I VECTEUR DE L'ESPACE

Les définitions et opérations sur les vecteurs du plan se généralisent dans l'espace

1 VECTEURS COLINÉAIRES

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie, qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

— Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
— Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 VECTEURS COPLANAIRES

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

CONSÉQUENCE :
Pour démontrer qu'un point D appartient à un plan $\mathscr{P}$ défini par trois points non alignés A, B et C on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

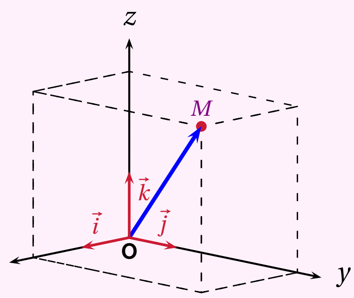
II REPÉRAGE DANS L'ESPACE

1 COORDONNÉES D'UN POINT

Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).



x est l'abscisse, y est l'ordonnée, z est la cote.

2 CALCULS AVEC LES COORDONNÉES

Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x; y; z)$ et $\vec{v}\,(x'; y'; z')$.

— $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
— Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v}\,(x + x'; y + y'; z + z')$.
— Pour tout réel k, $k\vec{u}\,(kx; ky; kz)$.

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B\,(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace :

— le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
— le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Dans un repère **orthonormal** $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$,

— La distance entre les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ est donnée par

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+(z_B-z_A)^2}$$

— Deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx'+yy'+zz'=0$.

III ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE L'ESPACE

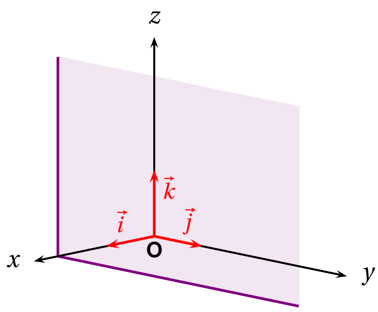
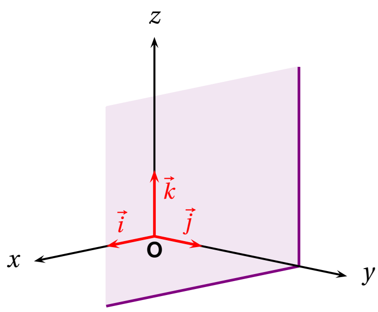
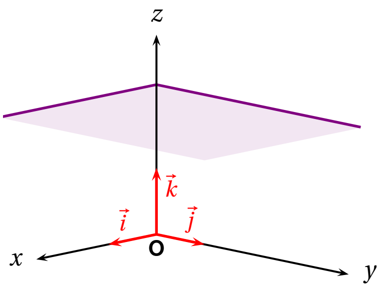
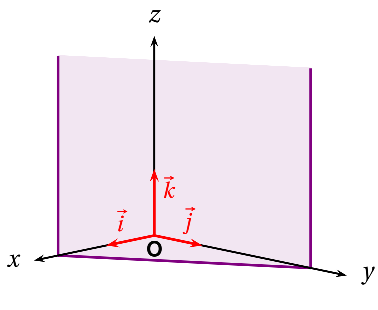
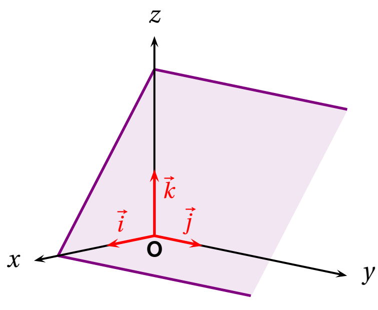
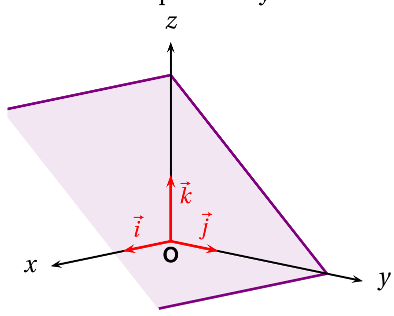
1 ÉQUATION D'UN PLAN

— Un plan de l'espace a une équation de la forme $ax+by+cz=d$ avec a, b et c non tous nuls.

— Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+cz=d$, où l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul, est une équation cartésienne d'un plan.

PLANS PARTICULIERS :

Un plan admettant une équation « incomplète », c'est à dire dans laquelle ne figure qu'une ou deux des trois variables x, y et z, est parallèle à un plan de coordonnées ou à un axe de coordonnées.

Plan $\mathscr{P}$ d'équation $x=k$  $\mathscr{P}//(y\mathrm{O}z)$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $y=k$  $\mathscr{P}//(x\mathrm{O}z)$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $z=k$  $\mathscr{P}//(x\mathrm{O}y)$
Plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by=d$  $\mathscr{P}//(\mathrm{O}z)$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+cz=d$  $\mathscr{P}//(\mathrm{O}y)$	Plan $\mathscr{P}$ d'équation $by+cz=d$  $\mathscr{P}//(\mathrm{O}x)$

DÉTERMINER UNE ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN :

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, montrer que les points $A\,(1;0;3)$, $B\,(1;-1;0)$ et $C\,(-1;-2;1)$ définissent un plan et déterminer une équation de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\,(0;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2;-2;-2)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un plan (ABC).
Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC).

MÉTHODE 1 :

Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $ax+by+cz=d$ où a, b, c et d sont des réels.

$A\,(1;0;3)\in(ABC)\Leftrightarrow a+3c=d$

$B\,(1;-1;0)\in(ABC)\Leftrightarrow a-b=d$

$C\,(-1;-2;1)\in(ABC)\Leftrightarrow -a-2b+c=d$

Ainsi, a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+3c &=& d\\ a-b &=& d\\ -a-2b+c &=& d\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{d-a}{3}\\ b &=& a-d\\ -a-2(a-d)+\dfrac{d-a}{3} &=& d\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{d-a}{3}\\ b &=& a-d\\ -\dfrac{10a}{3} &=& -\dfrac{4d}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{d}{5}\\ b &=& -\dfrac{3d}{5}\\ a &=& \dfrac{2d}{5}\end{array}\right.$$

En choisissant, $d=5$ on obtient $a=2$, $b=-3$ et $c=1$ donc le plan (ABC) a pour équation $2x-3y+z=5$

MÉTHODE 2 :

$M(x;y;z)$ est un point du plan (ABC) si, et seulement si, les points A, B, C et M sont coplanaires.
C'est à dire, si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

Or $\overrightarrow{AM}\left(x-1;y;z-3\right)$, $\overrightarrow{AB}\,(0;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2;-2;-2)$ d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& -2\beta\\ y &=& -\alpha-2\beta\\ z-3 &=& -3\alpha-2\beta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1-x}{2} &=& \beta\\ x-y-1 &=& \alpha\\ z-3 &=& -3(x-y-1)+(x-1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1-x}{2} &=& \beta\\ x-y-1 &=& \alpha\\ 2x-3y+z &=& 5\end{array}\right.$$

Ainsi, le plan (ABC) a pour équation $2x-3y+z=5$

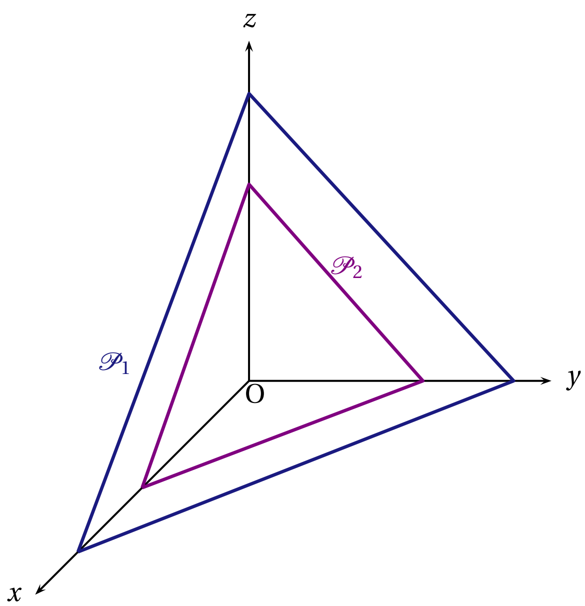
2 VECTEUR ORTHOGONAL À UN PLAN

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal (ou normal) à un plan $\mathscr{P}$ si la direction de $\vec{n}$ est une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$. C'est à dire une droite orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$.

