En terminale ES, la notion intuitive de limite permet de mettre en évidence le comportement d'une fonction dans les cas suivants :

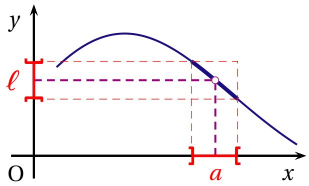
— Que se passe-t-il lorsque la variable x est proche d'une valeur a, sans pour cela l'atteindre ?

— Que se passe-t-il lorsque la variable x s'éloigne infiniment de 0 (limites en $+\infty$ ou en $-\infty$) ?

I NOTION DE LIMITE

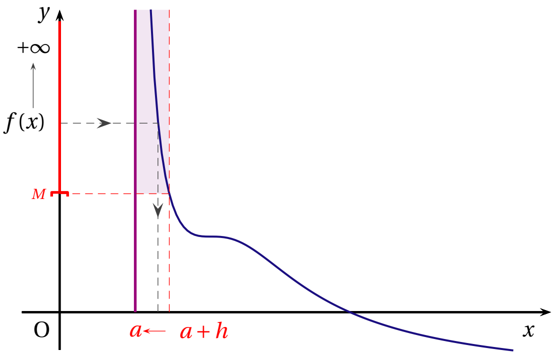
1 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a.
Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament proche de a.
On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

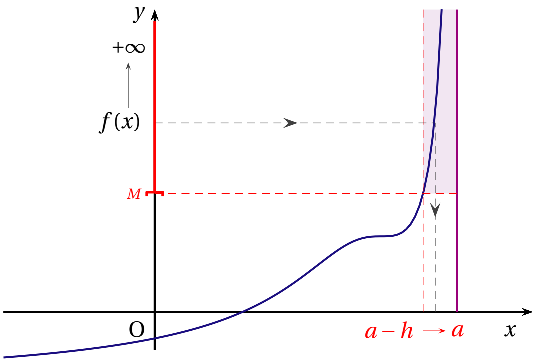


2 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a à droite de a (resp. à gauche de a).
Dire que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a avec $x > a$ (resp. avec $x < a$) signifie que tout intervalle $]M;+\infty[$, où M est un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament proche de a avec $x > a$ (resp. avec $x < a$).
On note : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$)

