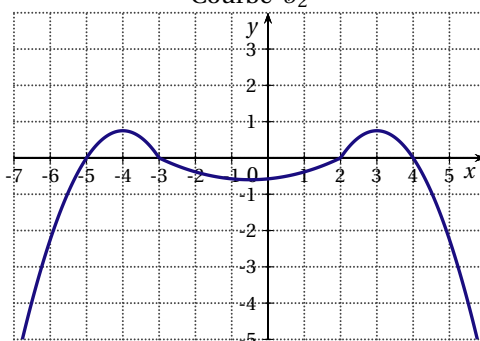
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie et dérivable pour tout réel x par $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 3}$.

PARTIE A

- Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2 + 3)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f .
- Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 2]$.
 - À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α .

PARTIE B

On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = \frac{-6x(x^2 - 9)}{(x^2 + 3)^3}$.

- Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
- La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?

EXERCICE 3

Une entreprise vend trois articles notés A_1 , A_2 et A_3 . La fabrication de chacun de ces articles nécessite trois ressources X , Y et Z (par exemple travail, matières premières et énergie).

Le tableau suivant présente les coûts des ressources en euros, nécessaires à la fabrication de chaque article.

	X	Y	Z
A_1	15	10	3
A_2	12	8	5
A_3	8	9	5

- Effectuer le produit $\begin{pmatrix} 15 & 10 & 3 \\ 12 & 8 & 5 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat.
 - À l'aide d'un produit de matrices, calculer le coût total de production pour la fabrication de 100 articles de chaque sorte.
- La matrice des commandes de deux clients notés C_1 et C_2 est $C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 20 & 12 & 18 \end{pmatrix}$ les lignes étant relatives aux clients et les colonnes aux articles.
 - Effectuer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \times C$ et interpréter le résultat.
 - Le prix de vente unitaire de chacun des trois articles est respectivement 45 €, 50 € et 35 €. Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant en euros de la commande de chacun des clients.

EXERCICE 4

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- Soit A et B deux matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ x-1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2x & x-1 \end{pmatrix}$ où x est un réel fixé.
 - AFFIRMATION 1 : $A \times B = \begin{pmatrix} x^2 + 8x & 10x \\ x^2 - x & 5x - 1 \end{pmatrix}$.
 - AFFIRMATION 2 : Il existe une unique valeur x pour laquelle $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$.
- Soit f une fonction deux fois dérivable telle que pour tout x réel, $f''(x) = 3x + 2$, $f'(3) = 2$ et $f(3) = 5$.
 - AFFIRMATION 3 : La fonction est convexe sur $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$.
 - AFFIRMATION 4 : L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est : $y = 2x + 5$.

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{e^{x^2-3}}{e^{3x+1}} = \frac{e^x}{e^{2x^2}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x-2} \times e^{1-5x} \leq 1$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-2x}{e^x}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2-2e^x}{e^x+1}$.

EXERCICE 3

PARTIE A

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Effectuer le produit $M \times N$ des deux matrices.
2. Calculer la valeur du réel x pour que la matrice N soit égale à l'inverse de la matrice M .

PARTIE B

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.

- La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f admet le point A d'abscisse 0 comme point d'inflexion et la tangente au point A à la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = 3x + 8$.
- Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

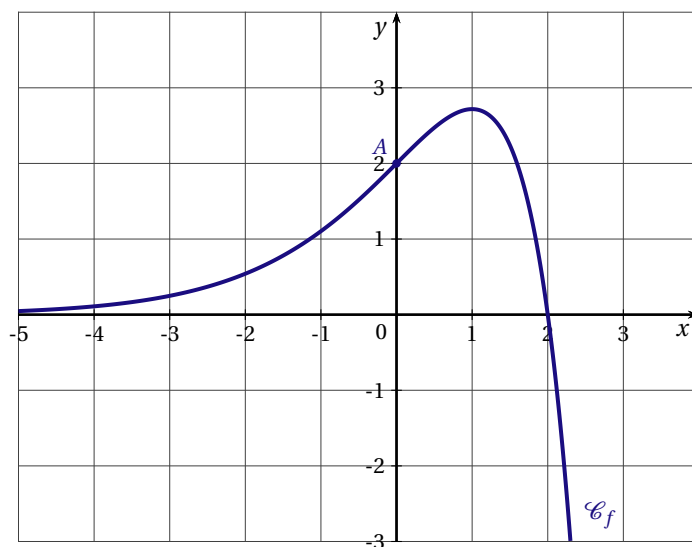
1	$f(x) := (a * x^2 + b * x + c) * e^x$ $\rightarrow f(x) := (ax^2 + bx + c)e^x$
2	$f'(x) := \text{Dériver}[f(x)]$ $\rightarrow f'(x) := (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x$
3	$f''(x) := \text{Dériver}[f'(x)]$ $\rightarrow f''(x) := (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)e^x$

1. Justifier que les réels a , b et c sont solutions du système $\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ b + c = 3 \\ c = 8 \end{cases}$.
2. Donner l'expression de $f(x)$.
3. a) Calculer la valeur exacte de $f(2)$.
b) La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 2 passe-t-elle par l'origine du repère?

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (2 - x)e^x$.

Sa courbe représentative notée $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = (1 - x)e^x$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Montrer que dans l'intervalle $[1; 2]$, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α .
Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α .
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.
4. a) On note f'' la dérivée seconde de la fonction f . Calculer $f''(x)$.
b) Étudier la convexité de la fonction f .
c) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion? Si oui, donner ses coordonnées.

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. En France, le nombre d'actifs âgés de 50 à 64 ans a fortement augmenté depuis 2005, il est passé de 6,1 millions en 2005 à 8,2 millions en 2016.

AFFIRMATION 1 :

Depuis 2005, le nombre d'actifs âgés de 50 à 64 ans a augmenté d'environ 3,13 % chaque année.

2. M est une matrice carrée d'ordre 3 inversible telle que $M^2 = 2M$

AFFIRMATION 2 :

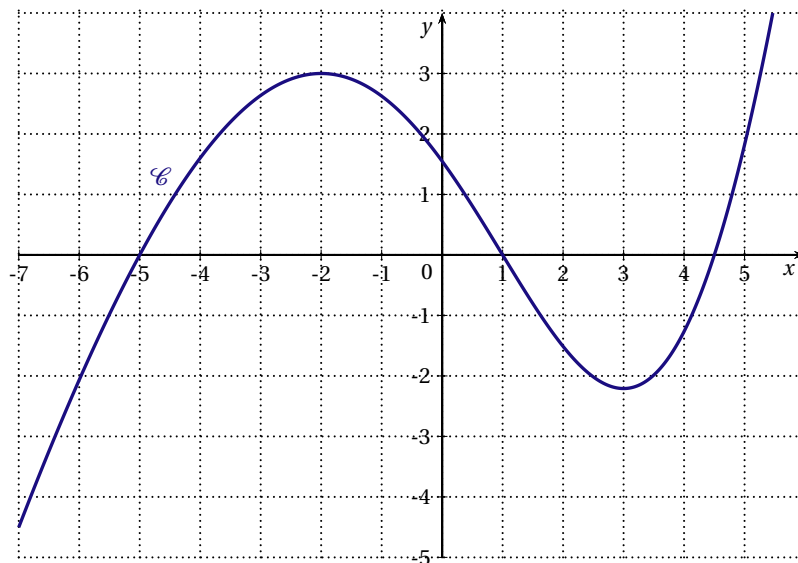
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 490 - 0,96u_n$

AFFIRMATION 3 :

La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$ est une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $v_0 = 50$.

4. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la dérivée f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



AFFIRMATION 4

Sur l'intervalle $[-2; 3]$, la fonction f est décroissante.

AFFIRMATION 5

Sur l'intervalle $[-5; 1]$, la fonction f est convexe.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième. Les parties A et B sont indépendantes.

Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2016 a permis d'établir que :

- 30 % des personnes sont âgées de plus de 50 ans ;
- 22,3 % des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel ;
- 82,7 % des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

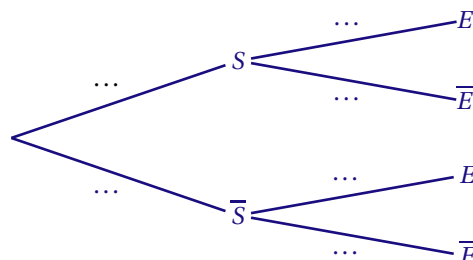
(Source : Insee, enquêtes Emploi.)

PARTIE A

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2016 et on note :

- S l'évènement « la personne était âgée de plus de 50 ans » ;
- E l'évènement « la personne occupait un emploi à temps plein ».

1. Calculer les probabilités $p(\bar{S})$ et $p_{\bar{S}}(\bar{E})$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Calculer $p(S \cap \bar{E})$. Interpréter le résultat.
4. Montrer que la probabilité qu'une personne occupe en 2016 un emploi à temps partiel est égale à 0,188.
5. La personne interrogée occupait un emploi à temps partiel. Quelle est la probabilité qu'elle était âgée de plus de 50 ans ?

PARTIE B

Le taux d'activité est le rapport entre le nombre d'actifs (*actifs occupés et chômeurs*) et l'ensemble de la population correspondante.

En France, le taux d'activité des personnes âgées de 15 à 24 ans est de 36,9 %.

On choisit au hasard 30 personnes âgées de 15 à 24 ans. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'actifs. Le nombre de personnes âgées de 15 à 24 ans dans la population est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
2. Déterminer la probabilité que dans ce groupe il y a exactement 10 actifs.
3. On a calculé ci-dessous, les valeurs des probabilités $P(X \leq k)$, pour k allant de 4 à 18.

