EXERCICE 1

(3 *points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

1. Pour tous nombres réels a et b, $\cos(a-b) = \cdots$

   a) $\cos a \sin b + \sin a \cos b$ b) $\cos a \sin b - \sin a \cos b$
   c) $\cos a \cos b + \sin a \sin b$ d) $\cos a \cos b - \sin a \sin b$

2. Pour tout nombre réel a, $\cos(2a) = \cdots$

   a) $\cos^2 a - \sin^2 a$ b) $1 - \sin^2 a$ c) $\cos^2 a + \sin^2 a$ d) $\cos^2 a - 1$

3. Pour tout nombre réel a, $\sin^2 a = \cdots$

   a) $\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ b) $\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ c) $\dfrac{1-\sin 2a}{2}$ d) $\dfrac{1+\sin 2a}{2}$

4. La tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(2x)$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

   a) $y = 2x+1$ b) $y = 2x-1$ c) $y = -2x+1$ d) $y = -2x-1$

5. La dérivée de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ est la fonction f' définie par :

   a) $f'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $f'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$
   c) $f'(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ d) $f'(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

6. On pose $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} \sin(0{,}5x)\,\mathrm{d}x$

   a) $I = -2$ b) $I = \dfrac{1}{2}$ c) $I = \dfrac{3\pi}{2}$ d) $I = 2$

EXERCICE 2

(4 *points*)

Un véhicule hybride est équipé d'une batterie Li-ion dont la capacité d'énergie massique est de 180 Wh/kg.
La vie de cette batterie a été reconstituée en laboratoire en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer sa durée de vie en fonction de différents facteurs et partant du principe que la batterie est jugée « inutilisable » dès lors qu'elle perd plus de 20 % de sa capacité d'énergie massique.
Les résultats obtenus ont permis d'établir que la capacité d'énergie massique de la batterie diminue de 1,4 % par an.
Pour tout entier naturel n, on note C_n la capacité d'énergie massique en Wh/kg de la batterie au bout de n années.
On a donc $C_0 = 180$.

1. a) Calculer C_1. Interpréter le résultat.
   b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
   c) Justifier que $C_n = 180 \times 0{,}986^n$.
2. On cherche à déterminer à l'aide d'un algorithme au bout de combien d'années, cette batterie devient « inutilisable ».

   On propose l'algorithme suivant :

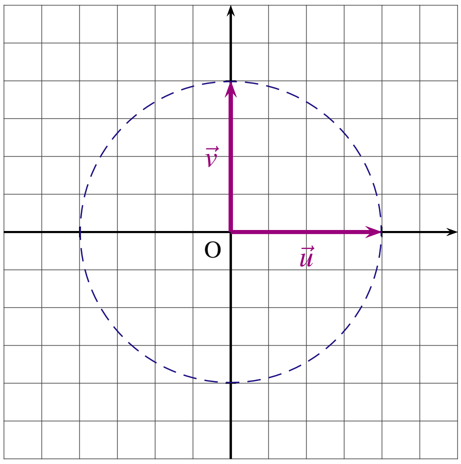
   ```
   VARIABLES
      N : nombre entier naturel
      C : nombre réel
   INITIALISATION
      N prend la valeur 0
      C prend la valeur 180
   TRAITEMENT
      Tant que ...
         N prend la valeur ...
         C prend la valeur ...
      Fin Tant que
   SORTIE
      Afficher n
   ```

   Recopier et compléter la partie relative au traitement.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $180 \times 0{,}986^x \geqslant 144$.
   b) En déduire au bout de combien d'années, cette batterie devient « inutilisable ».

EXERCICE 3 (4 *points*)

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
2. Démontrer les égalités suivantes :
   a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   b) $\mathrm{j} + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}^3 = 0$.
3. a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives j , j^2 et j^3 dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.



EXERCICE 4 (4 *points*)

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près

Un produit est conditionné en paquets dont la masse théorique est de 250 grammes.