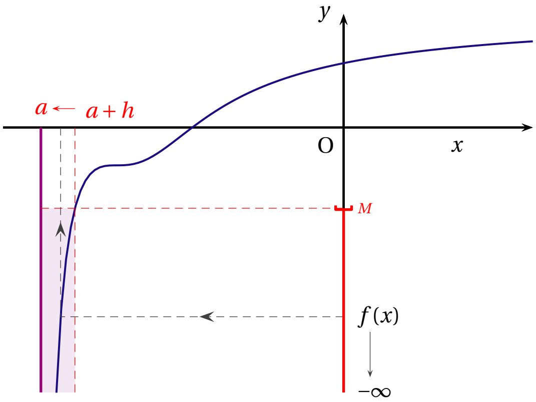


$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$$

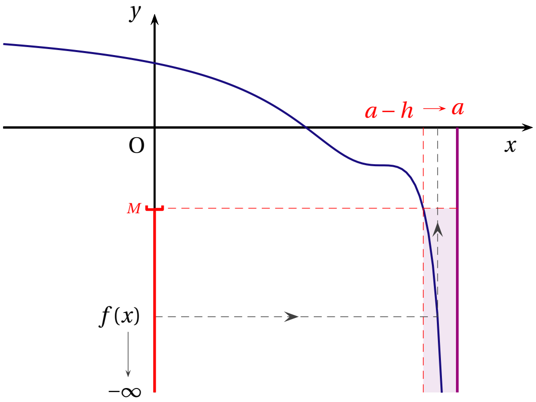


$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$$

On a des définitions analogues lorsque la limite de f en a est $-\infty$



$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$$

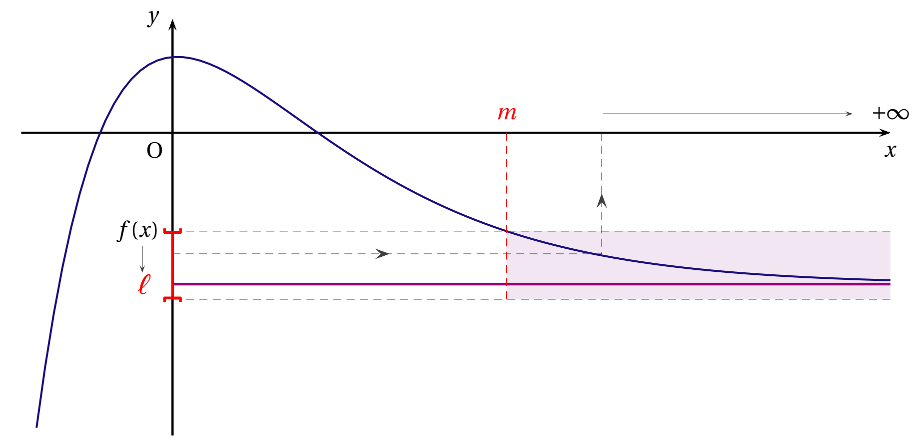
Autrement dit, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi *éloigné* que l'on veut de 0 pourvu que x soit suffisamment *proche* de a.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, on dit alors, que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de la fonction f.

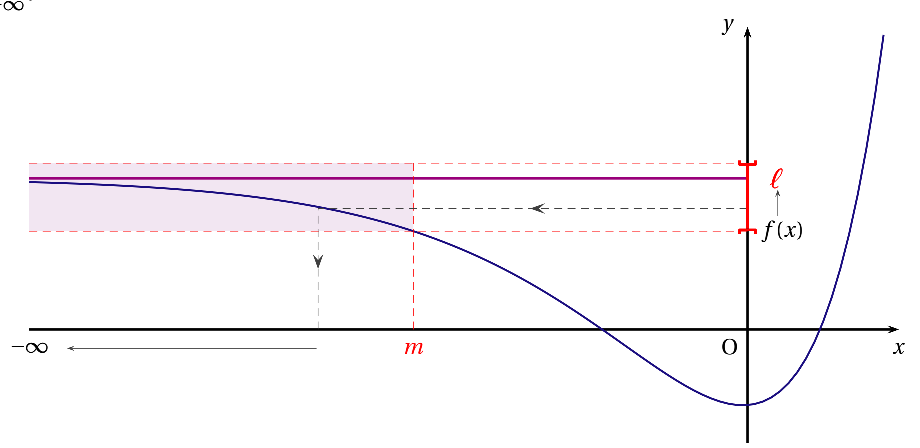
3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN L'INFINI

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où A est un réel.
   Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament grand.
   On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir $x > m$

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$, où A est un réel.
   Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x < 0$ suffisament éloigné de 0.
   On note : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir $x < m$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), on dit alors, que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

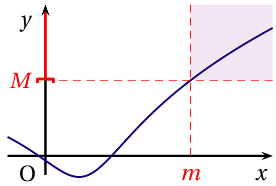
REMARQUE

Pour déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = \ell$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \ell$

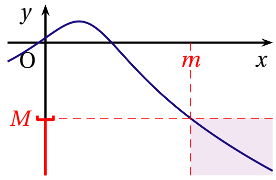
4 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN L'INFINI

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament grand.
   On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

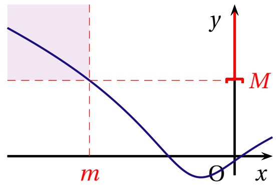


2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; M[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament grand.
   On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

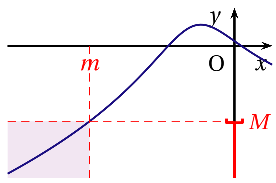


Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A]$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x < 0$ suffisament éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

