I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 5 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1% par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $$C_{n+1} = \left(1+\frac{1}{100}\right)\times C_n = 1{,}01\times C_n$$
   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 5000$ et de raison $q = 1{,}01$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2012+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = \left(1-\frac{4}{100}\right)\times r_n = 0{,}96\times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0\times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000\times 0{,}96^{10}\approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 PROPRIÉTÉ 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

4 MONOTONIE

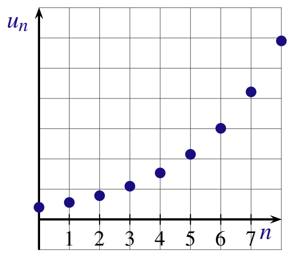
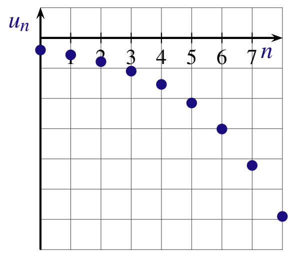
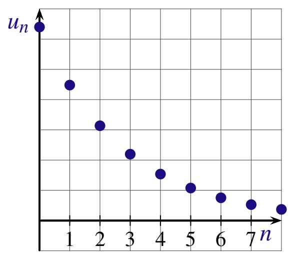
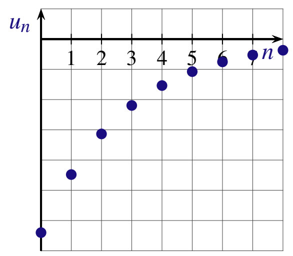
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

— Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n).

— Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n).

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme } \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 LIMITE INFINIE

DÉFINITION

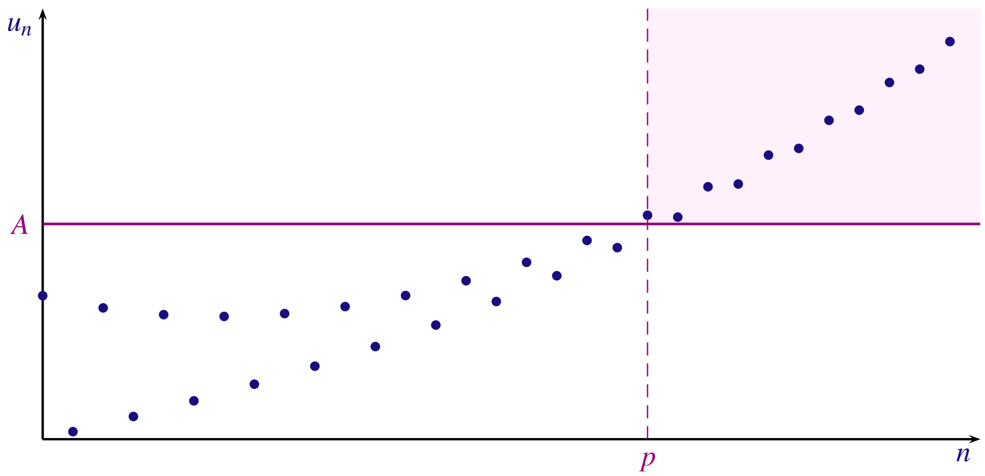
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2 LIMITE FINIE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. On écrit :

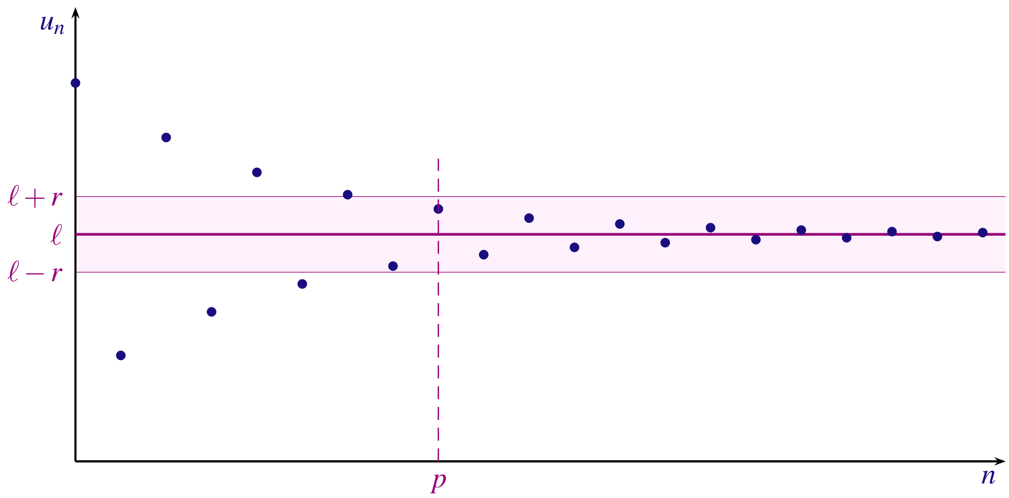
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME *(admis)*

Soit q un réel strictement positif :

— Si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n est constante et sa limite est 1.

— Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q strictement positive.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0.

— Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,01 et de premier terme $u_0 = 5000$
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 7 500.
C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $5000 \times 1{,}01^n \geqslant 7500$

```
INITIALISATION :
U = 5000 ;
N = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE U < 7500 FAIRE
    N prend la valeur N + 1 ;
    U prend la valeur 1,01 × U ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher N
```

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 5000 → U	5000 → U ↲
: 0 → N	0 → N ↲
: While U < 7500	While U < 7500 ↲
: N + 1 → N	N + 1 → N ↲
: 1.01*U → U	1.01*U → U ↲
: End	WhileEnd ↲
: Disp U	N

La calculatrice affiche 41. Donc pour tout entier $n \geqslant 41$, on a $5000 \times 1{,}01^n \geqslant 7500$.

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n$.

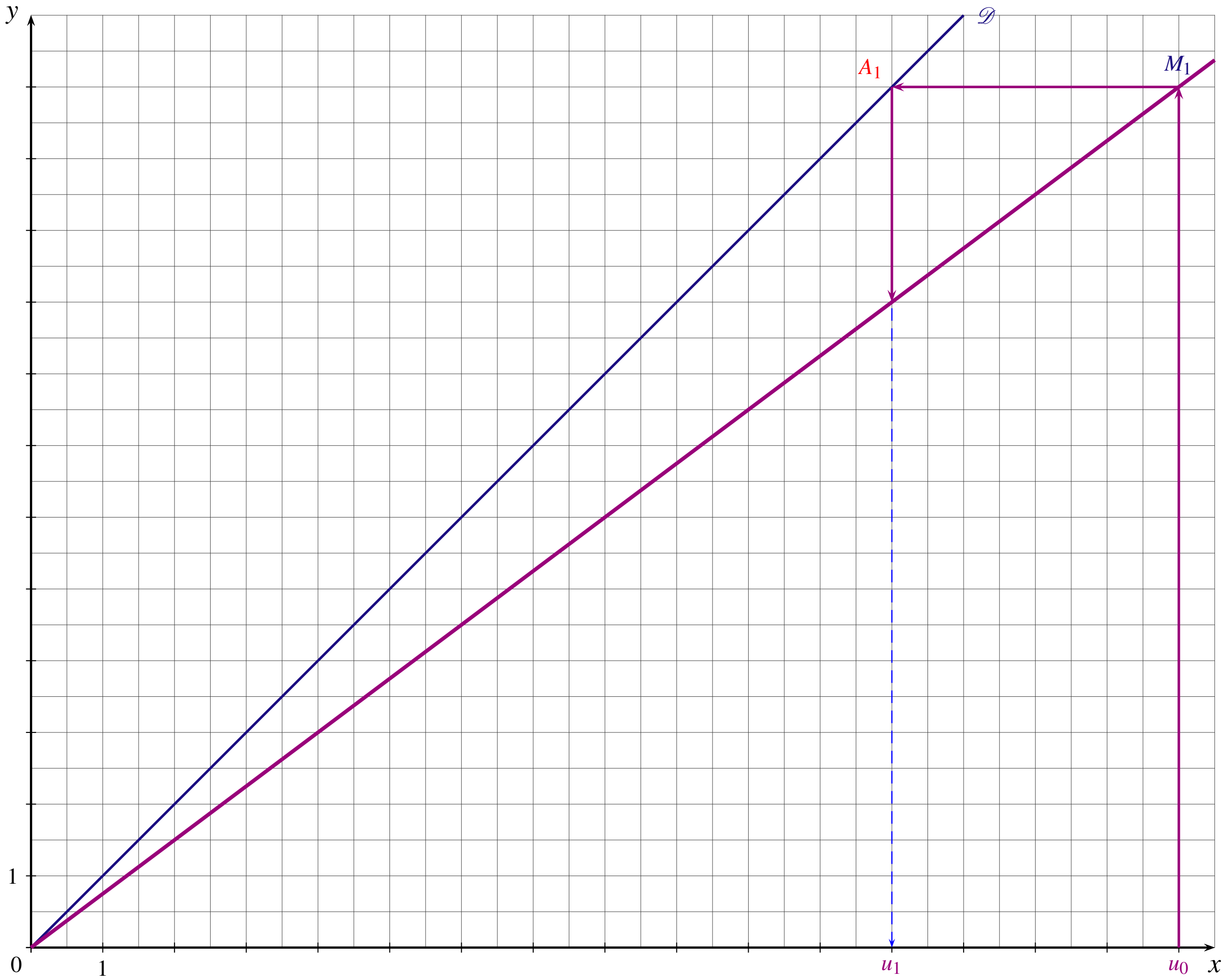
1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

   d) On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n. Calculer S_4.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}75x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



   a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \cdots, u_{11}$.

