EXERCICE 1

On s'intéresse à la durée d'attente auprès du standard téléphonique d'un service après vente.
On note T la variable aléatoire qui à un appel pris au hasard associe la durée de l'attente, exprimé en secondes. On admet que T, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20;120]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la la loi de T.
2. Quelle est la probabilité que la durée d'attente auprès du standard téléphonique soit comprise entre vingt et trente secondes?
3. Quelle est la probabilité que la durée d'attente auprès du standard téléphonique soit supérieure à plus d'une minute?
4. Préciser la durée moyenne d'attente auprès du standard téléphonique du service après vente.

EXERCICE 2

L'iode 131 est un produit radioactif qui se désintègre spontanément.
Le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans tout échantillon à la date t, exprimée en heures, est modélisé par une fonction N solution de l'équation différentielle :

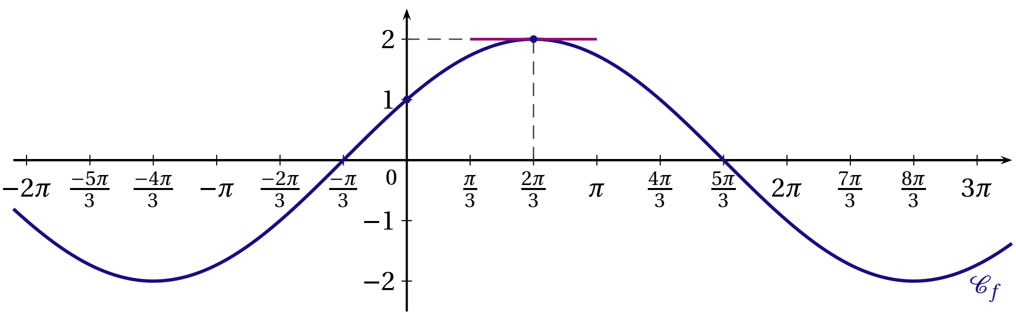
$$(E) \quad N' + 3564 \times 10^{-6} \times N = 0$$

On dispose d'un échantillon contenant 4×10^{12} noyaux d'iode 131.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière $N(t)$ définie par la condition initiale $N(0) = 4 \times 10^{12}$.
   b) Calculer, à 0,1 jour près, le nombre de jours n au bout duquel le nombre de noyaux d'iode 131 encore présents dans l'échantillon aura diminué de moitié.
2. La variable aléatoire X égale à la durée de vie en jours d'un atome d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0855$.
   a) Calculer $P(X > 14)$.
   b) La demi-vie d'une substance radioactive est la durée t nécessaire pour que, statistiquement, la moitié des noyaux radioactifs présents se désintègrent (c'est à dire la durée t telle que $P(X < t) = 0{,}5$).
   Calculer à 0,1 jour près la demi-vie de l'iode 131.

EXERCICE 3

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x.
2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



   a) Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
   b) Montrer que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 4

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des batteries Lithium-ion pour smartphone.

PARTIE A

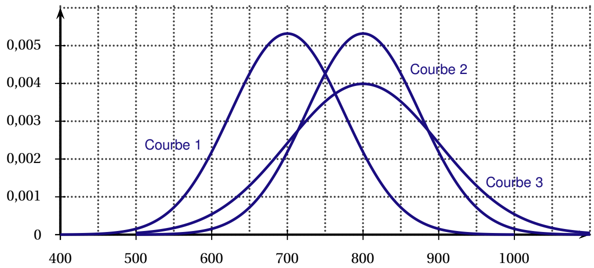
Le contrôle de qualité mis en place a permis d'établir que sur l'ensemble de la production 3% des batteries sont défectueuses.
On prélève au hasard un échantillon de 20 batteries dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à des tirages successifs avec remise.
Soit Y la variable aléatoire qui à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de batteries défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que dans un échantillon de 20 batteries, il y a au moins une batterie défectueuse ?
3. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que dans un échantillon de 20 batteries, il y a au plus une batterie défectueuse ?

PARTIE B

Le nombre de cycles de charge d'une batterie est appelé durée de vie de la batterie.
La durée de vie des batteries Lithium-ion mises en vente par cette entreprise est modélisée par la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 75$.

1. Déterminer $P(750 \leqslant X \leqslant 850)$ en donnant le résultat arrondi au millième.
2. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 75$? Justifier le choix.



3. Quelle est la probabilité, arrondie au millième près, que la durée de vie d'une batterie soit supérieure à 900 cycles de charge ?
4. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}15$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE C

Le service commercial affirme que 90 % des batteries proposées à la vente ont une durée de vie supérieure à 700 cycles de charge.
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire indépendant a reconstitué la vie de 60 batteries en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer leur durée de vie en fonction de différents facteurs.
Sur ce lot, on a constaté que seulement 51 batteries ont eu une durée de vie supérieure à 700 cycles de charge.

Le résultat de ce test remet-il en question l'affirmation du service commercial ?