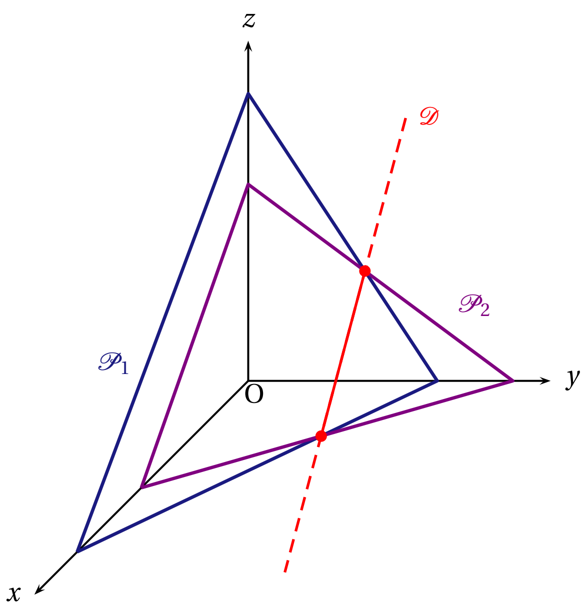
Dans un repère othonormal, le vecteur $\vec{n}\,(a;b;c)$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz=d$.

3 PLANS PARALLÈLES

Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$ sont parallèles si, et seulement si, les coefficients a, b, c et a', b', c' sont proportionnels.



Plans parallèles



Plans sécants selon une droite $\mathscr{D}$

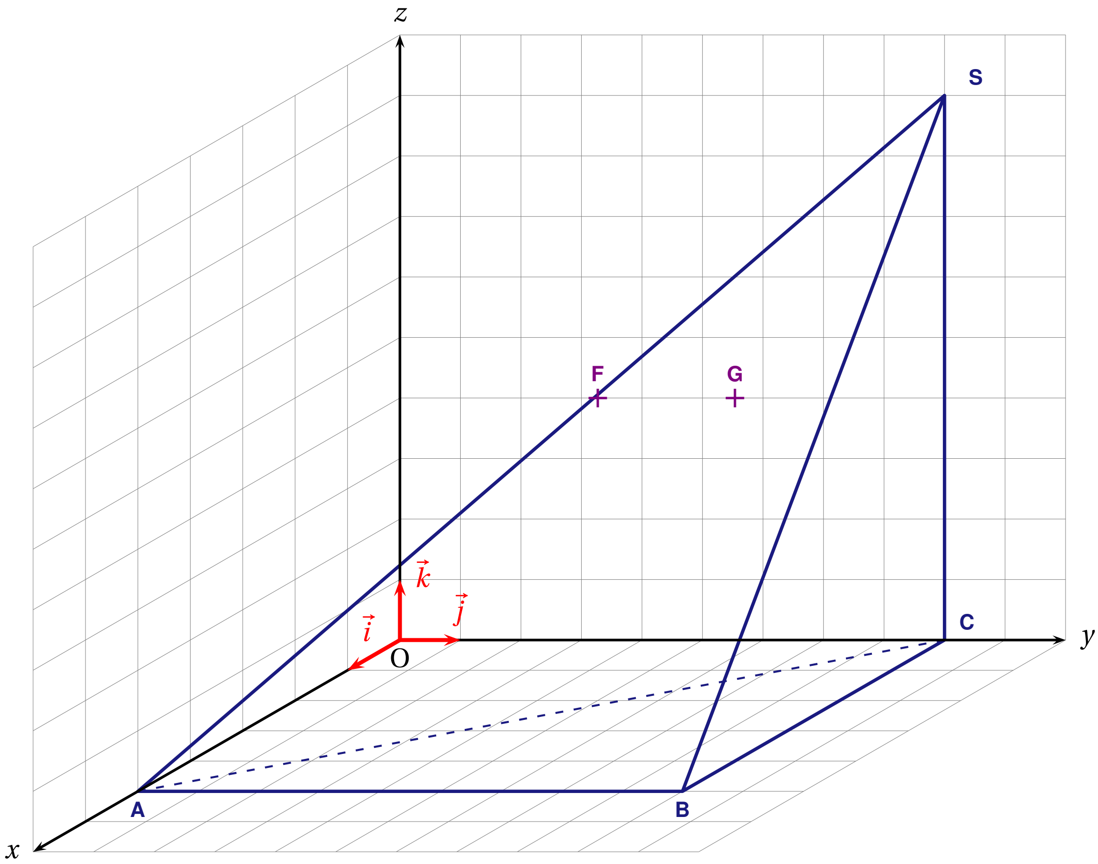
4 SYSTÈME D'ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Un point $M\left(x;y;z\right)$ appartient à une droite $\mathscr{D}$ de l'espace si, et seulement si, ses coordonnées vérifient un système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by+cz & = & d \\ a'x+b'y+c'z & = & d' \end{array}\right. \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } a',\ b',\ c' \text{ ne sont pas proportionnels.}$$

