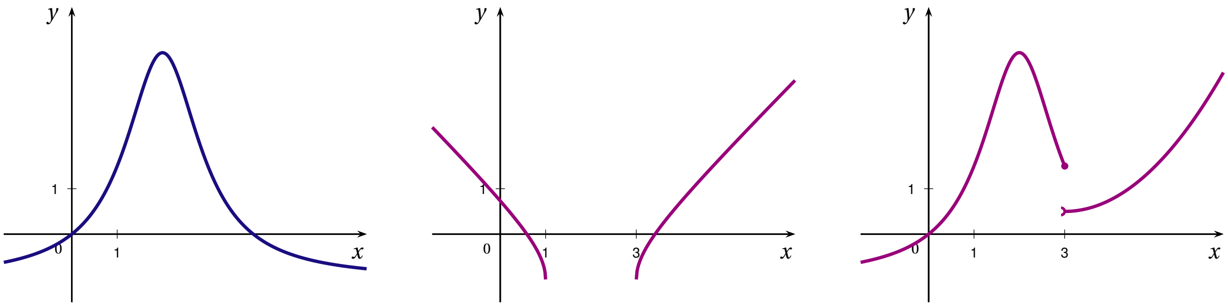
I CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.

1. Dire que f est continue en a signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. Dire que f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout réel appartenant à I.

Graphiquement, une fonction continue est celle dont la courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).



La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

La fonction f n'est pas définie sur $[1;3]$
f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$
mais f n'est pas continue en 3

2 THÉORÈME

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Si f est dérivable en a alors, f est continue en a.

Démonstration

Pour tout réel x appartenant à I, $x \neq a$

$$f(x) - f(a) = (x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \left[(x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right] = \lim_{x \to a} (x-a) \times \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Or si f est dérivable en a alors, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$
donc si f est dérivable en a alors,

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} (x-a) \times f'(a) = 0$$

d'où $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a.

CONSÉQUENCES

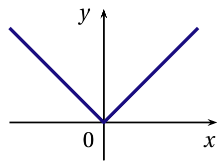
On admettra les deux propriétés suivantes qui se déduisent du théorème précédent :

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur chacun des intervalles sur lesquels elle est définie.

REMARQUE

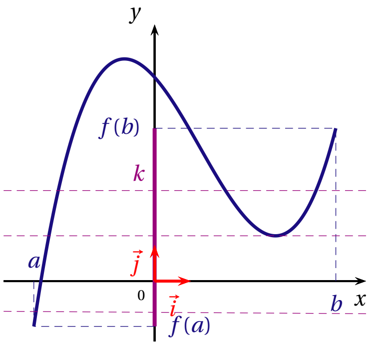
La réciproque du théorème est fausse :

Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.
Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est contine en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

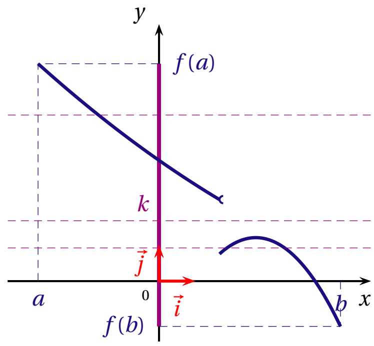


II RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS

1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES



f est continue sur $[a; b]$
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.



f est définie sur $[a; b]$ mais f n'est pas continue sur $[a; b]$
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

THÉORÈME *(admis)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I, $a < b$.
Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit :
Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

2 THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

THÉORÈME

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I, $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique c appartenant à $[a; b]$.

Démonstration

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence

   Par hypothèse, f est continue sur $[a; b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

2. Unicité

   Supposons que l'équation $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2 appartenant à $[a; b]$

   Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$

   Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2) = k$

   Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

REMARQUES

1. Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[a;b]$
2. Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$:
   — si une borne a ou b de l'intervalle est ouverte, alors on remplace l'image $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en cette borne ;
   — si une borne de l'intervalle est $-\infty$ (ou $+\infty$) alors on considère la limite de f en $-\infty$ (ou $+\infty$).