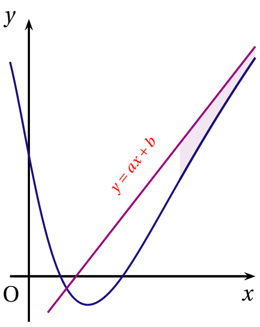


2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; M[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x < 0$ suffisament éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

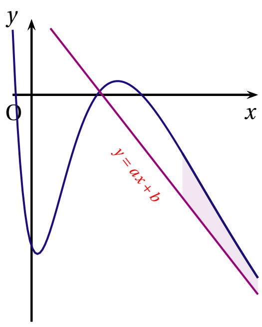


ASYMPTOTE OBLIQUE

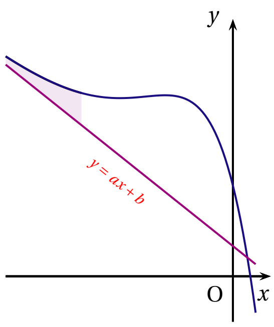
Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).



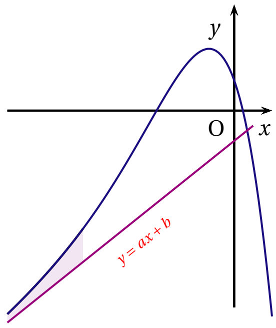
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



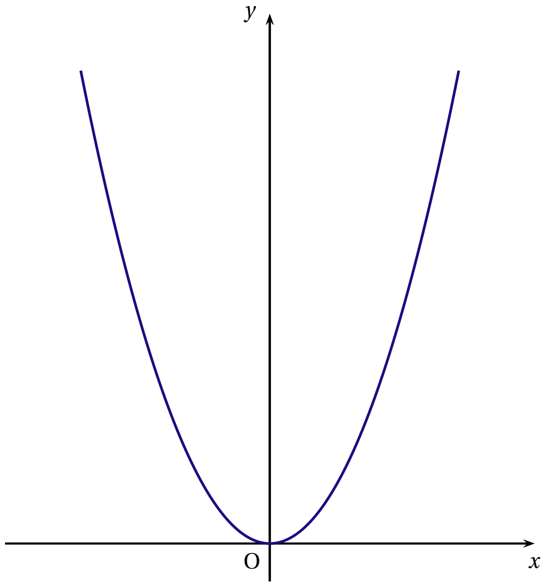
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

