La notion intuitive de limite permet de mettre en évidence le comportement d'une fonction dans les cas suivants :

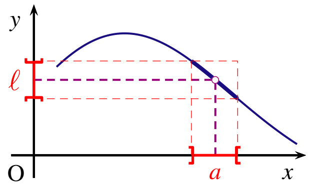
— Que se passe-t-il lorsque la variable $x$ est proche d'une valeur $a$, sans pour cela l'atteindre ?

— Que se passe-t-il lorsque la variable $x$ s'éloigne infiniment de 0 (limites en $+\infty$ ou en $-\infty$) ?

# I NOTION DE LIMITE

## 1 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

Soit $f$ une fonction définie au « voisinage » d'un réel $a$.
Dire que la fonction $f$ a pour limite le réel $\ell$ en $a$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$.
On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$




## 2 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

### DÉFINITIONS

Soit $f$ une fonction définie au « voisinage » d'un réel $a$ à droite de $a$ (resp. à gauche de $a$).
Dire que la fonction $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $a$ avec $x > a$ (resp. avec $x < a$) signifie que tout intervalle $]M;+\infty[$, où $M$ est un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$ avec $x > a$ (resp. avec $x < a$).
On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$)

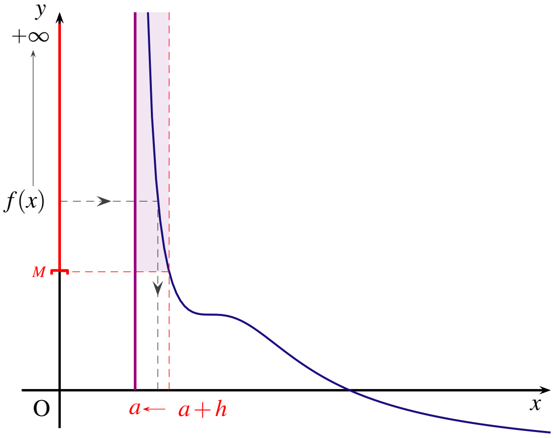
On a des définitions analogues lorsque la limite de $f$ en $a$ est $-\infty$

Soit $f$ une fonction définie au « voisinage » d'un réel $a$ à droite de $a$ (resp. à gauche de $a$).
Dire que la fonction $f$ tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $a$ avec $x > a$ (resp. avec $x < a$) signifie que tout intervalle $]-\infty;M[$, où $M$ est un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$ avec $x > a$ (resp. avec $x < a$).
On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$)

### INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : ASYMPTOTE VERTICALE

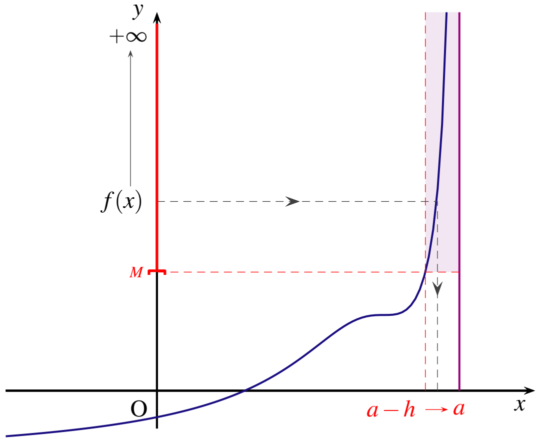
Dans un repère orthogonal du plan, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, on dit alors, que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$.

