CONTRÔLE N° 5

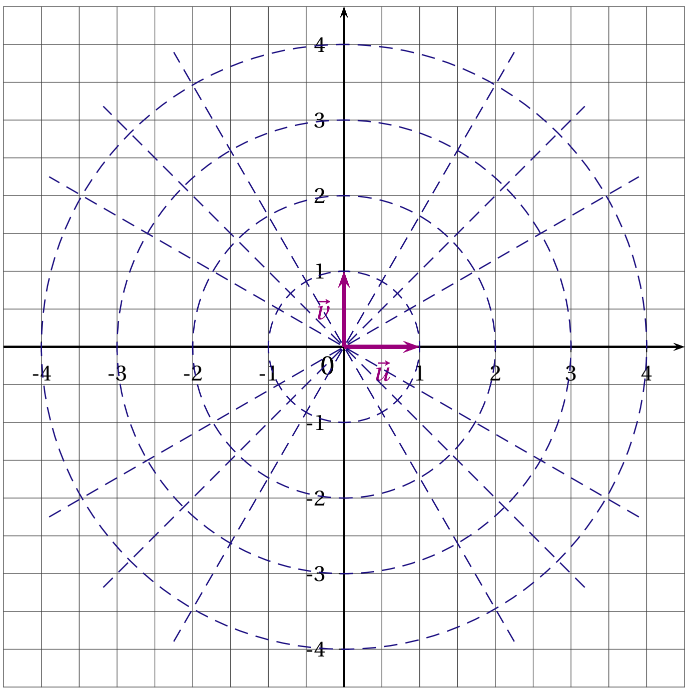
EXERCICE 1

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z = -5 + 5\mathrm{i}$.
2. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
3. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
4. Soit $z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, déterminer le module et un argument du produit $z_1 \times z_2$.
5. Donner la forme algébrique du nombre complexe $Z = \dfrac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}$.
6. Donner la forme algébrique du nombre complexe z de module $2\sqrt{3}$ et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$.
7. Soit $z_1 = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, calculer le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$.
8. On considère le nombre complexe $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   a) Calculer le carré de z.
   b) Calculer l'inverse de z.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue z : $(\sqrt{3} - \mathrm{i})z = -6\mathrm{i}$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
   b) Déterminer la forme exponentielle de z_1.
   c) Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} \times z_1$.
   Déterminer les formes exponentielle et algébrique de z_2.
2. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_B = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_C = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
   c) Déterminer la nature du triangle ABC.



EXERCICE 3

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_{1}^{4} \left(x^2 - 2x + \frac{2}{x} - 1\right)\, \mathrm{d}x.$$

$$B = \int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\, \mathrm{d}x.$$

$$C = \int_{-\ln 2}^{2} \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\, \mathrm{d}x.$$

$$D = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos t - \sin t)\, \mathrm{d}t.$$