REMARQUE

Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$

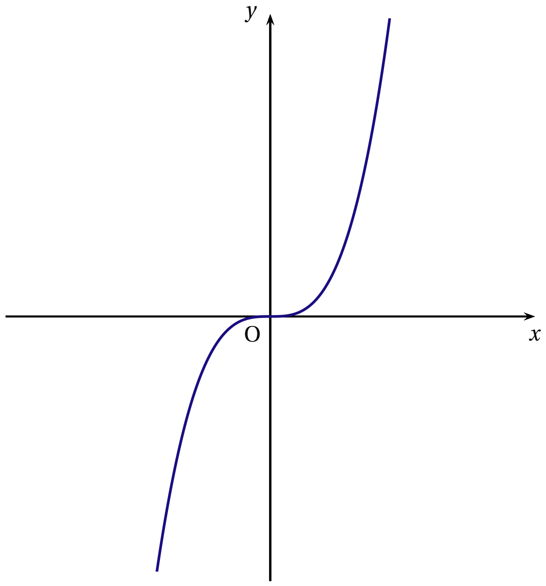
II LIMITES DE FONCTIONS USUELLES

FONCTION CARRÉ



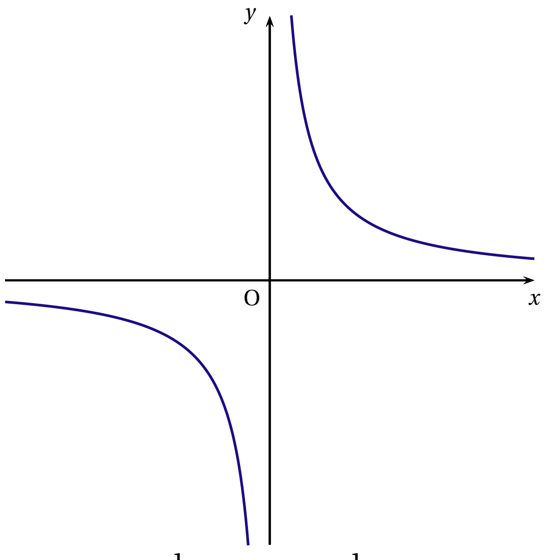
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

FONCTION CUBE



$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = +\infty\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

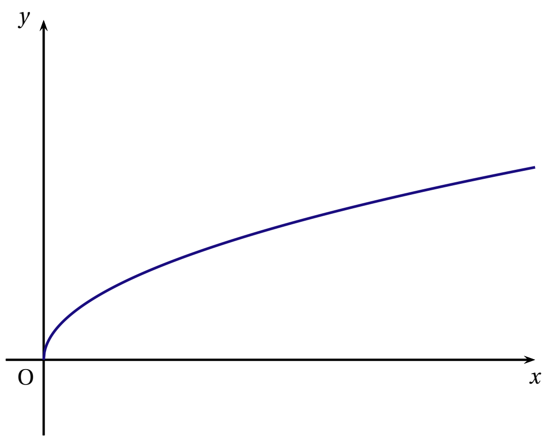
FONCTION INVERSE



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

FONCTION RACINE CARRÉE



$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

III RÈGLES OPÉRATOIRES SUR LES LIMITES

Dans tout ce paragraphe, u et v désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels, et α désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un nombre réel.

1 LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors par somme $\lim\limits_{x\to\alpha} (u+v)(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	À ÉTUDIER

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-1+\dfrac{1}{x}$.

Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$. La courbe représentative de la fonction f admet pour asymtote l'axe des ordonnées.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2 LIMITE D'UN PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors par produit $\lim\limits_{x\to\alpha} (u\times v)(x) =$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty^*$	À ÉTUDIER	$\pm\infty^*$

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2\times\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.

Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}-1=+\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $0\times\infty$ ».

Or pour tout réel x non nul, $x^2\times\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=x-x^2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-x^2=0$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}-1=-1$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

3 LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	$\ell'\neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	ℓ'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors par quotient $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{u}{v}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty^*$	0	$\pm\infty^*$	À ÉTUDIER	À ÉTUDIER

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} x-1=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} x^2-1=0$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

Or pour tout réel $x\neq 1$,

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$, nous pouvons conclure que, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\dfrac{1}{2}$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Comme pour pour tout réel $x\neq 1$, $\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$, il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=0$.

La courbe représentative de la fonction f admet pour asymtote l'axe des abscisses en $+\infty$.

4 FORMES INDÉTERMINÉES

Il y quatre formes indéterminées du type « $\infty-\infty$ » ; « $\infty\times 0$ » ; « $\dfrac{0}{0}$ » ; « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée, on essaie de trouver la limite demandée en étudiant la situation. On dispose cependant de deux règles, permettant de déterminer la limite d'une fonction polynôme et la limite d'une fonction rationnelle en l'infini.