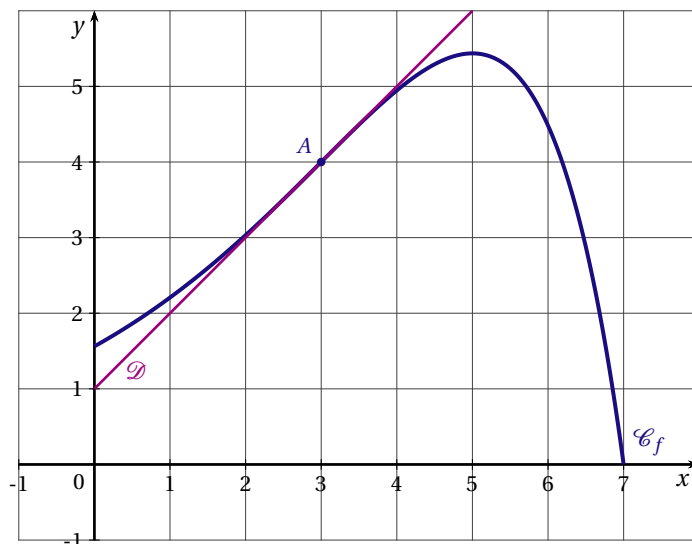
k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
4	0,004 2	7	0,085 5	10	0,421 1	13	0,821 7	16	0,978 4
5	0,014 0	8	0,165 7	11	0,570 8	14	0,901 4	17	0,991 5
6	0,037 8	9	0,280 3	12	0,709 5	15	0,951 1	18	0,997 1

- a) Déterminer la probabilité que dans ce groupe il y ait au moins 15 actifs.
- b) Sachant que dans ce groupe, il y a moins de 15 actifs, quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 8 actifs ?

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 7]$ par $f(x) = (ax + b)e^{0,5x-1,5}$, où a et b sont deux nombres réels. On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. La droite $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .



- Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(3)$ et de $f'(3)$.
- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 7]$ on a : $f'(x) = (0,5ax + a + 0,5b)e^{0,5x-1,5}$.
- Déduire des deux questions précédentes, en résolvant un système, que $a = -1$ et $b = 7$.
 - Donner les expressions de $f(x)$ et $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 7]$.
 - En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
- Montrer que dans l'intervalle $[5; 7]$, l'équation $f(x) = 4$ admet une deuxième solution α .
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu le résultat suivant :

1	$g(x) := (2,5 - 0,5x) * \exp(0,5x - 1,5)$ $\rightarrow g(x) := \frac{(5-x)e^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}}{2}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow \frac{(3-x)e^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}}{4}$

En s'appuyant sur ce résultat, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion la courbe $\mathcal{C}_f$.

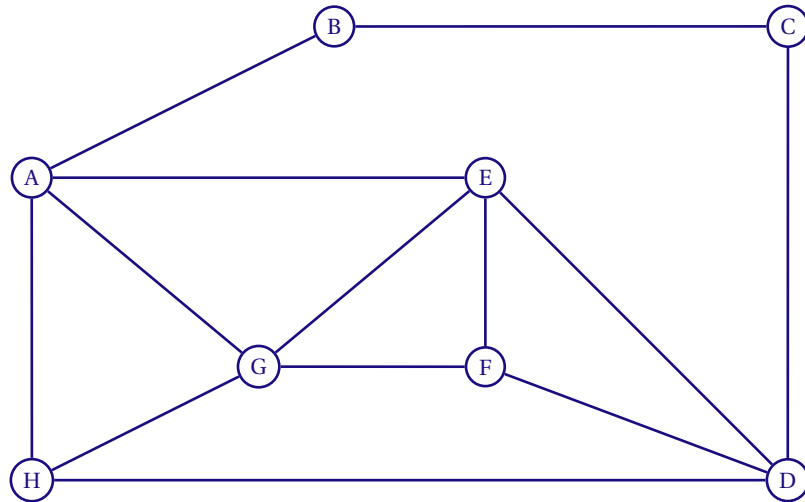
PARTIE B

Une entreprise fabrique un certain type d'article. Sa capacité de production est limitée à 7 000 articles par jour. Après avoir fait une étude, le directeur constate que si l'entreprise vend chaque jour x milliers d'articles (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0; 7]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A par : $f(x) = (7 - x)e^{0,5x-1,5}$.

- Quelle quantité d'articles l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre afin de réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors le montant, arrondi à la centaine d'euros près, de ce bénéfice maximal ?
- Déterminer l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice supérieur ou égal à 4 000 euros.

EXERCICE 1

Le graphe Γ ci-dessous, modélise le plan d'un parc de loisirs. Les arêtes du graphe représentent les allées du parc et les sommets les attractions.



- Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
- On range les sommets par ordre alphabétique. Compléter la matrice d'adjacence M associée au graphe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On donne les matrices M^2 et M^3 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 5 & 10 & 5 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 10 & 8 & 4 & 9 \\ 10 & 2 & 2 & 10 & 6 & 7 & 10 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 8 & 7 & 4 & 9 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 4 & 10 & 9 & 6 & 9 \\ 8 & 2 & 1 & 9 & 4 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

- En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la deuxième ligne et sixième colonne de la matrice M^3 .
 - Donner, en justifiant, le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à F. Les citer toutes.
- Déterminer en justifiant si ce graphe est :
 - complet;
 - connexe.
 - En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
 - Le responsable du parc souhaite réorganiser le nettoyage des allées, par un circuit commençant et finissant par le sommet A et qui passe par toutes les allées une et une seule fois.
Quel est le nombre minimal d'allées qu'il faudrait ajouter pour obtenir un tel circuit? Préciser les extrémités.

EXERCICE 2

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 25000$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,96u_n + 800$.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 20000$.

- a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 5000 \times 0,96^n + 20000$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

PARTIE B

Un site internet propose sur inscription un service de jeux en ligne.

Le 1^{er} janvier 2018 il y avait 25 000 membres inscrits.

L'évolution hebdomadaire du nombre de membres est modélisée par la suite (u_n) où u_n est une estimation du nombre de membres inscrits au bout de n semaines.

Le responsable du site, souhaite déterminer au bout de combien de semaines le nombre de membres inscrits sera inférieur à 22 000.

1. Voici deux propositions d'algorithmes :

```

U ← 25 000
N ← 0
Tant que U ≥ 22 000
  U ← 0,96 × U + 800
  N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

ALGORITHME 1

```

U ← 25 000
N ← 0
Tant que U < 22 000
  U ← 0,96 × U + 800
  N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

ALGORITHME 2

Un seul de ces algorithmes permet de calculer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 22000$.

Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

2. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $5000 \times 0,96^n + 20000 < 22000$.
- b) En déduire la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme choisi à la question précédente et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(x) = 2e^{0,5x} - \frac{e}{2}x$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. Calculer $f'(x)$.
2. a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution le nombre $a = 2(1 - \ln 2)$.
- b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;6]$.
- c) En déduire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
On précisera les valeurs exactes de $f(0)$, $f(a)$ et $f(6)$.
3. a) Montrer que dans l'intervalle $[0;6]$, l'équation $f(x) = 12$ admet une unique solution α .
- b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α .
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisse 2.
5. Quelle est la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathcal{D}$?

EXERCICE 1

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au dix millièmes près.

Un fabricant de lentilles hydrophiles a constaté à l'issue de la fabrication, que ces lentilles peuvent avoir une perméabilité à l'oxygène défectueuse.

On admet que dans cette production, 23 % des lentilles présentent ce défaut.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces lentilles avant leur mise en vente.

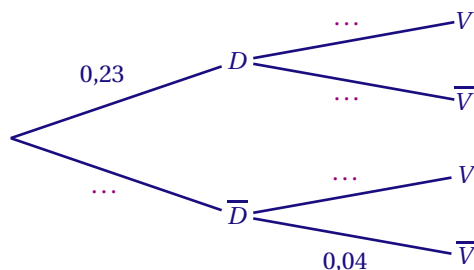
Ce contrôle détecte et élimine 90% des lentilles défectueuses, mais il élimine également à tort 4% des lentilles non défectueuses. Les lentilles non éliminées sont alors mises en vente.

On prélève une lentille au hasard dans cette production et on note :

- D l'évènement « la lentille est défectueuse » ;
- V l'évènement « la lentille est mise en vente ».

PARTIE A

- Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



- Calculer la probabilité que la lentille soit défectueuse et mise en vente.
- Montrer que la probabilité qu'une lentille soit mise en vente est égale à 0,7622.
- Quelle est la probabilité qu'une lentille mise en vente soit défectueuse ?

PARTIE B

Dans le stock de lentilles commercialisées par l'entreprise, on admet que 3 % des lentilles sont défectueuses.

On prélève au hasard un lot de n lentilles. On suppose que le nombre de lentilles est suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages successifs avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de lentilles défectueuses.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- On suppose dans cette question, que $n = 25$.
Quelle est la probabilité, arrondie au millièmes près, que dans un lot de 25 lentilles, il y ait au moins une lentille défectueuse ?
- a) Déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

$$1 - 0,97^n \geq 0,95$$

- Interpréter le résultat.

EXERCICE 2

Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A

On considère le graphe dont la matrice associée est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Quel l'ordre du graphe? Quel est le nombre d'arêtes de ce graphe?

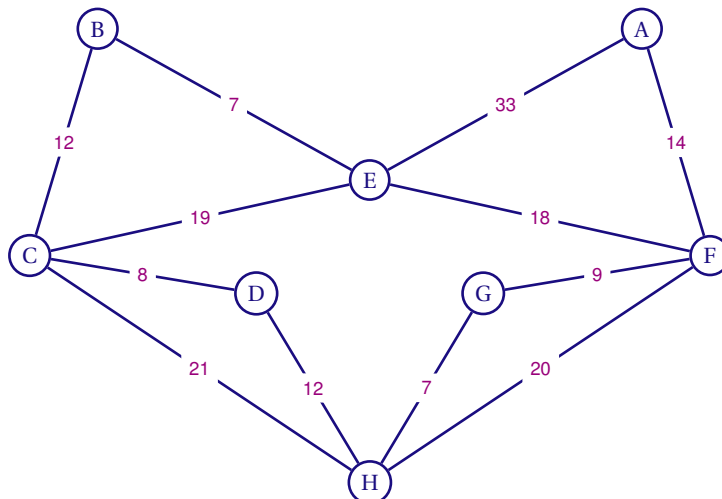
2. On donne les deux matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 5 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & 8 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 8 & 3 & 4 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 8 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 5 & 4 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Quelle est la longueur de la plus courte chaîne entre les sommets 1 et 4?

3. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne? Justifier la réponse.

PARTIE B

Le graphe ci-dessous, modélise le plan du quartier dans lequel un facteur effectue sa tournée à partir du sommet C. Les nombres présents sur chacune des arêtes indiquent le temps moyen en minutes mis par le facteur pour distribuer le courrier dans chaque rue.



Le facteur souhaite effectuer sa tournée de manière à arriver le plus rapidement en A tout en distribuant le courrier dans chaque rue où il passe.

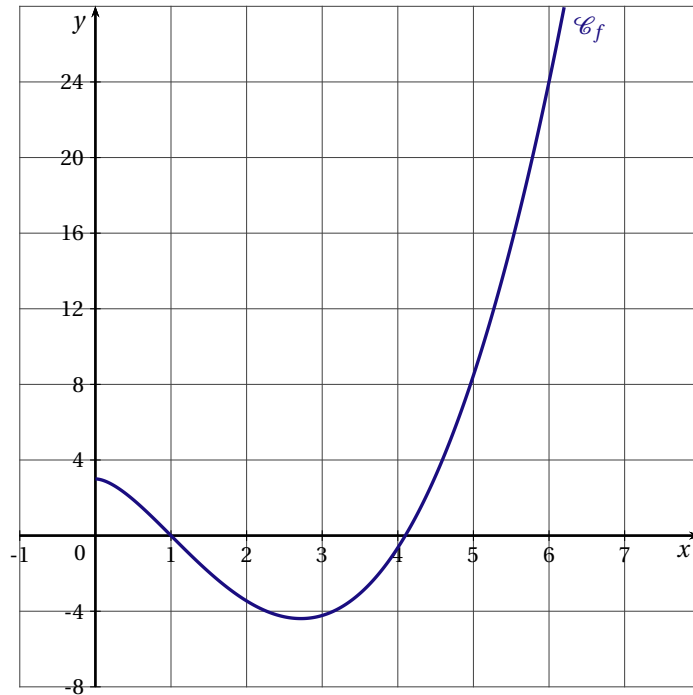
- À l'aide d'un algorithme, déterminer le parcours permettant d'aller du sommet C au sommet A le plus rapidement possible. Préciser alors le trajet à emprunter.
- Est-il possible pour le facteur de revenir en C pour distribuer le courrier restant dans chacune des rues où il n'est pas passé sans avoir à repasser par une des rues déjà empruntée? Si oui donner un parcours possible. Quel est alors le temps mis par le facteur pour effectuer sa tournée complète?

EXERCICE 3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2(2\ln(x) - 3) + 3$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal.



1. On note f' la dérivée de la fonction f .
 - a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 4x\ln(x) - 4x$.
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$.
 - c) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisse 1.
3. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 b) Donner les valeurs, éventuellement arrondies à 10^{-3} près, de chacune des solutions.
4. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathcal{D}$.

DST REGROUPEMENT T^{LE} ES-L

CONTRÔLE ES-L DU 29 SEPTEMBRE 2017	216
CONTRÔLE ES-L DU 20 OCTOBRE 2017	218
CONTRÔLE ES-L DU 23 NOVEMBRE 2017	220
CONTRÔLE ES-L DU 21 DÉCEMBRE 2017	221
CONTRÔLE ES-L DU 1 ^{ER} FÉVRIER 2018	223
CONTRÔLE ES-L DU 15 FÉVRIER 2018	226

EXERCICE 1

Dans une ville, un abonnement annuel est proposé pour les spectacles subventionnés par la municipalité. En 2016, il y avait 1 200 abonnés.

Une étude statistique a permis de modéliser l'évolution du nombre d'abonnements pour les prochaines années de la manière suivante :

Chaque année, 70 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et 780 nouveaux abonnements seront souscrits.

1. Selon ce modèle, quel est le nombre d'abonnements prévus pour l'année 2018?

On représente l'évolution du nombre d'abonnés par une suite (u_n) où u_n représente le nombre d'abonnements l'année 2016 + n .

La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 1200$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 780$.

2. Un gestionnaire écrit l'algorithme suivant :

```
U ← 1 200
N ← 0
Tant que U ≤ 2 500
    N ← N + 1
    U ← 0,7 × U + 780
Fin Tant que
```

Donner une interprétation de la valeur $N = 8$ obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme.

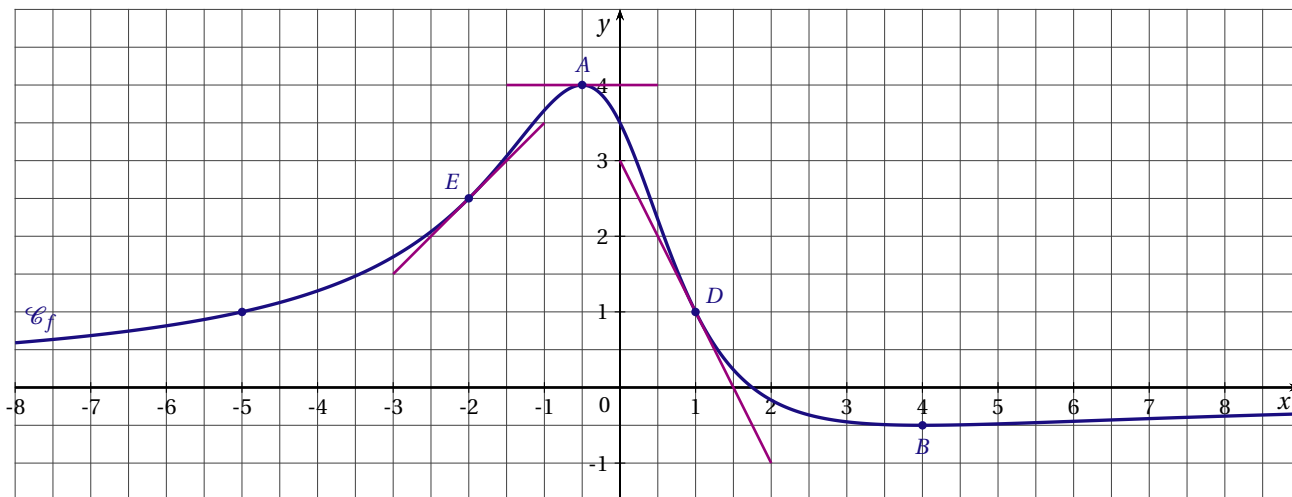
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2600$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b) Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 2600 - 1400 \times 0,7^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f .

On sait que :

- les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives $(-0,5)$ et 4 sont parallèles à l'axe des abscisses;
- la tangente au point $D(1; 1)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0; 3)$.



PARTIE A

À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f'(-0,5)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $\leq$, $=$ ou $\geq$ est approprié :
 - a) $f'(-2) \dots 0$
 - b) $f'(-5) \dots f'(1)$
 - c) $f'(0) \dots f'(8)$

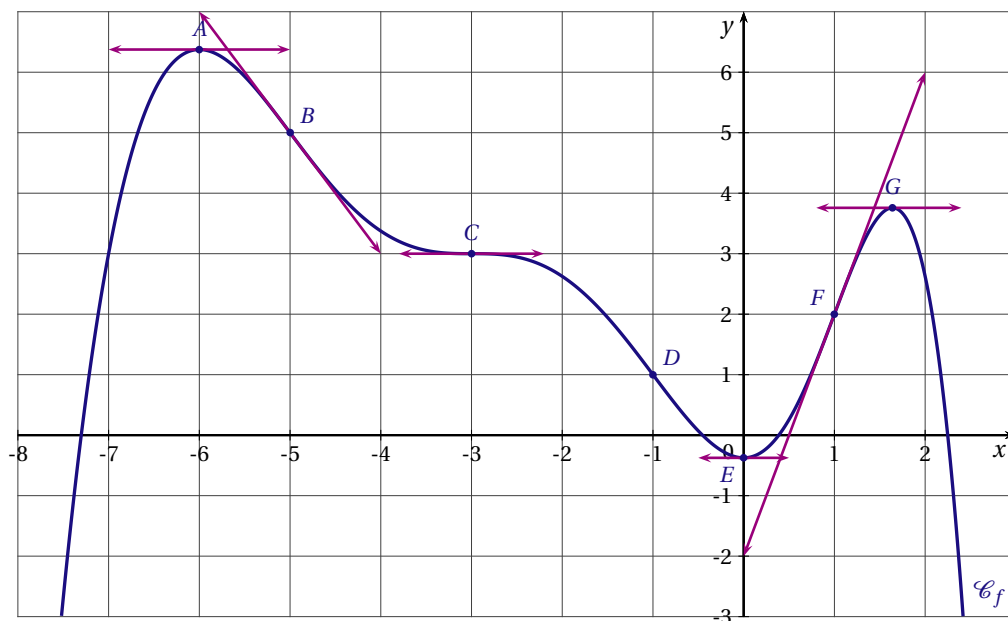
PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{7-4x}{x^2+2}$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{4x^2 - 14x - 8}{(x^2 + 2)^2}$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
b) Donner le tableau de variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E d'abscisse (-2) .