   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$.
4. Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$. Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

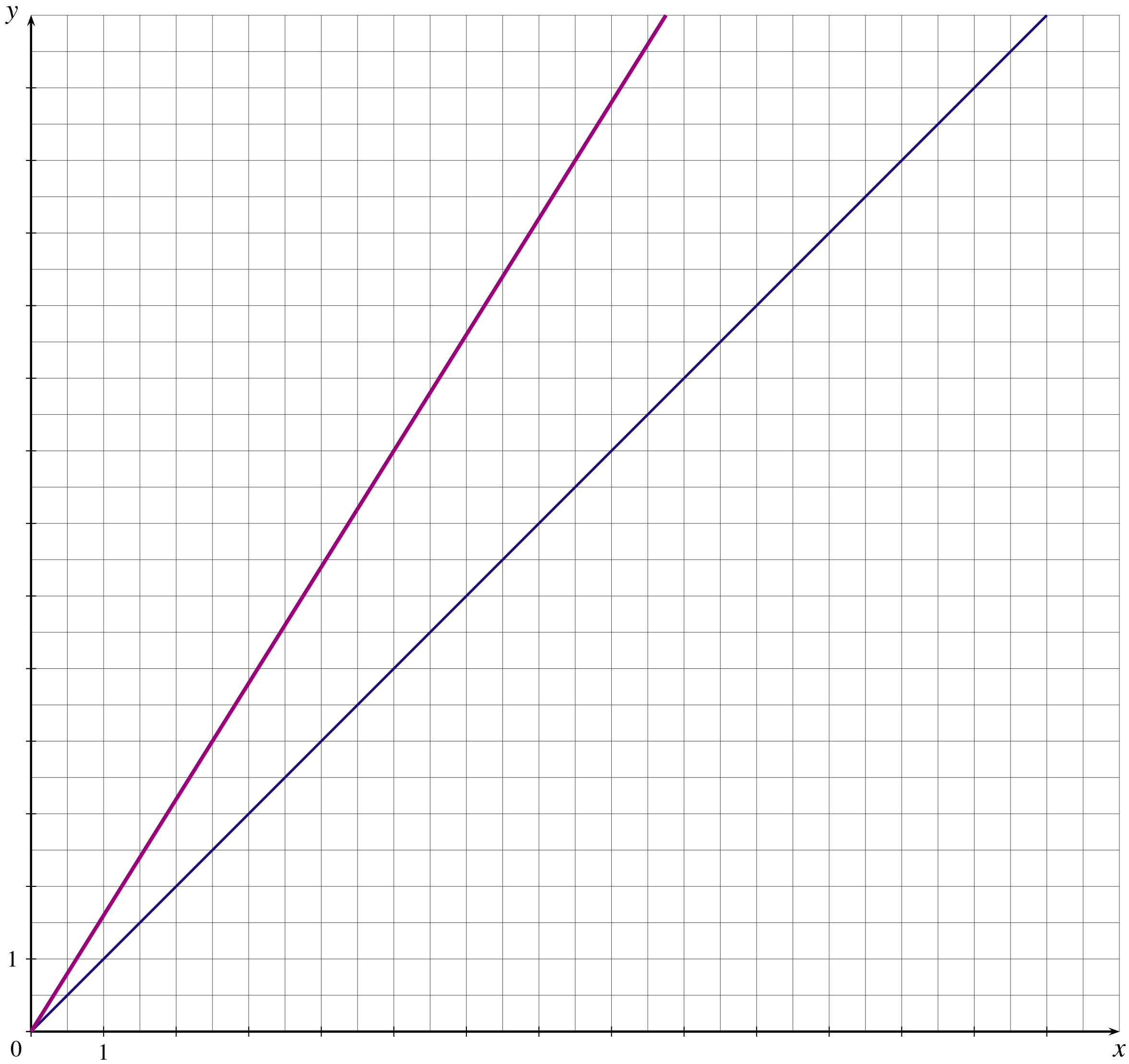
EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite géométrique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{8}{5} \times u_n$.

1. a) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 1{,}6x$ pour construire les huit premiers termes de la suite (u_n).



b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 5000$.