RÈGLE 1

En $+\infty$ ou en $-\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^3-2x^2+x-5=\lim_{x\to+\infty} -3x^3=-\infty$$

RÈGLE 2

En $+\infty$ ou en $-\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x^3}{3x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{3x^4}=\frac{-2}{3x}=0$$

5 LIMITE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x appartenant à I, $u(x)$ appartient à J.
a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f est la fonction $v\circ u$, composée de u suivie de v.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} u(x)=b \text{ et } \lim_{X\to b} v(X)=c, \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x)=c$$

EXEMPLE

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\left(\dfrac{2}{1-x}\right)^2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{2}{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\dfrac{2}{1-x}\right)^2 = +\infty$

IV LIMITE PAR COMPARAISON

Les théorèmes suivants sont admis

THÉORÈME 1

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

EXEMPLE

Déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1$.
Pour tout réel x positif, $9x^2+1 \geqslant 9x^2$ d'où pour tout réel x positif,

$$\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{9x^2+1} - x + 1}_{f(x)} \geqslant \underbrace{2x+1}_{g(x)}$$

Or $\lim\limits_{x \to \infty} 2x+1 = +\infty$ donc d'après le théorème sur les limites par comparaison, $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{9x^2+1} - x + 1 = +\infty$.

THÉORÈME 2

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

EXEMPLE

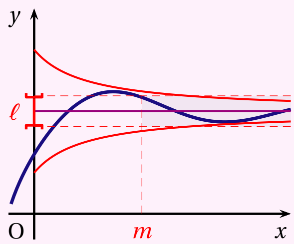
Déterminer $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1$.
Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2 - 1 \leqslant x^2$ d'où pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\sqrt{x^2-1} \leqslant x \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2-1} - 2x + 1}_{f(x)} \leqslant \underbrace{-x+1}_{g(x)}$$

Or $\lim\limits_{x \to \infty} -x+1 = -\infty$ donc d'après le théorème sur les limites par comparaison, $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2-1} - 2x + 1 = -\infty$

THÉORÈME 3 *(Théorème des gendarmes)*

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et ℓ un réel.
Si pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$,
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell$.



EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ et telle que pour tout réel $x > 0$, $3 + \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x^2+x+1}{x^2}$.
Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— Pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 3 + \dfrac{1}{x}$ or $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 3 + \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc d'après le théorème sur les limites par comparaison, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

— Pour tout réel $x > 0$, $3 + \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2}$ or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{x} = 3$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$, donc d'après le théorème sur les limites par encadrement, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

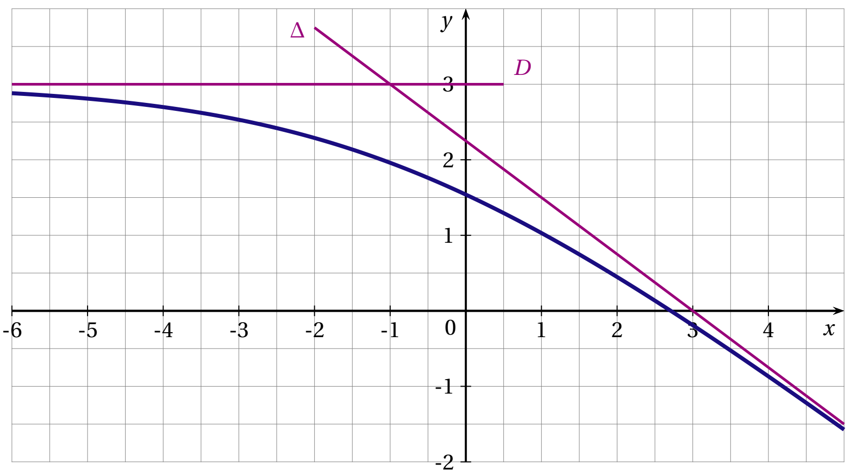
EXERCICE 1

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1-2x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(1-\dfrac{12}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{2x^3-x^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^3}{x^2+x+1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{4-x^2}$	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{2+x}{4-x^2}$	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{2-x}{4-x^2}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3+x^2-2x+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{1-x^2}\right)^2$	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{1-x^2}\right)^2$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x-\sqrt{x}}{2x}$

EXERCICE 2

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous, représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les droites D et Δ sont les asymptotes à la courbe respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.