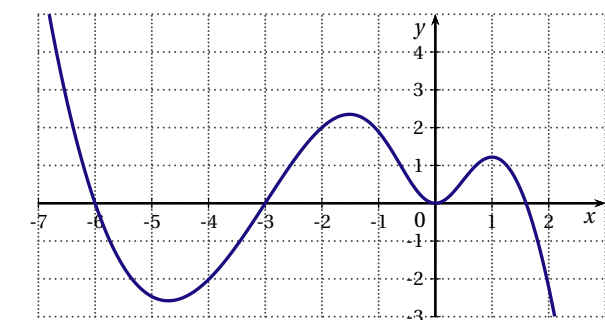
EXERCICE 1

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

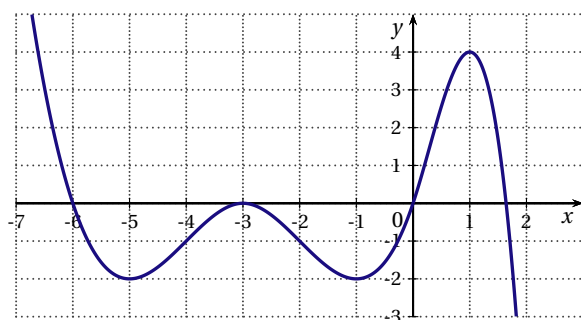


On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

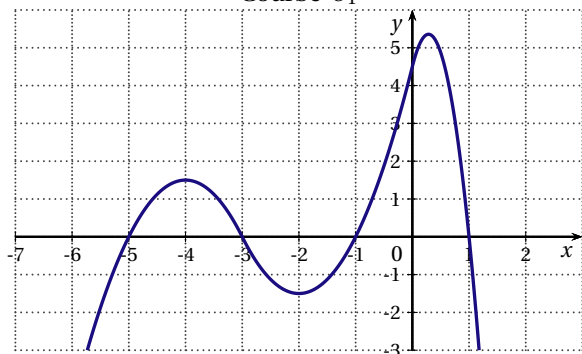
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $F(1;2)$ passe par le point de coordonnées $(0; -2)$. Déterminer $f'(1)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y = -2x - 1$.
 - Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D . Le point D est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?
 - Déterminer $f'(-1)$.
- Déterminer $f'(-5)$ et $f''(-5)$.
- Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $\leq$, $=$ ou $\geq$ est approprié :
 - $f'(-6) \dots 0$
 - $f'(-7) \dots f'(-2)$
 - $f''(-7) \dots f''(0)$
 - $f''(1) \dots 0$
- Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .



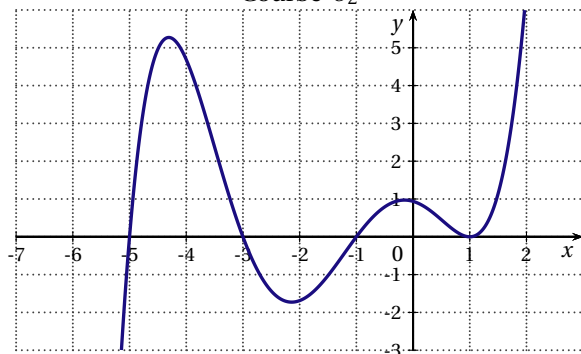
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - 3$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α .
5. Calculer $f''(x)$.
6. a) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion? Si oui, calculer ses coordonnées.

EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A(x) = \frac{3^{2x-3}}{3^{x-2}} \times 3^{1-x}$.
2. $B(x) = (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{e^{2x}}$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{-2x+1} - 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2-3x} \times e^{2x+1} \geq 1$.

EXERCICE 3

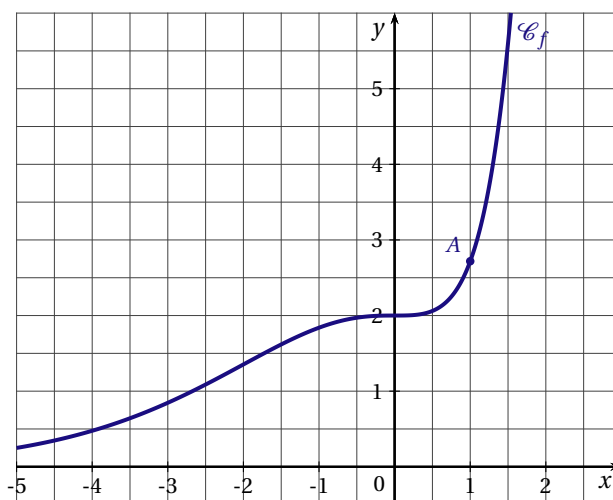
Sur les dix derniers mois, le cours du bois a augmenté de 46 % et le cours du sucre a baissé de 30 %

1. Calculer le pourcentage d'évolution mensuel moyen du cours du bois. (*arrondir le résultat à 0,01 % près*).
2. Calculer le pourcentage d'évolution mensuel moyen du cours du sucre. (*arrondir à 0,1 % près*).

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Sa courbe représentative notée $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = x^2 e^x$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Montrer que sur l'intervalle $[1; 2]$, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α .
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième près de α .
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.
4. a) On note f'' la dérivée seconde de la fonction f . Calculer $f''(x)$.
b) Étudier la convexité de la fonction f .
c) Calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. En France, le nombre de femmes actives âgées de 50 à 64 ans a fortement augmenté depuis 2006, il est passé de 3 millions en 2006 à 4,1 millions en 2016.

AFFIRMATION 1 :

Entre 2006 et 2016, le nombre de femmes actives âgées de 50 à 64 ans a augmenté d'environ 3,2 % chaque année.

2. Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 100$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 81 - 1,025u_n$ et (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 40 - u_n$.

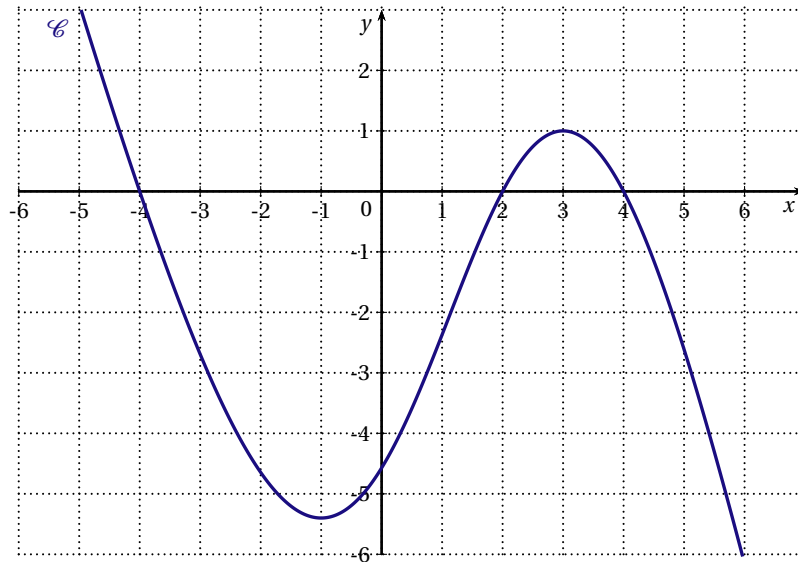
AFFIRMATION 2 :

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme $v_0 = -60$.

AFFIRMATION 3

Pour tout entier naturel n , $u_n = 40 + 60 \times (-1,025)^n$.

3. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la dérivée f' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



AFFIRMATION 4

Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, la fonction f est décroissante.

AFFIRMATION 5

Sur l'intervalle $[-1; 3]$, la fonction f est convexe.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième. Les parties A et B sont indépendantes.

D'après une enquête sur l'emploi en France :

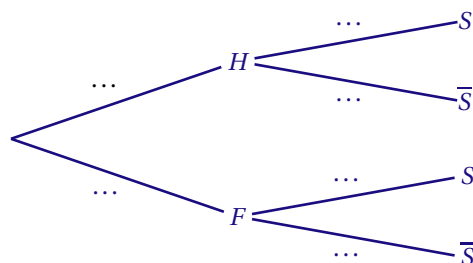
- 52 % des personnes qui exercent un emploi sont des hommes;
- 15 % des hommes qui exercent un emploi ne sont pas salariés;
- 91,6 % des femmes qui exercent un emploi sont salariées.

PARTIE A

On interroge au hasard une personne ayant un emploi et on note :

- H l'évènement « la personne est un homme »;
- F l'évènement « la personne est une femme »;
- S l'évènement « la personne exerce un emploi salarié ».

1. Calculer les probabilités $p(F)$, $p_H(S)$ et $p_F(\bar{S})$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Calculer $p(F \cap S)$. Interpréter le résultat.
4. Calculer la probabilité qu'une personne exerce un emploi salarié.
5. La personne interrogée exerce un emploi salarié. Quelle est la probabilité que ce soit un homme?

PARTIE B

Selon cette étude, 30 % des femmes qui ont un emploi, travaillent à temps partiel.

On choisit au hasard 40 femmes qui ont un emploi. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de femmes qui travaillent à temps partiel.

La population de femmes qui exercent un emploi est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité que dans ce groupe il y a exactement 12 femmes qui travaillent à temps partiel.
4. On a calculé ci-dessous, les valeurs des probabilités $P(X \leq k)$, pour k allant de 5 à 19.