EXERCICE 1

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(5;0;0)$, $B(5;9;0)$, $C(0;9;0)$ et $S(0;9;9)$.



1. Placer le point E de coordonnées $(6;4;7)$ dans le repère précédent.
2. L'abscisse du point F est égale à 2, lire les coordonnées du point F.
3. G est un point du plan (SBC), lire les coordonnées du point G.
4. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

EXERCICE 2

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;-1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;1)$ et $D(6;3;0)$.

1. Les points A, B et C déterminent-ils un plan ?
2. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(2;-1;3)$, $B(-2;3;1)$, $C(-2;0;4)$, $D(9;-5;8)$ et $E(x;y;6)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Le point E appartient à la droite (AB). Déterminer son abscisse et son ordonnée.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
4. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire au plan (ABC).

EXERCICE 4

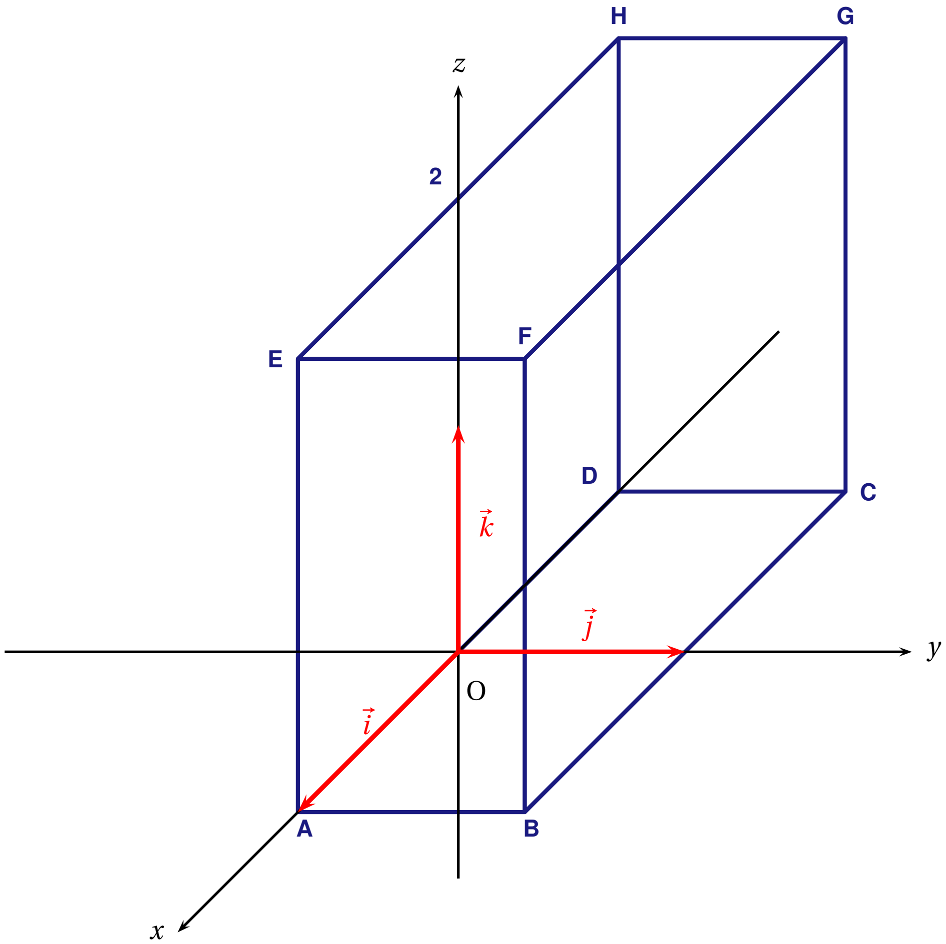
Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-2;3;-1)$ et $B(1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point C intersection de la droite (AB) avec le plan (xOy).
2. Déterminer les coordonnées du point D intersection de la droite (AB) avec le plan (yOz).
3. La droite (AB) est-elle sécante avec le plan (xOz) ?