1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)+\dfrac{3}{4}x$. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

EXERCICE 3

1. Soit $P(x)=x^2+x-6$ et $Q(x)=2x^2-3x-2$ deux polynômes.
   a) Résoudre $P(x)=0$ et $Q(x)=0$.
   b) En déduire une factorisation de $P(x)$ et $Q(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

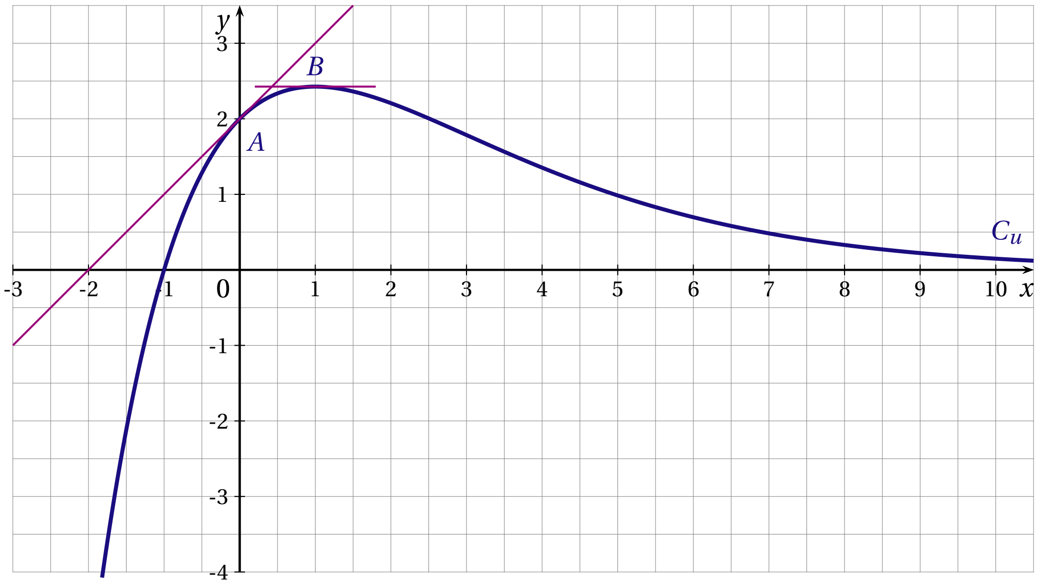
EXERCICE 4

La courbe C_u ci-dessous représente une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des ordonnées au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(-2;0)$;

— la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

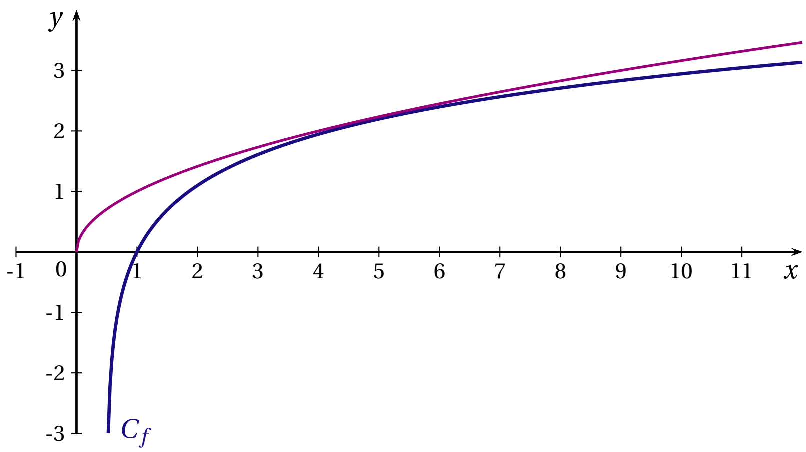
— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_u.



1. À partir du graphique et des renseignements fournis :
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.
   b) Déterminer $u'(0)$ et $u'(1)$.
2. On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.
   a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
   b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = [u(x)]^2$.
   a) Étudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe représentative de la fonction g admet-elle des asymptotes ?
   b) Déterminer $g'(0)$ et $g'(1)$.

