

EXERCICE 1

(D'après sujet BTS 2017)

Une entreprise fabrique par moulage des paraboles pour réception satellitaire en matériau composite. Ce matériau est disposé dans un moule à une température de 140° C (degrés Celsius), puis pressé.

On pose $t = 0$ à l'instant où la parabole est retirée du moule. Elle a alors une température de 140 ° C.

On la dépose à l'air libre à la température ambiante de 20° C afin qu'elle refroidisse.

On note $f(t)$ la température de la parabole, en degrés Celsius à l'instant t , exprimée en secondes.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ d'expression $f(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0,004y = 0,08$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. On rappelle que $f(0) = 140$. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.

PARTIE B : Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que $f(t) = 120e^{-0,004t} + 20$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Au cours du refroidissement, il arrive que la parabole doive subir des rectifications et des contrôles. Ceux-ci ne peuvent être effectués que lorsque la température de la parabole est inférieure à 30 ° C.
Quel est le temps nécessaire pour atteindre une température inférieure à 30 ° C?

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x .
2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$.
3. Montrer que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Résoudre sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation $f(x) = 1$.