EXERCICE 5

(*D'après Sujet Bac Polynésie 2005*)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
La figure ci-dessous, représente un pavé droit ; le point O est le milieu de $[AD]$.
Soit P le milieu du segment $[EF]$.



1. a) Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z=2$?
   b) Déterminer une équation du plan (ABF).
   c) En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF).
2. a) Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ?
   b) Placer sur la figure le point Q de coordonnées $(0;0,5;0)$.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ).
3. a) Construire sur la figure les segments $[PQ]$ et $[AG]$.
   b) Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier.

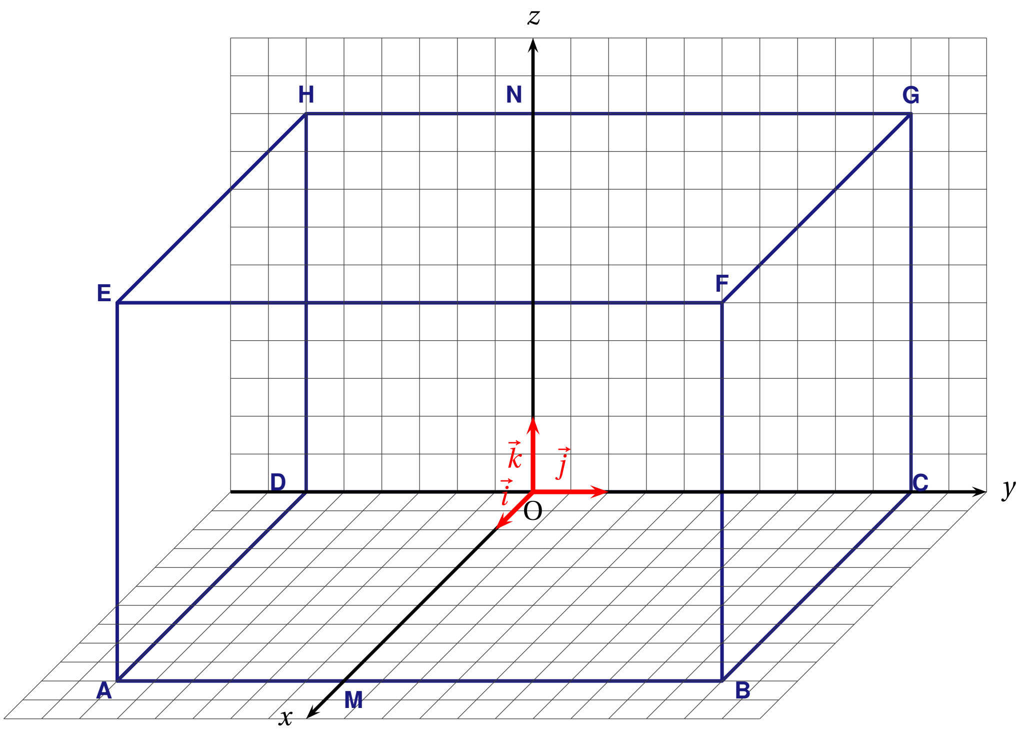
4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ?