Limite « à droite de $a$ »



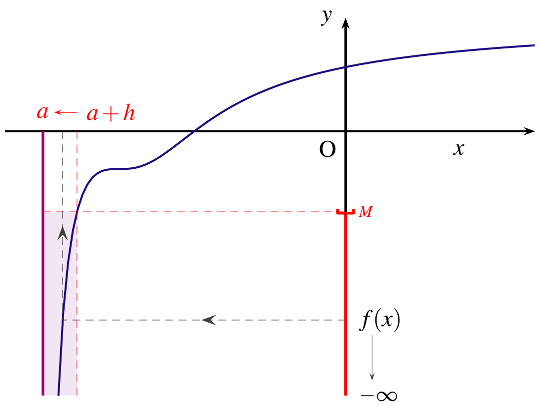

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

Limite « à gauche de $a$ »

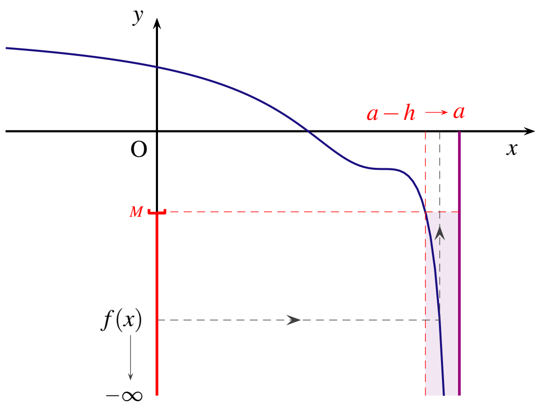



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$

Pour tout entier naturel $k$, $f(x) \geqslant 10^k$ à condition de choisir $x$ suffisamment proche de $a$.




$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$




$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$$

Pour tout entier naturel $k$, $f(x) \leqslant -10^k$ à condition de choisir $x$ suffisamment proche de $a$.

## 3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN L'INFINI

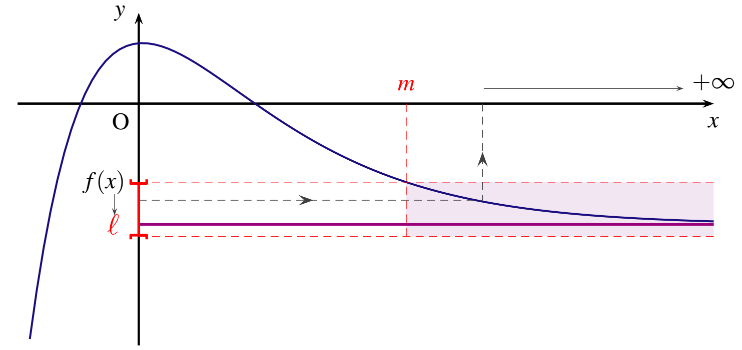
### DÉFINITION

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ ou $]-\infty:A]$, où $A$ est un réel.

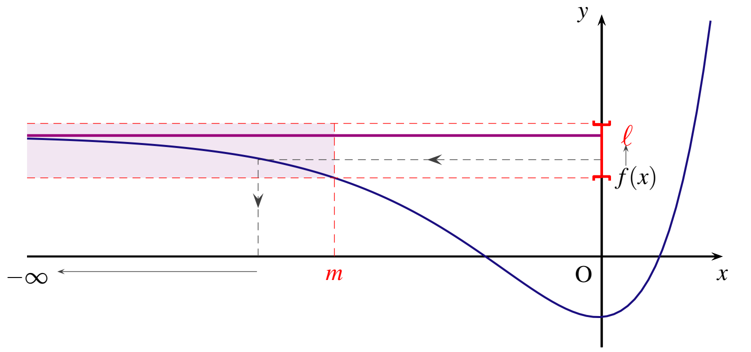
1. Dire que la fonction $f$ a pour limite le réel $\ell$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand.
   On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
2. Dire que la fonction $f$ a pour limite le réel $\ell$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x < 0$ suffisamment éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

### INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : ASYMPTOTE HORIZONTALE

Dans un repère orthogonal du plan, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), on dit alors, que la droite d'équation $y=\ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction $f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).