EXERCICE 5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et telle que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $f(x) \leqslant \sqrt{x}$.



On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Montrer que si $x \geqslant 1$ alors, $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Que peut-on en déduire sur la limite de g en $+\infty$?

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-13x+7}{4x-2}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{4x-2}$.
   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{2}-3$.
   c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite Δ
   d) Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{4x-2}\leqslant 0{,}001$.
   e) Calculer le plus simplement possible, une valeur approchée au millième près de l'image par f de 500.
3. Calculer la dérivée de la fonction f.
4. Étudier les variations de f.
5. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 7

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
   a) À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
   b) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c) On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
2. Soit g la fonction composée de la fonction f suivie de la fonction carrée, g est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $g(x)=[f(x)]^2$. On note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe C_g.
   b) On note g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.
   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 0.

EXERCICE 8

Afin de de réduire ses coûts de fabrication, un industriel décide d'investir une certaine somme tous les mois dans la maintenance de l'outil de production. Si x est le montant en milliers d'euros que l'industriel investit, le pourcentage de réduction des coûts est modélisé par la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=0{,}3-\dfrac{2x+0{,}1}{(x+1)^3}$.

1. Un investissement de 1100 € est-il suffisant pour réduire les coûts de 5% ?
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) En déduire que l'équation $f(x)=0{,}25$ admet une solution unique.
3. Selon ce modèle, est-il possible de réduire les coûts de 40% ?

4. Quelle somme, arrondie à la centaine d'euros près, faut-il investir pour réduire les coûts d'au moins 25 % ?

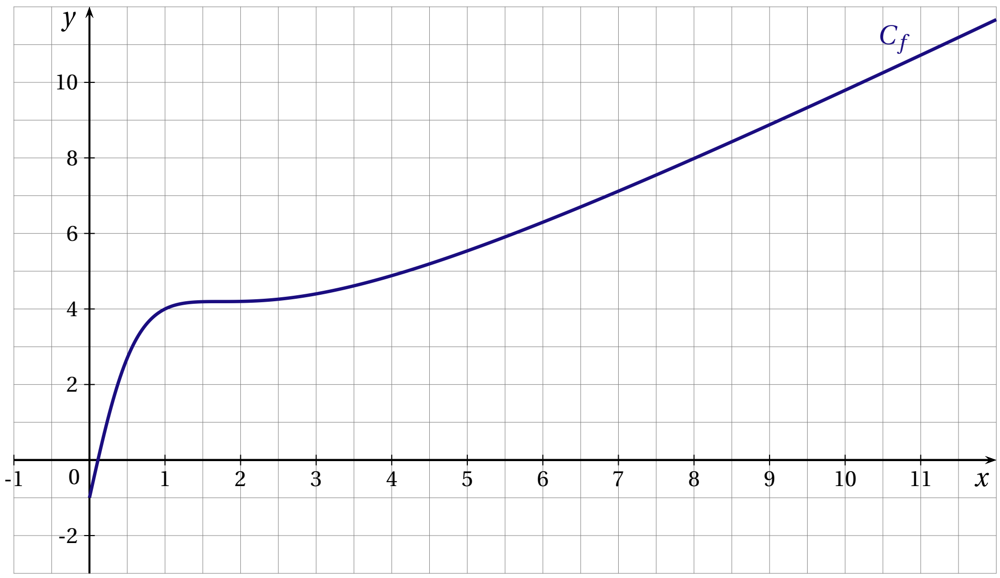
EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^3$

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition. En donner une interprétation graphique.
2. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
   c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 9x - 1}{x^2+1}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.



PARTIE A

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   Tracer la droite Δ
3. Résoudre l'inéquation $\dfrac{8x}{x^2+1} \leqslant 0{,}01$.

PARTIE B

On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Représenter la tangente T sur le graphique.

PARTIE C

1. Montrer que pour tout réel k positif, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.
2. Sans utiliser la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième près du réel x_0, solution de l'équation $f(x) = 1000$.