EXERCICE 6

La figure ci-dessous, représente un pavé droit $ABCDEFGH$ dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Les coordonnées des points A, B et G sont $A(5;-3;0)$, $B(5;5;0)$ et $G(0;5;5)$.

M est le point d'intersection du segment $[AB]$ avec l'axe des abscisses, N est le point d'intersection du segment $[HG]$ avec l'axe des cotes.



1. a) Les points A, B, G et H sont-ils coplanaires ?
   b) Déterminer une équation du plan (ABG).
   c) Les points M et N appartiennent-ils au plan (ABG) ?
   d) Préciser la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$ des points de l'espace dont les coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x+z & = & 5 \end{array}\right.$$

   Représenter l'ensemble $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

2. a) Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $x=5$?
   b) Déterminer une équation du plan (EBH).
   c) En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EB).
   d) Déterminer un système d'équations qui caractérise la droite (CH).

3. Les droites (MN) et (CH) sont-elles sécantes ? (*Justifiez*)

EXERCICE 7 (*D'après sujet bac France Métropolitaine Septembre 2009*)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin joint en annexe, on a placé les points $A(0\,;\,2\,;\,0)$, $B(0\,;\,0\,;\,6)$, $C(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$ et $E(0\,;\,0\,;\,4)$.
Soit (P) le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur le plan de base sur le dessin joint en annexe.

1. a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).

   b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.

2. a) Justifier que les plans (P) et (CDE) sont sécants. On note (Δ) leur intersection.

   b) Sans justifier, représenter (Δ) en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.

3. On considère les points $F(2\,;\,0\,;\,0)$ et $G(0\,;\,3\,;\,0)$.
   On note (Q) le plan parallèle à l'axe $\left(O;\ \vec{k}\right)$ et contenant les points F et G.

   a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
      Sans justifier, représenter le plan (Q) par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.

   b) Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan (Q).

4. L'intersection des plans (CDE) et (Q) est la droite $\left(\Delta'\right)$.
   Sans justifier, représenter la droite $\left(\Delta'\right)$, d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.