$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ : $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $\ell$ à condition de choisir $x>m$




$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ : $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de $\ell$ à condition de choisir $x<m$

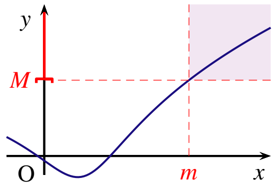
### REMARQUE

Pour déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction $f$ par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y=\ell$, il suffit d'étudier le signe de $f(x)-\ell$

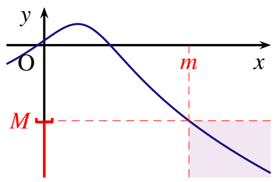
## 4 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN L'INFINI

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où $A$ est un réel.

1. Dire que la fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand.
   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

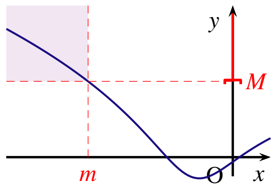



2. Dire que la fonction $f$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;M[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand.
   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

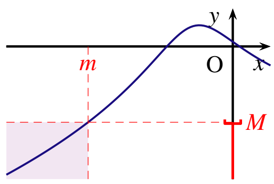



Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$, où $A$ est un réel.

1. Dire que la fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x<0$ suffisamment éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

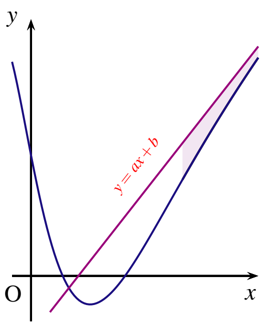



2. Dire que la fonction $f$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;M[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x<0$ suffisamment éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

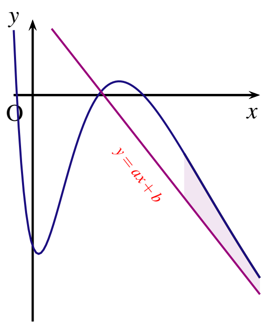



### ASYMPTOTE OBLIQUE

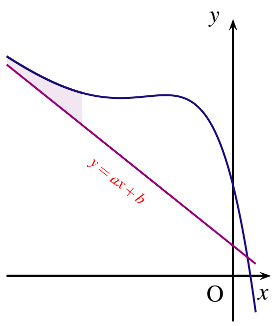
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y=ax+b$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction $f$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$).



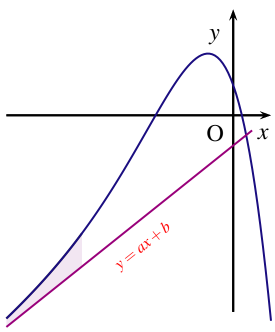

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$




$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$




$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



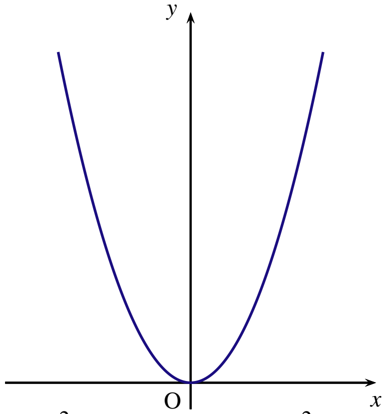

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

### REMARQUE

Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction $f$ par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax+b$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$