PARTIE A

La machine en charge du remplissage automatique des paquets est régulièrement calibrée.
On considère que la durée T de fonctionnement, exprimée en heures, entre deux calibrages, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.

1. Calculer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer $P(T \geqslant 200)$.

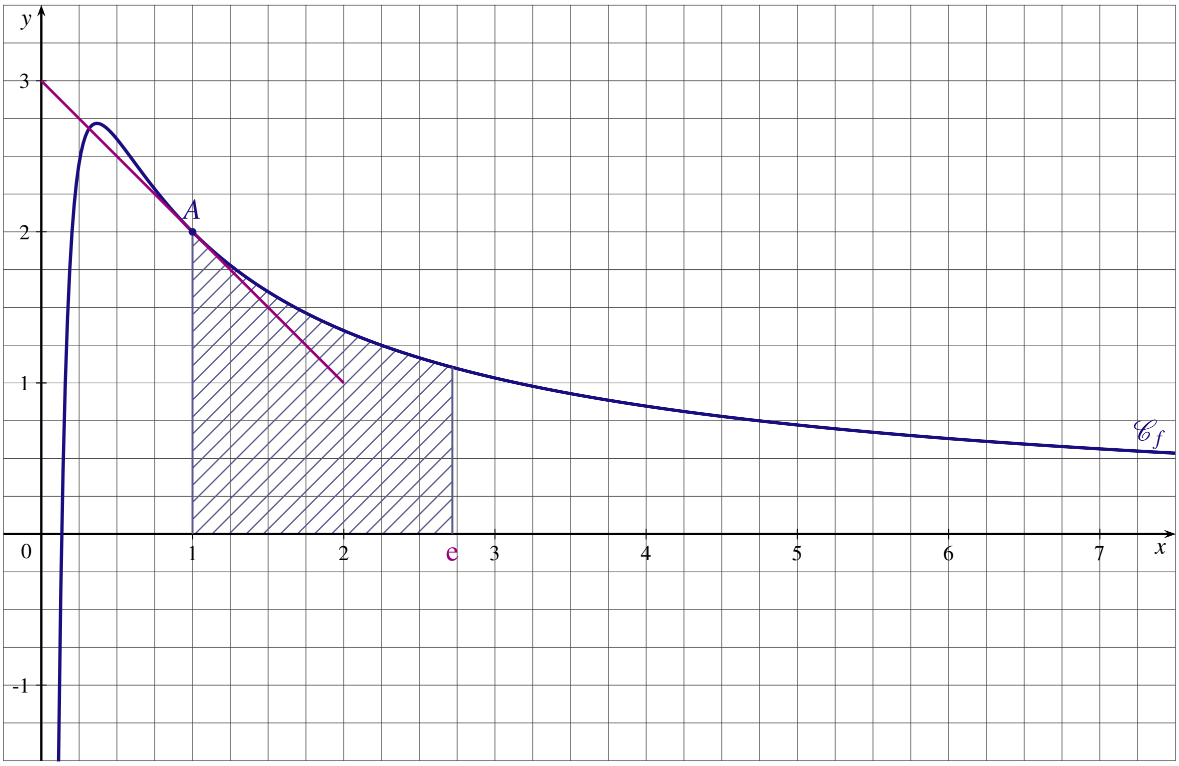
PARTIE B

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque paquet pris au hasard, associe sa masse exprimée en grammes.
On considère que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 2{,}7$.

1. Calculer la probabilité $P(245 \leqslant X \leqslant 260)$.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette tout paquet dont la masse est inférieure à 245 grammes.
   Quelle est la probabilité qu'un paquet pris au hasard ne soit pas conforme ?

EXERCICE 5 (5 *points*)

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}$.
Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé. (*Unités graphiques* : 2cm)



1. a) Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes ?
2. a) On note f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
4. Soient g et G les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ et $G(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}$.
   Montrer que G est une primitive de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
5. a) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.
   b) En déduire l'aire en cm^2 du domaine hachuré sur le graphique.