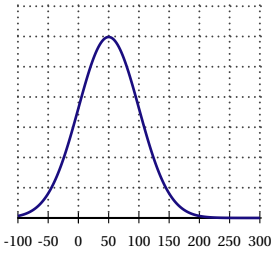
CONTRÔLE N° 10

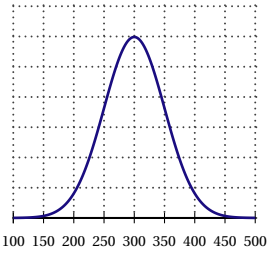
EXERCICE 1 (8 *points*)

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

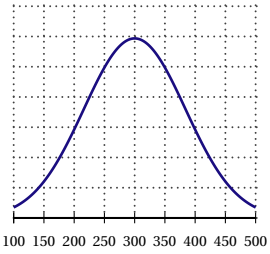
1. Quelle courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 300$ et d'écart-type $\sigma = 50$?



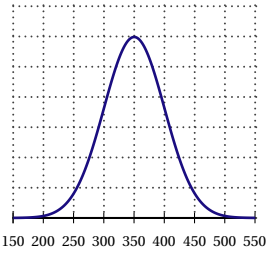
Courbe a



Courbe b



Courbe c



Courbe d

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.
La probabilité $P(X \leqslant 50)$ est égale à :

a) $1 - \mathrm{e}^2$ b) $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ c) $1 - \mathrm{e}^{-0{,}04}$ d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-50}}{0{,}04}$

3. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ est :

a) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ b) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ c) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ d) $-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(2x+1) \leqslant 1$ est l'intervalle

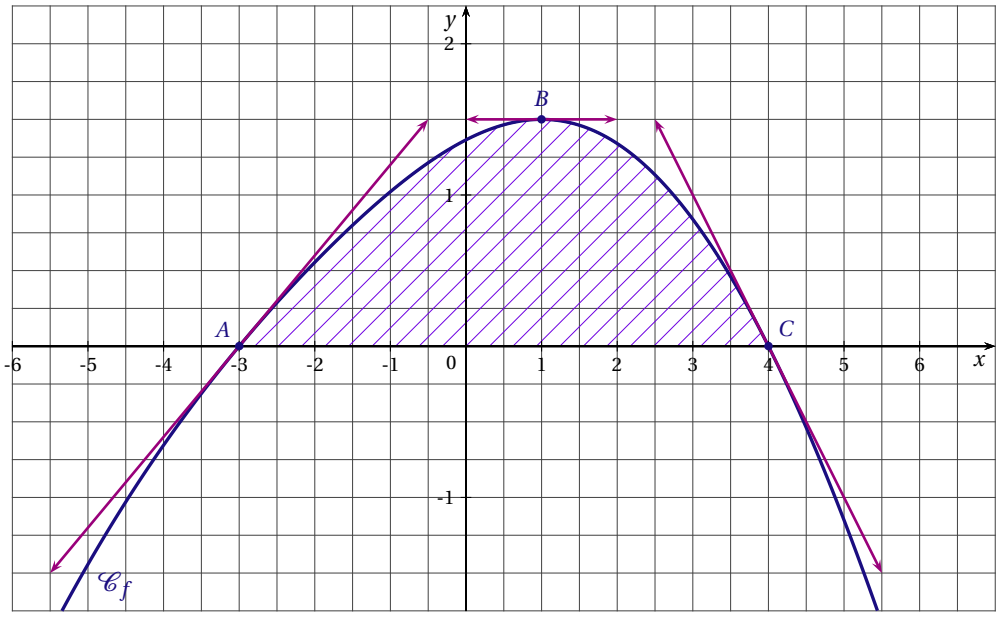
a) $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$ b) $\left[\dfrac{1-\mathrm{e}}{2};-\dfrac{1}{2};\right[$ c) $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right]$ d) $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\right]$

5. L'équation différentielle $4y'' + y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :

a) $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $f(x) = 4\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{4}\right)$ d) $f(x) = \dfrac{1}{4}[\cos(2x) + \sin(2x)]$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points $A(-3;0)$, $B\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ et $C(4;0)$.



6. On note f' la dérivée de la fonction f :
   a) $f'(-3) = 0$ b) $f'(-3) = 2{,}4$ c) $f'(4) = -2$ d) $f'(4) = -1$

7. On note F la primitive de la fonction f telle que $F(0) = 0$:
   a) $F(-3) = F(4)$ b) $F(1) \geqslant F(4)$ c) $F(4) > 0$ d) $F(4) < 0$

8. On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré :
   a) $\mathscr{A} = \displaystyle\int_4^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x$ b) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 7{,}5$ c) $13 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$ d) $\mathscr{A} = F(-3) + F(4)$

EXERCICE 2 (*D'après sujet BTS*) (12 *points*)

Une entreprise réalise par moulage des hélices de mini-drones dans un nouveau matériau plastique. La fabrication s'effectue en deux temps :