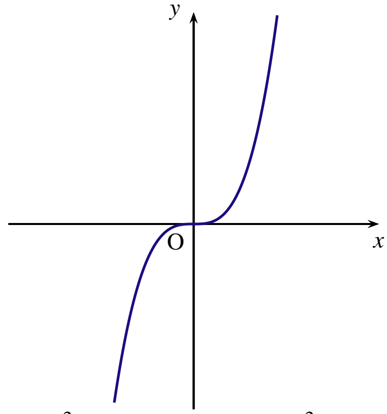
## II LIMITES DE FONCTIONS USUELLES

**FONCTION CARRÉ**



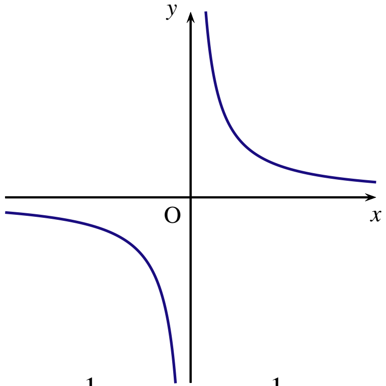

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

**FONCTION CUBE**




$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

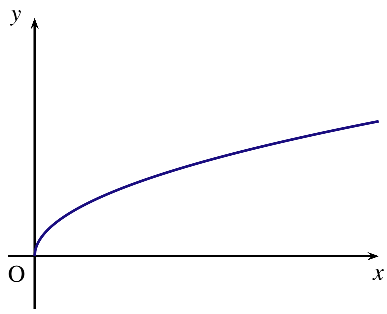
**FONCTION INVERSE**




$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

**FONCTION RACINE CARRÉE**




$\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

## III RÈGLES OPÉRATOIRES SUR LES LIMITES

Dans tout ce paragraphe, $u$ et $v$ désignent deux fonctions, $\ell$ et $\ell'$ désignent deux nombres réels, et $\alpha$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un nombre réel.

### 1 LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors par somme $\lim\limits_{x\to\alpha} (u+v)(x) =$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | À ÉTUDIER |

EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x}$.

Étudions les limites de la fonction $f$ aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction $f$ admet pour asymtote l'axe des ordonnées.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

## 2 LIMITE D'UN PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$ | $\ell$ | $\ell \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
| et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$ | $\ell'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors par produit $\lim\limits_{x\to\alpha} (u\times v)(x) =$ | $\ell\times\ell'$ | $\pm\infty^*$ | $\pm\infty^*$ | À ÉTUDIER |

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2\times\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.

Étudions les limites de la fonction $f$ aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}-1=+\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $0\times\infty$ ».

Or pour tout réel $x$ non nul, $x^2\times\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=x-x^2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-x^2=0$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-1=-1$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

## 3 LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$ | $\ell$ | $\ell\neq 0$ | $\ell$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$ | $\ell'\neq 0$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $\ell'$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors par quotient $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{u}{v}\right)(x)=$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $\pm\infty^*$ | $0$ | $\pm\infty^*$ | À ÉTUDIER | À ÉTUDIER |

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Étudions les limites de la fonction $f$ aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{x\to 1} x^3-1=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2-1=0$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

Or pour tout réel $x\neq 1$,

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$, nous pouvons conclure que, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3}{2}$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Or pour pour tout réel $x\neq 0$,

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{1-\dfrac{1}{x^2}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x^2}=1$, il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

La courbe représentative de la fonction $f$ admet pour asymptote l'axe des abscisses en $+\infty$.

## 4 LIMITE DE LA FONCTION COMPOSÉE $u^n$

Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. $u^n$ est la fonction composée de $u$ suivie de la fonction $X \mapsto X^n$.
$\alpha$, $b$ et $c$ désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to\alpha} u(x) = b \text{ et } \lim_{X^n \to b} = c, \text{ alors } \lim_{x\to\alpha} u^n(x) = c$$

EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \left(\dfrac{2}{1-x}\right)^2$. Déterminons les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2}{1-x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} X^2 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{2}{1-x}\right)^2 = +\infty$

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to 0} X^2 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{1-x}\right)^2 = 0$

## 5 FONCTIONS POLYNÔMES OU RATIONNELLES AU VOISINAGE DE $+\infty$ OU DE $-\infty$

### RÈGLE 1

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme à la même limite que son monôme de plus haut degré.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^3 - 2x^2 + x - 5 = \lim_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$$