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
5	0,008 6	8	0,111 0	11	0,440 6	14	0,807 4	17	0,968 0
6	0,023 8	9	0,195 9	12	0,577 2	15	0,884 9	18	0,985 2
7	0,055 3	10	0,308 7	13	0,703 2	16	0,936 7	19	0,993 7

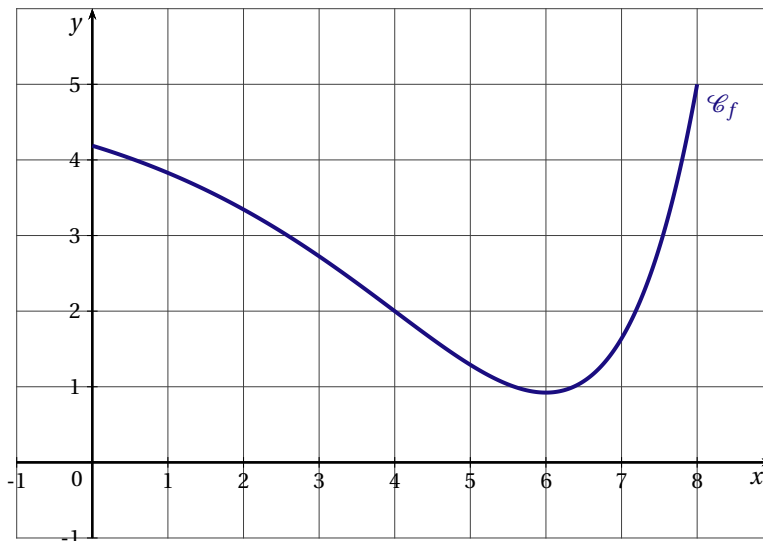
- a) Déterminer la probabilité que dans ce groupe il y ait au moins 12 femmes qui travaillent à temps partiel.
- b) Calculer $P(7 \leq X \leq 18)$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x) = \left(\frac{3}{4}x - 6\right)e^{0,5x-2} + 5$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;8]$ on a : $f'(x) = \left(\frac{3}{8}x - \frac{9}{4}\right)e^{0,5x-2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;8]$.
 - En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 4.
 - Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.
 - En déduire graphiquement la valeur de $f''(4)$.
- Montrer que dans l'intervalle $[6;8]$, l'équation $f(x) = 2$ admet une deuxième solution α .

PARTIE B

Une entreprise fabrique un certain type d'article. Sa capacité de production est limitée à 800 articles par jour. Après avoir fait une étude, le directeur constate que si l'entreprise produit chaque jour x centaines d'articles (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0;8]$), alors le coût moyen de production d'un article, en centaines d'euros, est donné par la fonction f définie dans la partie A.

- Si le prix de vente d'un article est de 92 euros, l'entreprise fait-elle un bénéfice?
- Déterminer l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour que le coût moyen de production soit inférieur ou égal à 200 euros.

EXERCICE 1

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

- La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ est :
 - 0,369
 - $\ln 2$
 - $1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}$
 - $3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
- La solution exacte de l'équation $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = 2$ est :
 - $2e^2$
 - e
 - $\frac{e^2}{2}$
 - $e^{\frac{1}{2}}$

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2-x} \times e^{3x-1} \geq 2$ est :

a) $S = \left[\frac{\ln 2}{2} - 1; +\infty \right[$ b) $S = \left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty \right[$ c) $S = \left[1 - \frac{\ln 2}{2}; +\infty \right[$ d) $S = \left[\frac{\ln 2 - 1}{2}; +\infty \right[$

4. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.

On a alors :

a) $f'(x) = \ln(x) - 1$ b) $f'(x) = \ln(x)$ c) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ d) $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x} - 1$

5. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2e^{0,5x} - \frac{e}{2}x$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisse 2 a pour équation :

a) $y = \frac{e}{2}$ b) $y = \frac{e}{2} - x$ c) $y = \frac{e}{2}x - 2$ d) $y = \frac{e}{2}x$

EXERCICE 2

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8500$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,02u_n - 250$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 12500$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et préciser le premier terme.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n = 12500 - 4000 \times 1,02^n$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

PARTIE B

Un site internet propose sur inscription un service de jeux en ligne.

Le 1^{er} janvier 2018 il y avait 8500 membres inscrits.

L'évolution mensuelle du nombre de membres est modélisée par la suite (u_n) où u_n est une estimation du nombre de membres inscrits au bout de n mois.

La responsable du service marketing, a prévu de lancer une campagne de publicité dès que le nombre de membres inscrits sera inférieur à 7500.

1. Voici deux propositions d'algorithmes :

```

U ← 8500
N ← 0
Tant que U < 7500
  U ← 1,02 × U - 250
  N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

ALGORITHME 1

```

U ← 8500
N ← 0
Tant que U ≥ 7500
  U ← 1,02 × U - 250
  N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

ALGORITHME 2

Un seul de ces algorithmes permet de calculer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 7500$.

Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

2. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $12500 - 4000 \times 1,02^n < 7500$.
- b) En déduire la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme choisi à la question précédente et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0;8]$ par $f(x) = 2\ln(x) + x^2 - 5x$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;8]$ on a : $f'(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;8]$.
- b) En déduire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;8]$.
3. a) Montrer que dans l'intervalle $]0;8]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
- b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α .
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point A d'abscisse 1.
5. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathcal{D}$.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au millième près.

PARTIE A

Un fabricant de smartphone a constaté que 3,5 % des appareils produits présentaient une fragilité au niveau de l'écran tactile.

- En vue d'un contrôle de qualité, ce fabricant prélève au hasard un échantillon de 10 appareils.
On considère que le nombre de smartphones est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 appareils.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de smartphones qui ont une fragilité au niveau de l'écran tactile.
 - Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
 - Calculer la probabilité que dans le lot, un seul appareil a une fragilité au niveau de l'écran.
 - Calculer la probabilité que dans le lot, au moins un appareil a une fragilité au niveau de l'écran.
- On prélève au hasard n appareils. On note Y la variable aléatoire qui associe le nombre de smartphones qui ont une fragilité au niveau de l'écran.
On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,035$.
 - On note p_n la probabilité que l'un au moins de ces n smartphones a une fragilité au niveau de l'écran. Justifier que $p_n = 1 - 0,965^n$.
 - Déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

$$1 - 0,965^n \geq 0,99$$

Interpréter le résultat.

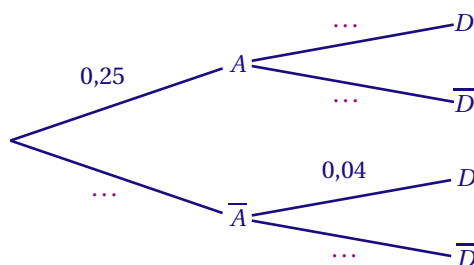
PARTIE B

Les écrans des smartphones produits par ce fabricant proviennent de deux fournisseurs notés A et B.
2 % des écrans qui proviennent du fournisseur A sont défectueux et 4 % des écrans qui proviennent du fournisseur B sont défectueux.

Pour des raisons de prix, 25 % des écrans utilisés pour la production des smartphones proviennent du fournisseur A.
On choisit au hasard un écran dans l'ensemble des écrans. On considère les événements suivants :

- A : « l'écran provient du fournisseur A » ;
- D : « l'écran est défectueux ».

- Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



- Calculer la probabilité que l'écran n'ait pas de défaut et provienne du fournisseur B.
- Montrer que la probabilité qu'un écran n'a pas de défaut est égale à 0,965.
- Quelle est la probabilité qu'un écran défectueux provienne du fournisseur B ?

EXERCICE 2

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente au point A d'abscisse e .



Les réponses aux deux questions suivantes seront justifiées à partir du graphique.

- On note f' la dérivée de la fonction f . Comparer $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f'(e^2)$.
- Donner le tableau des variations de la dérivée f' .

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

- Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$.
 - En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point B d'abscisse 1.
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
 - Donner les valeurs, éventuellement arrondies à 10^{-3} près, de chacune des solutions.
- Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = \frac{4\ln(x) - 4}{x^3}$.
 - Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

DST COMMUNS T^{LE} ES 4 ET T^{LE} ES-L

CONTRÔLE DU 9 MARS 2018	229
CONTRÔLE DU 12 AVRIL 2018	234
CONTRÔLE DU 24 MAI 2018	238

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les élèves

Au 1^{er} janvier 2018, une association compte 3 000 adhérents. On constate que chaque mois :

- 2 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 50 nouvelles personnes adhèrent à l'association.

PARTIE A

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1^{er} mars 2018.

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,98u_n + 50.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2500$.
 - a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 500 \times 0,98^n + 2500$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