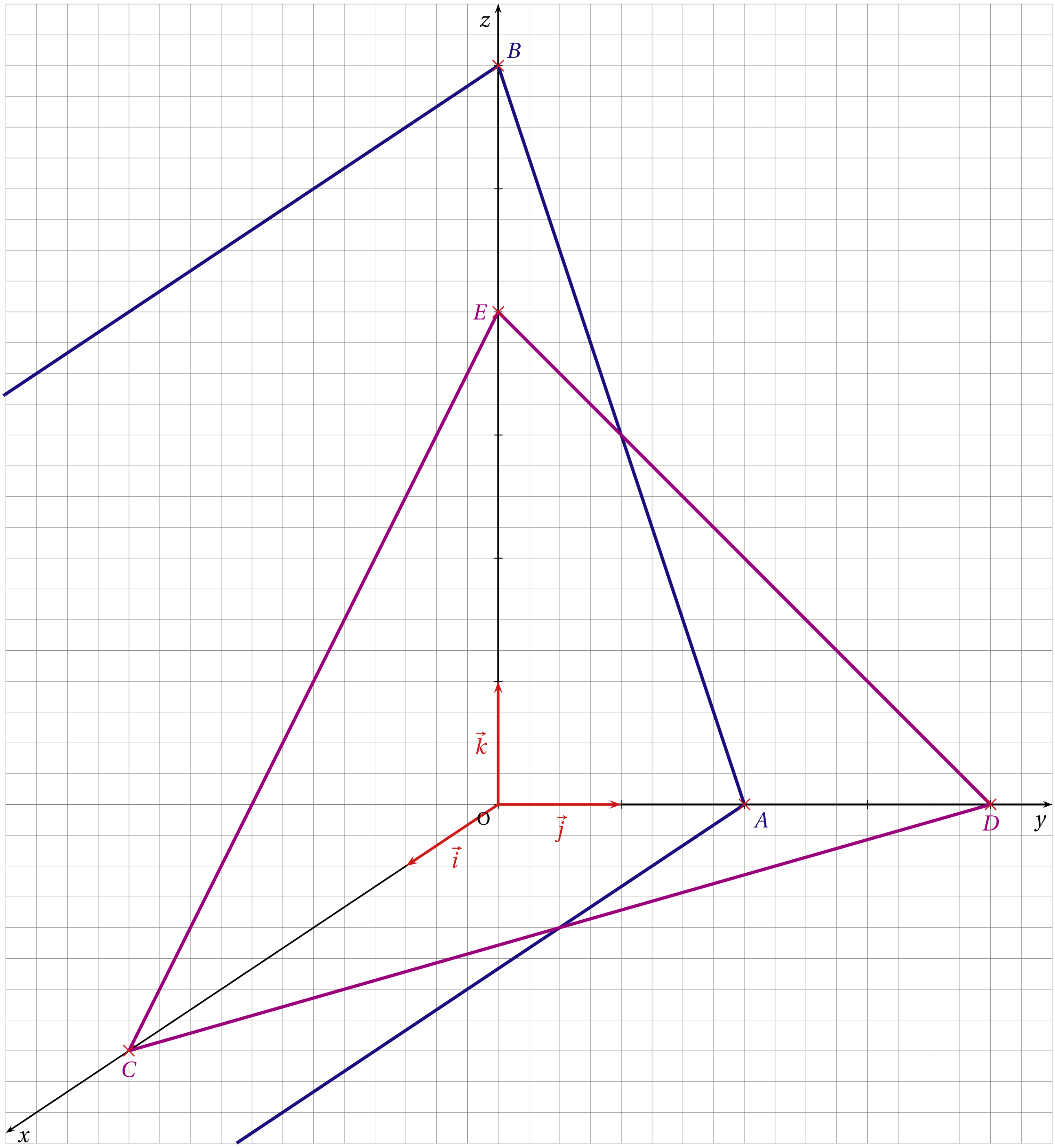
5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z &=& 6 \\ x+y+z &=& 4 \\ 3x+2y &=& 6 \end{array}\right.$$

   a) Résoudre ce système.

   b) Que peut-on alors en déduire pour les droites (Δ) et $\left(\Delta'\right)$?

ANNEXE



EXERCICE 8

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormal représenté en annexe ci-dessous.

1. Tracer les droites d'intersection du plan (P) d'équation $5x+5y+6z=15$ avec les plans de coordonnées du repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. On considère le plan (Q) d'équation $3x+4y=6$.
   a) Préciser la nature de l'ensemble Δ des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 5x+5y+6z & = & 15 \\ 3x+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

b) Représenter l'ensemble Δ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

3. On donne les points $D(1;0;0)$, $E(0;-3;0)$, $F(-1;-3;4)$ et $G(0;0;4)$.

   a) Montrer que les points D, E et F déterminent un plan.