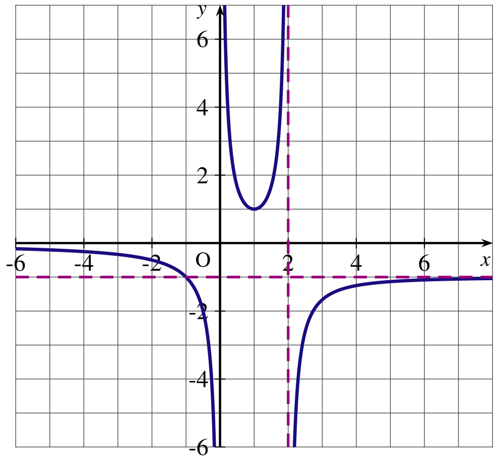
### RÈGLE 2

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle à la même limite que le quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 2x^3}{3x^4 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{3x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{3x} = 0$$

## EXERCICE 1




La courbe ci-contre, représentative d'une fonction $f$, admet les quatre asymptotes suivantes :

— deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y=-1$ et $y=0$ ;

— deux asymptotes verticales d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

## EXERCICE 2

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$ . On note $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.
2. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) La courbe $C_f$ admet-elle des asymptotes ?
3. On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$.

   a) Calculer $f'(x)$.

   b) Étudier les variations de $f$.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1.

## EXERCICE 3

1. Soit $P(x)=x^2+x-6$ et $Q(x)=2x^2-3x-2$ deux polynômes.

   a) Résoudre $P(x)=0$ et $Q(x)=0$.

   b) En déduire une factorisation de $P(x)$ et $Q(x)$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

   a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) La courbe représentative de la fonction $f$ admet-elle des asymptotes ?

## EXERCICE 4

Soit $f$ la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-13x+7}{4x-2}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe $C_f$ ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   a) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{4x-2}$.

   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite $\Delta$ d'équation $y=\dfrac{x}{2}-3$.

c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\Delta$

d) Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{4x-2} \leqslant 0{,}001$.

e) Calculer le plus simplement possible, une valeur approchée au millième près de l'image par $f$ de 500.

3. Calculer la dérivée de la fonction $f$.
4. Étudier les variations de $f$.
5. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1.

## EXERCICE 5

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. On note $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.
2. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) La courbe $C_f$ admet-elle des asymptotes ?
3. On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$.

   a) Calculer $f'(x)$.

   b) Étudier les variations de $f$.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0.

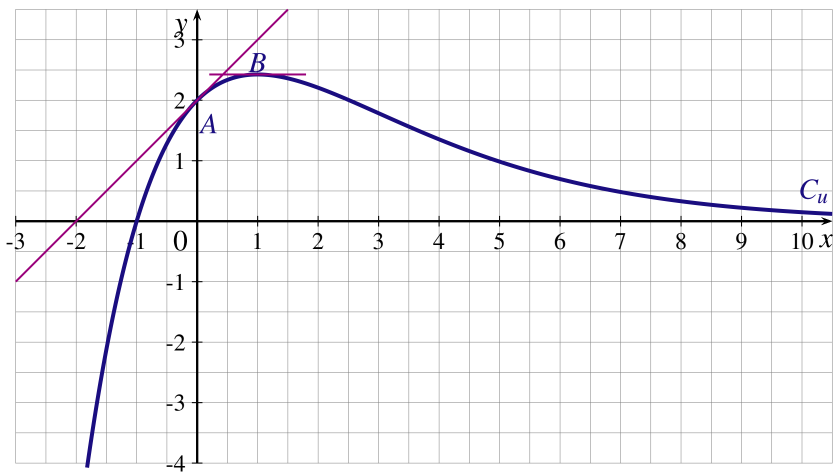
## EXERCICE 6

La courbe $C_u$ ci-dessous représente une fonction $u$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des ordonnées au point $A$ et la tangente à la courbe au point $A$ passe par le point de coordonnées $(-2;0)$ ;

— la courbe admet au point $B$ d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $C_u$.




1. À partir du graphique et des renseignements fournis :

   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

   b) Déterminer $u'(0)$ et $u'(1)$.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

   a) Étudier les limites de la fonction $f$ aux bornes de son intervalle de définition. La courbe représentative de la fonction $f$ admet-elle des asymptotes ?

   b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.