La responsable de l'association, souhaite déterminer au bout de combien de mois le nombre de membres inscrits sera inférieur à 2 900.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de répondre au problème posé.

```
U ← 3 000
N ← 0
Tant que .....
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

2. En résolvant l'inéquation : $500 \times 0,98^n + 2500 < 2900$, déterminer la valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme précédent.

PARTIE C

Le montant de la cotisation mensuelle à l'association est de 10 euros.

Calculer la somme totale que l'association espère obtenir pour l'année 2018.

EXERCICE 2 (5 points)

Élèves ES (obligatoire) et L (spécialité)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Le nombre (-2) est solution de l'équation :

- a) $e^{\ln x} = -2$ b) $e^x = -2$ c) $\ln(e^x) = -2$ d) $\ln x = -\ln 2$

2. Pour tout réel x , $(e^x)^2 \times e^{3-2x}$ est égal à :

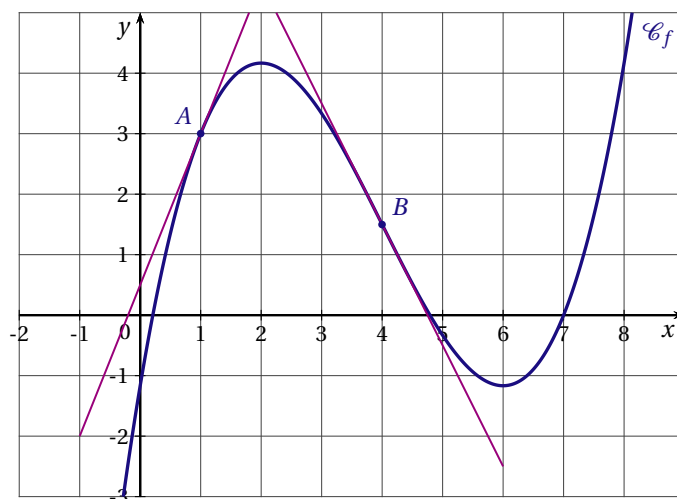
- a) e^{x^2-2x+3} b) $e^{2x(3-2x)}$ c) $e^{x^2(3-2x)}$ d) e^3

3. La dérivée de la fonction $f: x \mapsto e^2 x + \ln 2$ est la fonction :

- a) $f': x \mapsto 2ex$ b) $f': x \mapsto e^2 + \frac{1}{2}$ c) $f': x \mapsto 2ex + \frac{1}{2}$ d) $f': x \mapsto e^2$

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que les tangentes à la courbe aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 4.



4. On note f' la dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde.

- a) $f'(1) = 3$ b) $f'(1) = 2,5$ c) $f''(4) = 1,5$ d) $f''(4) = -2$

5. Le tableau des variations de la fonction dérivée f' est :

a)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$		-2	

b)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$		-2	

c)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$		1,5	

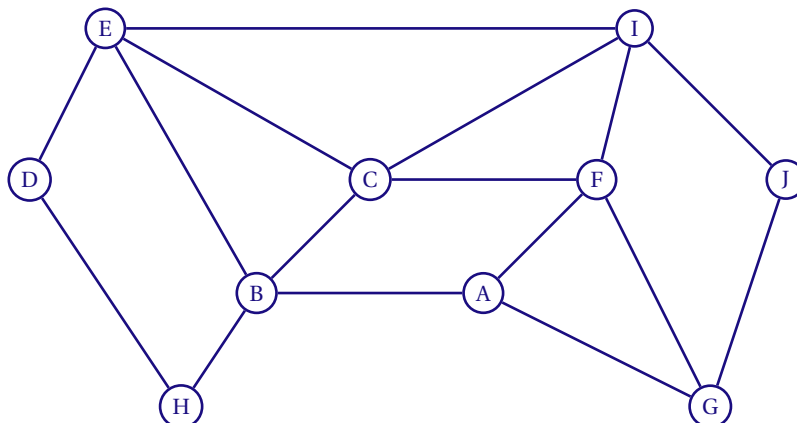
d)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$		1,5	

EXERCICE 2 (5 points)

Élèves ES (spécialité)

Le graphe ci-dessous, modélise le plan d'un quartier historique d'une ville.
Les sommets sont les différents centres d'intérêts et les arêtes les rues.



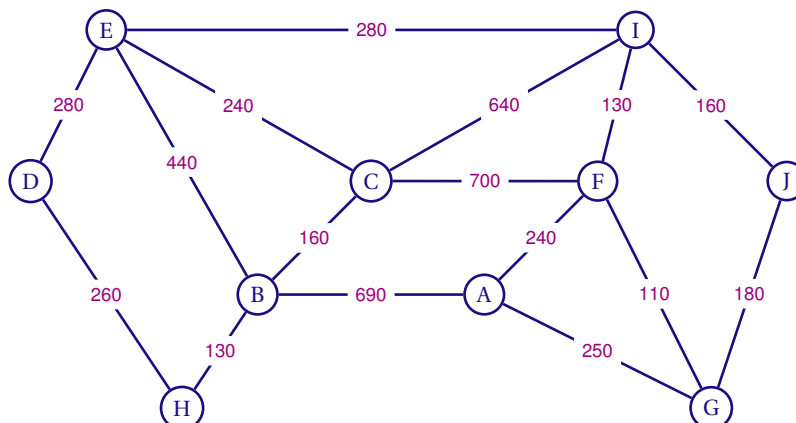
1. On appelle M la matrice associée à ce graphe les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.

On donne deux matrices R et S :

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 14 & 1 & 9 & 12 & 10 & 9 & 11 & 8 \\ 5 & 26 & 20 & 26 & 17 & 16 & 16 & 5 & 26 & 4 \\ 14 & 20 & 48 & 20 & 38 & 25 & 17 & 25 & 29 & 15 \\ 1 & 26 & 20 & 26 & 17 & 16 & 16 & 5 & 26 & 4 \\ 9 & 17 & 38 & 17 & 37 & 26 & 9 & 23 & 20 & 15 \\ 12 & 16 & 25 & 16 & 26 & 31 & 14 & 16 & 19 & 17 \\ 10 & 16 & 17 & 16 & 9 & 14 & 25 & 4 & 24 & 12 \\ 9 & 5 & 25 & 5 & 23 & 16 & 4 & 20 & 8 & 4 \\ 11 & 26 & 29 & 26 & 20 & 19 & 24 & 8 & 35 & 6 \\ 8 & 4 & 15 & 4 & 15 & 17 & 12 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 19 & 8 & 22 & 3 & 17 & 15 & 11 & 9 & 15 & 10 \\ 8 & 31 & 19 & 15 & 16 & 22 & 14 & 3 & 25 & 6 \\ 22 & 19 & 34 & 10 & 26 & 21 & 15 & 12 & 26 & 12 \\ 3 & 15 & 10 & 10 & 5 & 6 & 5 & 1 & 12 & 1 \\ 17 & 16 & 26 & 5 & 32 & 24 & 8 & 15 & 17 & 13 \\ 15 & 22 & 21 & 6 & 24 & 32 & 13 & 6 & 19 & 16 \\ 11 & 14 & 15 & 5 & 8 & 13 & 17 & 2 & 20 & 4 \\ 9 & 3 & 12 & 1 & 15 & 6 & 2 & 10 & 5 & 4 \\ 15 & 25 & 26 & 12 & 17 & 19 & 20 & 5 & 32 & 6 \\ 10 & 6 & 12 & 1 & 13 & 16 & 4 & 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

- a) Une des deux matrices R ou S est la matrice M^4 .
Sans calculs, indiquer laquelle des deux matrices R ou S est la matrice M^4 en justifiant la réponse.
- b) Un touriste a quitté son hôtel H et s'est rendu au jardin J. Au cours de son déplacement, il est passé exactement trois fois devant un des centres d'intérêt du quartier.
Combien de trajets différents a-t-il pu suivre? Expliquer.
2. Déterminer en justifiant si ce graphe est connexe.
3. Est-il possible pour un touriste de parcourir chaque rue du quartier une et une seule fois en partant de son hôtel H?
4. Sur le graphe pondéré ci-dessous, on a indiqué sur les arêtes les distances en mètres entre les différents lieux :



À l'aide d'un algorithme, déterminer la distance minimale permettant d'aller du sommet H (hôtel) au sommet J (jardin). Préciser alors le trajet à emprunter.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les élèves

*Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats seront si nécessaire, arrondis à 10^{-3} .*

On s'intéresse à un certain modèle de tablette vendues dans un magasin.

PARTIE A

On considère un stock important de tablettes de ce modèle.

On note E l'événement : « une tablette prélevée au hasard dans le stock est défectueuse. »

On suppose que $P(E) = 0,02$.

On prélève au hasard 100 tablettes dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 tablettes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tablettes défectueuses.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- On donne en annexe ci-dessous, un extrait du tableau obtenu à l'aide d'un tableur fournissant des probabilités $P(X \leq k)$, où k est un entier naturel compris entre 0 et 100.

À l'aide de ce tableau ou de la calculatrice :

- calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, il y ait exactement quatre tablettes défectueuses;
- calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, il y ait au moins deux tablettes défectueuses;
- calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, il y ait au plus six tablettes défectueuses sachant qu'au moins deux tablettes sont défectueuses.

ANNEXE

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X \leq k)$	0,132 62	0,403 27	0,676 69	0,858 96	0,949 17	0,984 52	0,995 94	0,999 07	0,999 81	0,999 97

PARTIE B