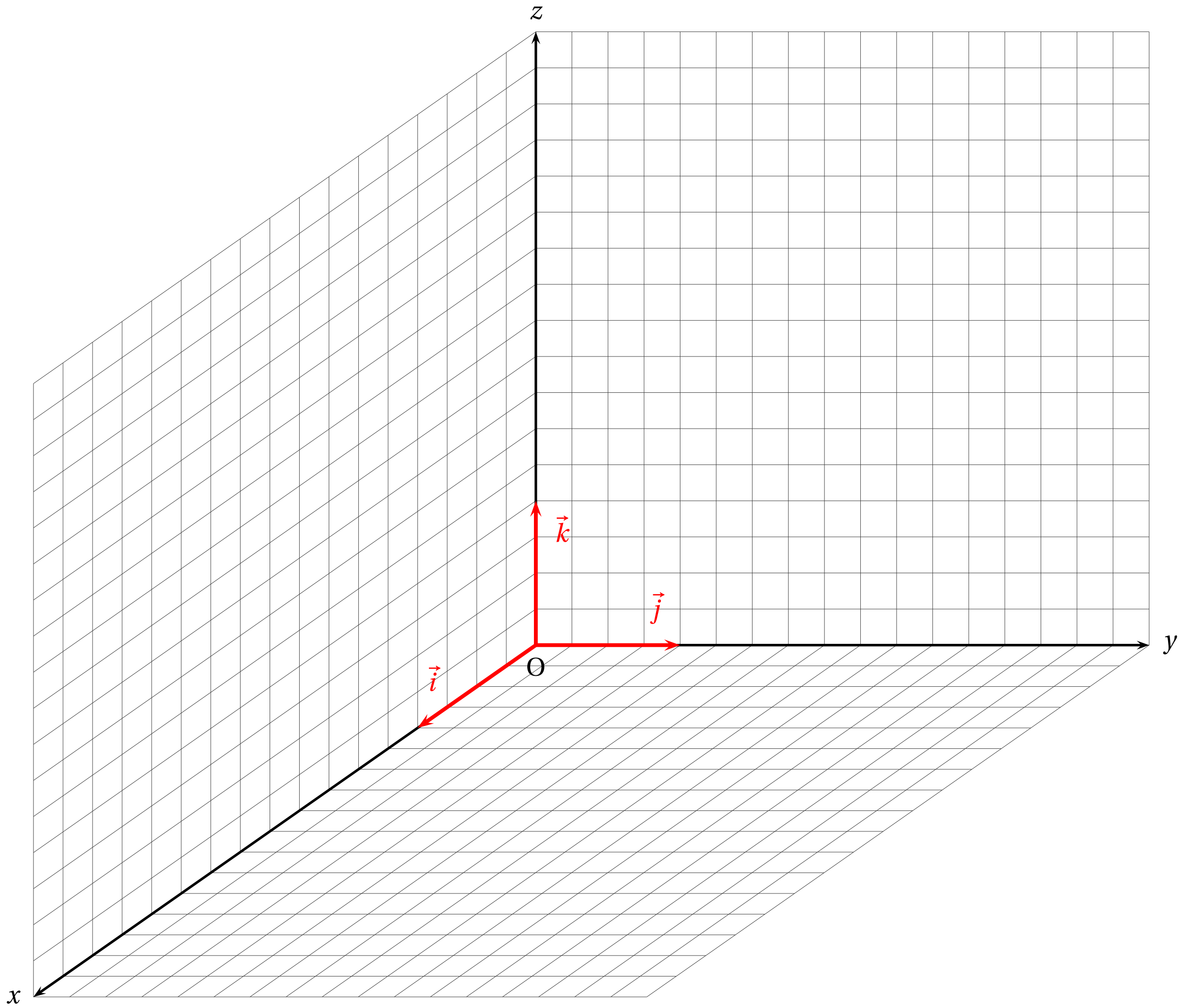
   b) Les points D, E, F et G sont-ils coplanaires ?

   c) Déterminer une équation du plan (R) qui contient les points D, E, F.

   d) Représenter l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

4. Résoudre le système suivant et en donner une interprétation graphique.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 12x-4y+3z &=& 12\\ 5x+5y+6z &=& 15\\ 3x+4y &=& 6 \end{array}\right.$$



EXERCICE 9

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-1;6;7,5)$ et $B(-2;8;9)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P parallèle à l'axe (Oz) et passant par les points A et B.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q parallèle à l'axe (Oy) et passant par les points A et B.
3. Soit d la droite caractérisée par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y & = & 4 \\ 3x+2z & = & 12 \end{array}\right.$$

   Les points A et B sont-ils sur la droite d ?

4. Dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ ci-dessous, représenter les plans P et Q par leurs traces avec les plans de base ainsi que la droite (AB).