EXERCICE 1

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	‖		2		‖ $+\infty$		
		↗		↘		↘	
	‖ $-\infty$			1 ‖			-1

1. a) La fonction f est-elle continue sur $]-3;+\infty[$?
   b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
   c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
   b) L'équation $f(x)=1$ admet-elle une solution unique ?
3. Parmi les cinq propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ b) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)=+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ e) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=5$
4. On note f' la dérivée de la fonction f. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

   a) L'équation $f'(x)=0$ n'a pas de solution sur $]5;+\infty[$
   b) $f'(-2)\times f'(0)\leqslant 0$
   c) $f'(-2)\times f'(3)\leqslant 0$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, tracer, dans un repère du plan, une courbe pouvant représenter une fonction f définie sur l'intervalle $[-2;3]$ et vérifiant les informations données

1. f est continue et décroissante sur $[-2;3]$, et l'équation $f(x)=1$ admet une infinité de solutions dans $[-2;3]$.
2. f est continue sur $[-2;3]$ n'est pas monotone sur $[-2;3]$, et l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[-2;3]$.
3. f est continue sur $[-2;3]$ avec $f(-2)=3$, $f(3)=-1$ et l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dans $[-2;3]$.
4. f n'est pas continue sur $[-2;3]$ et pour tout réel k compris entre $f(-2)$ et $f(3)$ l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[-2;3]$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3-2x^2+4x+2$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$.
   c) Donner le tableau des variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=7$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[-4;-3]$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie de α au dixième près.

EXERCICE 4

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des trois propositions est exacte, déterminer laquelle.

1. Si f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors, l'équation $f(x)=0$ admet :
   a) Exactement une solution.
   b) Au plus une solution.
   c) Au moins une solution.
2. Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet :
   a) Exactement une solution.
   b) Au plus une solution.
   c) Au moins une solution.
3. Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$ et telle que l'équation $f(x)=0$ admette une solution unique c dans $[a;b]$ alors :
   a) $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
   b) Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f est strictement monotone.
   c) Si la dérivée est de signe constant, alors $f(a)\times f(b)<0$.
4. Soit f une fonction continue sur $I=[-2;3]$ et ne s'annulant pas sur I.
   a) Pour tout réel a appartenant à I, $f(-2)\times f(a)>0$.
   b) On peut avoir $f(-2)+f(3)=0$.
   c) f est dérivable sur I.
5. Soit f une fonction dérivable sur $I=[-2;2]$ et telle que $f(-2)=0$, $f(-1)=1$ et $f(2)=0$.
   a) Il existe un unique réel a appartennant à $[-1;2]$ tel que $f(a)=\dfrac{1}{2}$.
   b) L'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $[-2;2]$.
   c) L'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet au moins deux solutions dans $[-2;2]$.
6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=100x^3-300x^2+299x-99$. Sur l'intervalle $[-1;2]$, l'équation $f(x)=0$ admet :
   a) Exactement une solution.
   b) Exactement deux solutions.
   c) Exactement trois solutions.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{x^2+1}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
2. On admet que $f'(x)\geqslant 0$ équivaut à $x\in[1;+\infty[$
   a) Donner le tableau des variations de la fonction f.
   b) Montrer que l'équation $f(x)=3$, admet une solution unique x_0.
   Donner un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

EXERCICE 6

PARTIE A

1. Soit f la fonction définie sur $[0;20]$ par $f(x) = -x^3 + 9{,}5x^2 + 22x - 6{,}5$.
2. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions a et b dans $[0;20]$
4. Étudier le signe de f sur $[0;20]$

PARTIE B

Une entreprise produit x milliers de pièces, x étant un réel de $[0;20]$. Le coût total de production C, exprimé en milliers d'euros, dépend de x et est donné par l'expression :

$$C(x) = \frac{0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 25x + 10}{x+1}$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe.

1. Le prix de vente d'un article est de 8,50 €. En admettant que toute la production soit vendue, la recette totale exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8{,}5x$.
   a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe Γ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 (*arrondie au millier d'articles près*) pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;20]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) En vous aidant de la partie A, étudiez les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 (*arrondie à l'article près*) pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant arrondi à l'euro près, de ce bénéfice maximal ?
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_T$ au point d'abscisse x_0. La tracer sur le graphique.

ANNEXE