Les tablettes de ce modèle proviennent de deux fournisseurs notés « fournisseur 1 » et « fournisseur 2 ».

Le fournisseur 1 a fourni 60 % des tablettes d'un lot important et le fournisseur 2 a fourni le reste de ce lot.

Dans ce lot, 1 % des tablettes provenant du fournisseur 1 sont défectueuses et 1,5 % des tablettes provenant du fournisseur 2 sont défectueuses.

Un client choisi au hasard une tablette dans ce lot. On considère les événements suivants :

- A : « la tablette provient du fournisseur 1 »;
- B : « la tablette provient du fournisseur 2 »;
- D : « la tablette est défectueuse ».

- Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
- Calculer la probabilité d'acheter une tablette défectueuse provenant du fournisseur 1.
 - Déterminer la probabilité qu'une tablette soit défectueuse.
 - Le client a acheté une tablette non défectueuse, quelle est la probabilité que cette tablette ait été fabriqué par le fournisseur 2 ?

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les élèves

PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - x \ln(x) + 20$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

1	$f(x) := x^2 - x \ln(x) + 20$ $\rightarrow f(x) := x^2 - x \ln(x) + 20$
2	$g(x) := \text{Dériver}[f(x), x]$ $\rightarrow g(x) := 2x - \ln(x) - 1$
3	$\text{Dériver}[g(x), x]$ $\rightarrow 2 - \frac{1}{x}$

- Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
- On note f' la dérivée de la fonction f . Étudier les variations de la dérivée f' .
- En déduire que la fonction f est strictement croissante.

PARTIE B

Une entreprise produit et commercialise un article.

Sa capacité de production est comprise entre 1 000 et 10 000 articles par jour.

Le coût total de production exprimé en milliers d'euros est modélisé sur l'intervalle $[1; 10]$ par la fonction f de la partie A, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

Soit $C(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

La fonction C est définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par $C(x) = \frac{f(x)}{x}$.

- On note C' la dérivée de la fonction C . Calculer $C'(x)$.
- Étudier les variations de la fonction C sur $[1; 10]$.
- Montrer que l'équation $C(x) = 11$ admet une solution unique α .
- Si le prix de vente d'un article est de 7 €, l'entreprise fera-t-elle un bénéfice?
 - On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 11 €. Déterminer l'intervalle (à la centaine d'article près) dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

EXERCICE 1

Commun à tous les élèves

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On sait que $f(1) = -3$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0	2	$+\infty$
signe de $f(x)$	-	0	+

1. F est la primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $F(1) = 1$.

a) Donner le tableau de variations de la fonction F .

b) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction F .

Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

2. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$.

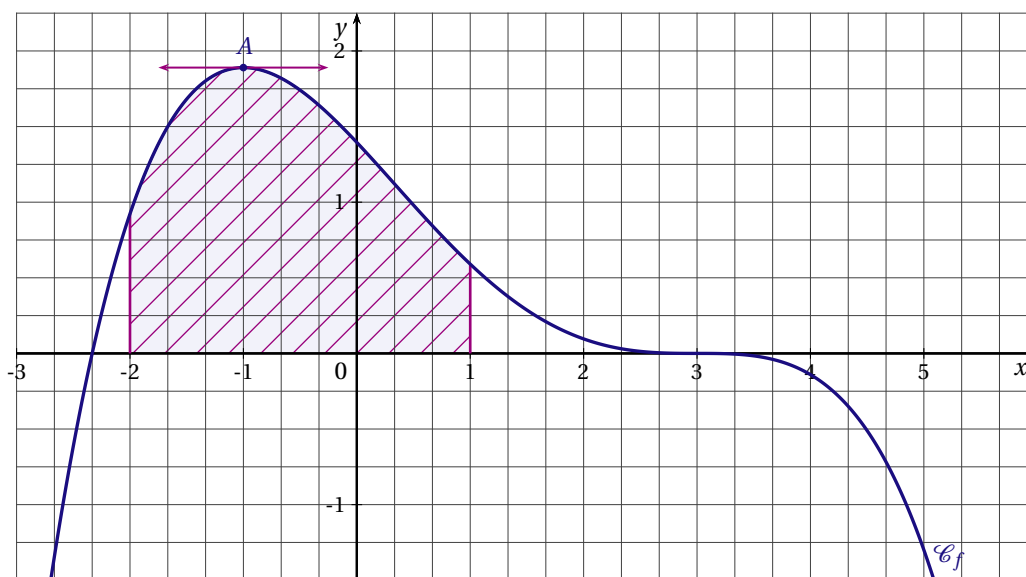
Étudier la convexité de la fonction F .

EXERCICE 2

Commun à tous les élèves

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

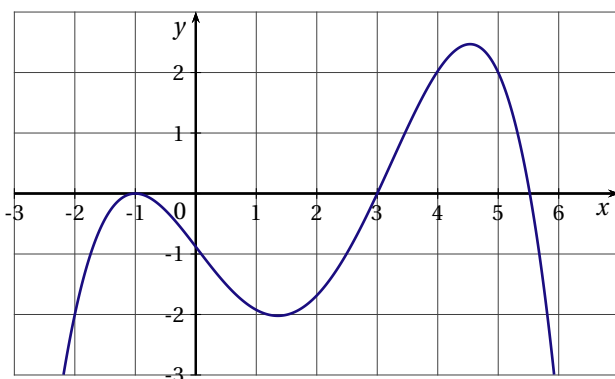
On note f' la dérivée de la fonction f et F une primitive de la fonction f .



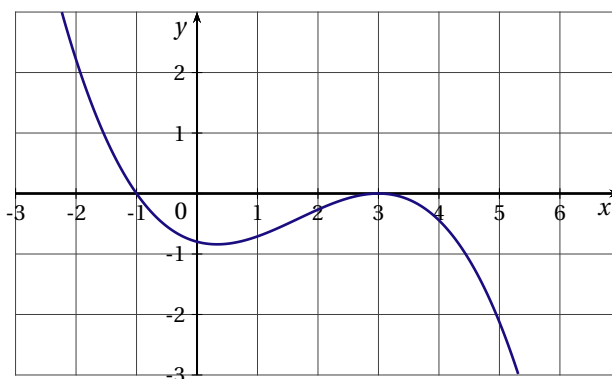
1. Déterminer graphiquement une valeur approchée à l'unité de l'intégrale $\int_{-2}^1 f(x) dx$.

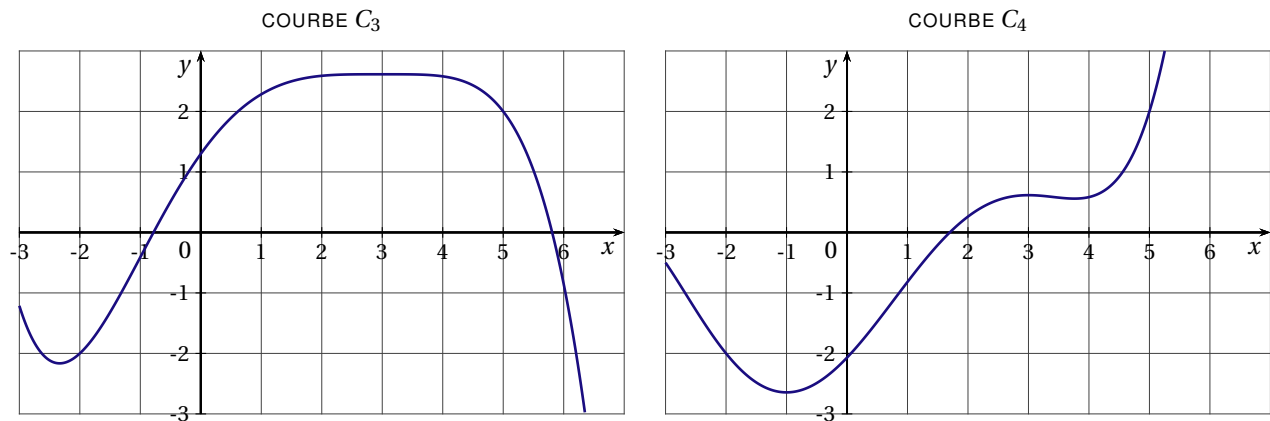
2. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F .

COURBE C_1



COURBE C_2





- Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F . (*Justifier*)
- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^5 f(x) dx$.
- La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion?

EXERCICE 3

Commun à tous les élèves

Calculer les intégrales suivantes :

- $A = \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 1) dx$.
- $B = \int_0^{2\ln 2} (x + e^{0,5x}) dx$.
- $C = \int_1^e \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx$.

EXERCICE 4

Élèves L (spécialité) et ES (obligatoire)

D'après sujet bac Nouvelle Calédonie (février 2018)

On étudie les abonnements à un grand quotidien de 2011 à 2015.

Le tableau suivant indique, pour chaque année de 2011 à 2015, le nombre d'abonnés.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés	620 214	610 156	575 038	578 282	555 239
Taux d'évolution annuel		-1,62 %	-5,76 %	0,56 %	-3,98 %
Taux d'évolution par rapport à l'année 2011		-1,62 %	-7,28 %	-6,76 %	-10,48 %

PARTIE A

- Retrouver par le calcul, le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013.
- Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015 est environ de -2,73 %. Justifier.

PARTIE B

Afin d'étudier cette évolution, on suppose qu'à l'avenir, tous les ans, 10 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement à ce quotidien mais que l'on compte 52 milliers de nouveaux abonnés.

En 2011, le nombre d'abonnés est égal, après arrondi, à 620 milliers.

On s'intéresse, pour tout entier naturel n , au nombre d'abonnés, en milliers, pour l'année $(2011 + n)$.

On note u_n le nombre d'abonnés en milliers pour l'année $(2011 + n)$.

On fixe donc $u_0 = 620$.

- Déterminer le nombre d'abonnés en 2012 suivant ce modèle.
- Justifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 52$.

3. On définit la suite (v_n) , pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 520$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 100 \times 0,9^n + 520$.
4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.
 - a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le quotidien sera en difficulté financière.