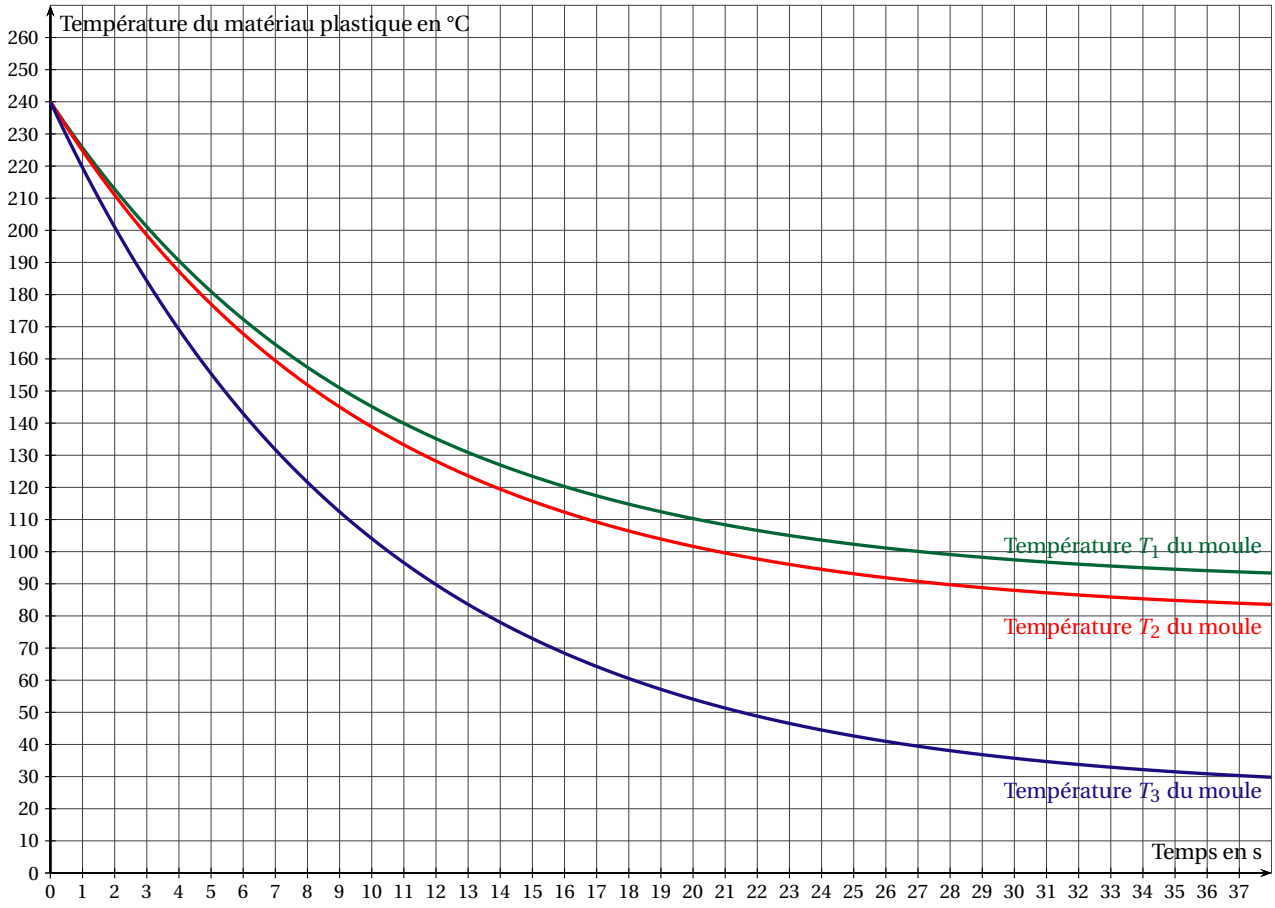
Phase 1 : injection sous pression de la matière fondue à une température initiale de 240°C et maintien sous pression de la matière pendant les 3 premières secondes du refroidissement.

Phase 2 : poursuite du refroidissement et éjection de l'hélice.

À l'issue de ces deux étapes le moule est refermé et une nouvelle hélice est introduite.
Pour être utilisable, on estime que le matériau plastique ne doit pas avoir perdu plus de 20 % de sa température initiale lors des 3 premières secondes du refroidissement.
Lors de la fabrication, afin de maîtriser le refroidissement de l'hélice, on étudie la température T à laquelle le moule doit être maintenu. En effet, pour garantir un remplissage homogène du moule, le matériau plastique ne doit pas refroidir trop vite lors de son injection dans le moule.

PARTIE 1

Des séries de mesures ont permis de réaliser trois courbes de refroidissement. Elles représentent l'évolution de la température du matériau plastique (exprimée en degrés Celsius) en fonction du temps (exprimé en secondes), pour trois valeurs différentes de la température du moule, T_1, T_2 et T_3.



1. Les trois températures satisfont-elles aux conditions souhaitées de fabrication d'une hélice ?
   Détailler la réponse.
2. On estime de plus que le matériau a suffisamment durci et que l'hélice peut être éjectée sans risque de déformation lorsque sa température atteint les 100 degrés.
   Parmi les températures qui satisfont aux conditions de fabrication, quelle est la température du moule qui permet de fabriquer le plus d'hélices dans un temps donné ? Expliquer.

PARTIE 2

On décide de maintenir le moule à une température de 80°C. On s'intéresse à la fonction donnant la température du matériau plastique (exprimée en degrés) en fonction du temps (exprimé en secondes).
On admet que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}1y = 8$.
Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la fonction f définie sur $[0;+\infty[$, solution particulière de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition initiale de température $f(0) = 240$.

PARTIE 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t) = 160\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 80$.
Cette fonction f donne la température de l'hélice (en degrés) en fonction du temps t (en secondes) lorsque le moule est maintenu à une température de 80°C.

1. a) Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f.
   b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Interpréter ce résultat dans le contexte du problème.
2. a) Résoudre l'équation $f(t) = 100$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} de la ou des solutions éventuelles.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte du problème.
3. On souhaite de plus que la température moyenne du matériau plastique, durant la première phase de fabrication, c'est-à-dire durant les trois premières secondes, ne soit pas inférieure à 210°C.
   a) Montrer que la fonction F définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $F(t) = 80t - 1600\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ est une primitive de la fonction f.
   b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est : $\dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   c) La fonction f satisfait-elle la contrainte sur la température moyenne ?