```

U ← 620
N ← 0
Tant que .....
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
  
```

- b) Résoudre l'inéquation $u_n \leq 540$.
- c) Déterminer à partir de quelle année le quotidien sera en difficulté financière. Indiquer la démarche.

EXERCICE 4

Élèves ES (spécialité)

Une municipalité propose aux personnes qui effectuent de nombreux déplacements deux types d'abonnement mensuel :

- un abonnement « V-libre » à un service de location de vélos ;
- un abonnement « T-libre » aux transports en commun.

Une étude récente a montré que le nombre global d'abonnements reste constant dans le temps et que le nombre de personnes qui, un mois donné, acquièrent les deux abonnements est négligeable (on considère qu'un abonné ne souscrit qu'à un seul type d'abonnement « T-libre » ou « V-libre »).

On a constaté également que, chaque mois, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :

- 22 % des abonnements « T-libre » sont remplacés par des abonnements « V-libre » ;
- 66 % des abonnements « V-libre » sont remplacés par des abonnements « T-libre ».

En janvier 2018, en raison d'un réaménagement des bornes d'emplacement des vélos, seulement 5 % des abonnements ont été souscrits au service « V-libre ».

Dans la suite de l'exercice, on note :

- t_n la probabilité qu'un abonnement soit souscrit au service « T-libre », le n -ième mois après le mois de janvier 2018.
- v_n la probabilité qu'un abonnement soit souscrit au service « V-libre », le n -ième mois après le mois de janvier 2018.
- $P_n = \begin{pmatrix} t_n & v_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant aux abonnements à ces deux services le n -ième mois après le mois de janvier 2018. On a donc $P_0 = (0,95 \quad 0,05)$.

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets T et V où le sommet T représente l'état « abonné au service T-libre » et V l'état « abonné au service V-libre ».
- b) Déterminer la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre (T, V) des sommets.
2. En février 2018, quelle a été la part des abonnements « V-libre » dans l'ensemble des abonnements ?
3. Quelle est la part des abonnements « T-libre » dans l'ensemble des abonnements en avril 2018 ?
Donner le résultat en pourcentage arrondi à 0,1 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.
5. a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 0,12v_n + 0,22$.
- b) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

EXERCICE 5

Commun à tous les élèves

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + x$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln(x) + 2}{x^2}$.
2. La dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie pour tout réel x strictement positif par $f''(x) = \frac{4\ln(x) - 6}{x^3}$.
 - a) Étudier la convexité de la fonction f .
 - b) En déduire le tableau des variations de la dérivée f' .
3. Étudier les variations de la fonction f .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.
Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près de la solution α .
5. a) Montrer que la fonction G définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $G(x) = (\ln x)^2$ est une primitive de la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par $g(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$.
b) En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
6. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; e]$.

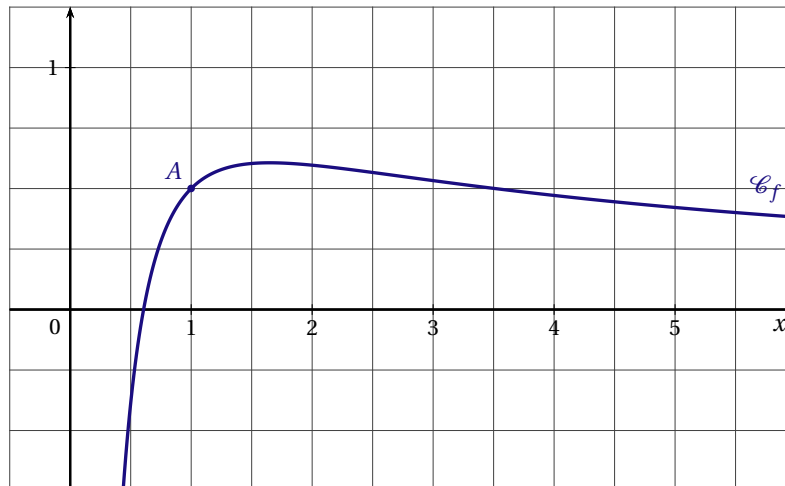
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les élèves

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{2x}$.
Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}_f$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



- La dérivée f' de la fonction f est :
 - positive ou nulle sur l'intervalle $[1; +\infty[$
 - négative ou nulle sur l'intervalle $]0; 0,5]$
 - change de signe sur l'intervalle $[0,5; 1]$
 - négative ou nulle sur l'intervalle $[\sqrt{e}; +\infty[$
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 a pour équation :
 - $y = \frac{x}{2}$
 - $y = x$
 - $y = x + \frac{1}{2}$
 - $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$
- La dérivée seconde de la fonction f est définie pour tout réel x strictement positif par $f''(x) = \frac{2\ln x - 2}{x^3}$.
La fonction dérivée f' est :
 - croissante sur l'intervalle $]0; \sqrt{e}]$
 - décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{e}; +\infty[$
 - décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$
 - croissante sur l'intervalle $[e; +\infty[$
- On admet que la fonction F définie par $F(x) = \frac{(\ln x)^2 + \ln x}{2}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - sur l'intervalle $[e^{-1}; e]$, f est une fonction densité de probabilité.
 - sur l'intervalle $[1; e]$, f est une fonction densité de probabilité.
 - la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[e^{-2}; e^2]$ est égale à $\frac{2}{e^4}$
 - $\int_{e^{-2}}^1 f(x) dx = 1$

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les élèves

*Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, arrondis au millième près.*

PARTIE A

D'après une étude sur l'emploi, en France on a pu établir que :

- 48,1 % des personnes qui occupent un emploi sont des femmes ;
- 8,6 % des femmes en emploi ne sont pas salariées ;
- 14,5 % des hommes en emploi ne sont pas salariés.

On interroge au hasard une personne en emploi et on considère les événements suivants :

- F : « la personne est une femme » ;
- H : « la personne est un homme » ;
- S : « la personne occupe un emploi salarié » ;

1. Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité que cette personne soit une femme et qu'elle occupe un emploi non salarié.
b) Calculer la probabilité que cette personne occupe un emploi non salarié.
3. La personne interrogée occupe un emploi non salarié. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

PARTIE B

Selon la même étude, en France, 21,3 % des femmes actives de 15 à 24 ans sont au chômage.

À l'occasion de son TPE, un lycéen a interrogé 100 femmes actives de 15 à 24 ans de sa commune. Il a constaté que parmi les femmes interrogées 18 sont au chômage.

Ce lycéen peut-il considérer que dans sa commune le taux de chômage des femmes actives de 15 à 24 ans est inférieur à 21,3 % ?

PARTIE C

Pour certaines missions à caractère temporaire, une grande entreprise emploie des salariés intérimaires.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de salariés intérimaires employés par l'entreprise un mois donné.

On admet que X peut être modélisé par la loi normale de moyenne $\mu = 26$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1. Calculer la probabilité $P(18 \leq X \leq 22)$.
2. Calculer la probabilité que sur un mois, le nombre d'employés intérimaires soit inférieur ou égal à 20.

EXERCICE 3 (5 points)

Élèves ES (obligatoire) et L (spécialité)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,84u_n + 24.$$

1. Calculer u_2 .
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 150$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,84.
On précisera la valeur de v_0 .
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 150 - 100 \times 0,84^n$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 145$.

```
U ← 50
N ← 0
Tant que .....
    U ← ...
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

- b) Calculer la valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme en résolvant l'inéquation $u_n \geq 145$.

EXERCICE 3 (5 points)

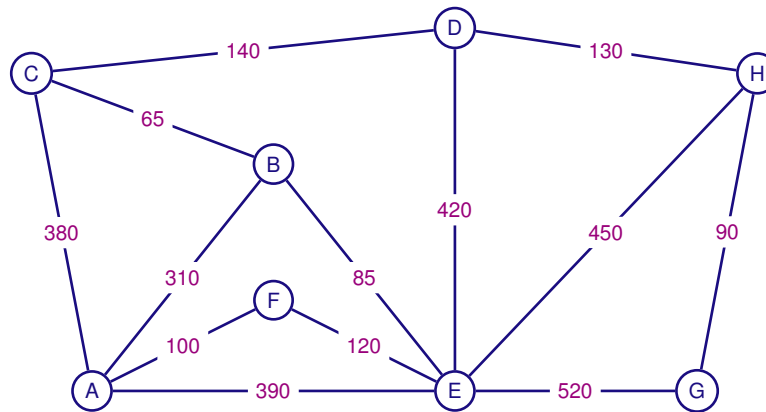
Élèves ES (spécialité)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents terrains cultivables A, B, C, D, E, F, G et H d'une coopérative agricole céréalière.

Le poids de chaque arête représente la distance, en mètres, entre deux zones cultivables reliées par un chemin.



1. Est-il possible de trouver un circuit qui passe par chaque chemin une et une seule fois ?
2. À l'aide d'un algorithme, déterminer le chemin le plus court qui permet de relier la zone A à la zone G. Préciser la distance, en mètres, de ce chemin.

PARTIE B

Afin de permettre la reconstitution de la fertilité du sol, il a été décidé de planter de la moutarde sur une partie des sols ensemencés avec des céréales. Ces terres sont dites de jachère.

D'une année sur l'autre :

- 6 % des champs qui ont été ensemencés avec des céréales sont laissés en jachère ;
- 24 % des champs laissés en jachère sont ensemencés avec des céréales.

Pour tout entier naturel n , on note :

- c_n la probabilité qu'un champ soit ensemencé avec des céréales la n -ième année après la décision de laisser en jachère une partie des sols ;
- j_n la probabilité qu'un champ soit laissé en jachère la n -ième année après la décision de laisser en jachère une partie des sols.

La matrice ligne $P_n = (c_n \quad j_n)$ traduit l'état probabiliste la n -ième année après la décision de laisser en jachère une partie des sols ensemencés avec des céréales.

Au moment de la décision, tous les champs étaient ensemencés avec des céréales. On a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets C et J où le sommet C représente l'état « le champ est ensemencé avec des céréales » et J l'état « champ est laissé en jachère ».
2. Déterminer la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre (C, J) des sommets.
3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
4. Soit la matrice ligne $P = (x \quad y)$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.
Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.
5. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = 0,7c_n + 0,24$.
6. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = c_n - 0,8$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.
On précisera la valeur de v_0 .
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 0,8 + 0,2 \times 0,7^n$.
7. Résoudre l'inéquation $c_n \leq 0,81$ et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

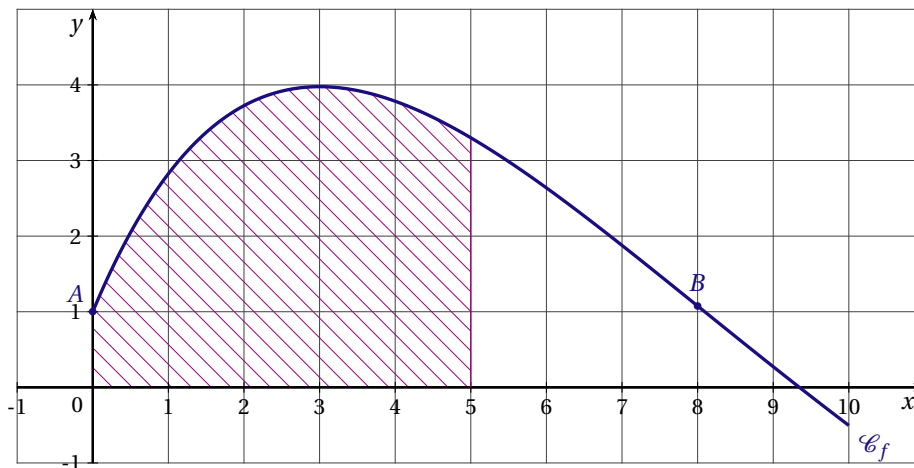
EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les élèves

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = (4x + 8)e^{-0,2x} - 7.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.



- On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet le point B d'abscisse 8 comme seul point d'inflexion.
À l'aide du graphique :
 - déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave ;
 - donner le tableau des variations de la dérivée f' de la fonction f .
- Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ on a $f'(x) = (-0,8x + 2,4)e^{-0,2x}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée à 0,001 près.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 0,001 près de α .
- Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu l'expression d'une primitive G de la fonction g :

1	$g(x) := (a * x + b) * \exp(-0,2 * x)$ $\rightarrow g(x) := (ax + b)e^{-0,2x}$
2	$G(x) := \text{Primitive}[g(x), x]$ $\rightarrow G(x) := (-5ax - 25a - 5b)e^{-0,2x}$

Justifier que la fonction F définie par $F(x) = (-20x - 140)e^{-0,2x} - 7x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

- Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, du domaine hachuré délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 5$.