4. On note S la somme des n premiers termes de la suite u_n.

a) Montrer que pour tout entier n, $S = \dfrac{5\left(1{,}6^n - 1\right)}{6}$.

b) Vers quel réel tend S quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 3

Le glacier d'Aletsch, situé dans le sud de la Suisse, est le plus grand glacier des Alpes.
En 2010, sa longueur était de 22,7 kilomètres pour une superficie de 128km^2.
Depuis 1980, un réchauffement climatique significatif a conduit à un recul des glaciers de plus en plus rapide.
On émet l'hypothèse que la longueur du glacier d'Aletsch diminue de 2 % tous les 10 ans à partir de 2010.
On note u_n la longueur en kilomètres du glacier d'Aletsch n dizaines d'années après 2010. Ainsi, $u_0 = 22{,}7$.

1. Donner une estimation de la longueur du glacier en 2020.

2. a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n$.

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

c) Exprimer u_n en fonction de n.

3. Selon ce modèle, le glacier d'Aletsch aura-t-il perdu au moins quatre kilomètres en un siècle ?
4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher dans combien d'années le glacier d'Aletsch aura perdu au moins la moitié de sa longueur.

   Parmi les trois algorithmes suivants, déterminer celui qui convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Algorithme 1

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 22,7
Tant que $U \geqslant 11{,}35$
    Affecter à U la valeur $22{,}7 \times 0{,}98^n$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Afficher $10 \times n$

Algorithme 2

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 22,7
Tant que $U \geqslant 11{,}35$
    Affecter à U la valeur $0{,}98 \times U$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Afficher $10 \times n$

Algorithme 3

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 22,7
Tant que $U \leqslant 11{,}35$
    Affecter à U la valeur $0{,}98 \times U$
    Affecter à n la valeur $n+10$
Fin Tant que
Afficher n

EXERCICE 4

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2013)

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$ et $u_0 = -1$.

PARTIE A

1. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 11 premières valeurs de u_n. On obtient les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Valeur de u_n	-1	2,6	4,04	4,616	4,8464	4,9386	4,9754	4,9902	4,9961	4,9984	4,9994

   Parmi les quatre formules ci-dessous, laquelle a-t-on entré dans la cellule C2 pour obtenir par copie vers la droite les valeurs affichées dans les cellules D2 à L2 (on indiquera la réponse sur la copie sans justification) ?

   a. $=0{,}4^n+3$ **b.** $=\$B\$2*0{,}4+3$ **c.** $=B2*0{,}4+3$ **d.** $=0{,}4\hat{\ }C1+3$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	p et n sont des entiers naturels, u est un nombre réel
ENTRÉE :	saisir la valeur de p
INITIALISATION :	n prend la valeur 0, u prend la valeur -1
TRAITEMENT :	Tant que $\lvert u-5\rvert > 10^{-p}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0{,}4u+3$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher la valeur de n

À l'aide du tableau de la question 1, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque $p = 2$.

PARTIE B

On étudie maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 6 \times (0,4)^n$.

1. Donner la nature de la suite (v_n) et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - v_n$. Déterminer la limite de (u_n).
4. a) Déterminer en fonction de n la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   b) En déduire en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

EXERCICE 5

La température d'un gâteau à la sortie du four est de 160°C.
L'évolution de la température du gâteau en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 160$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0,94 \times T_n + 1,5$.
Pour tout entier naturel n, le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius du gâteau n minutes après la sortie du four.

PARTIE A

1. Quelle est la température, arrondie au degré près, du gâteau 5 minutes après la sortie du four ?
2. Pour déterminer au bout de combien de minutes la température du gâteau sera inférieure ou égale à 30°C, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur 160
TRAITEMENT :	Tant que ...
	Affecter à T la valeur ...
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

PARTIE B

1. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 25$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 135 \times 0,94^n + 25$.
2. Calculer la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 6

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
On remplit un bassin avec 95 m^3 d'eau.

PARTIE A

On note C_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.

1. Déterminer la nature de la suite (C_n) puis, exprimer C_n en fonction de n.
2. Au bout de six semaines, le bassin aura-t-il perdu 18 % de son volume d'eau ?

PARTIE B

Pour être praticable, le bassin doit contenir au moins 88 m^3 d'eau.
Pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m^3 d'eau dans le bassin.
On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.
On a donc $u_0 = 95$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n + 2{,}4$.

1. Pour déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau du bassin sera inférieure ou égale à 88 m^3 d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous :

Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 95
Traitement :	Tant_que $U \cdots$:
	Affecter à N la valeur $N+1$
	Affecter à U la valeur …
	Fin Tant_que
Sortie :	Afficher …

   a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.
   b) Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 15 \times 0{,}97^n$.
3. Étudier la monotonie de la suite u_n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 7

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 30$ et de premier terme u_0.
Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 600$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. On suppose dans cette question, que $u_0 = 500$
   a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = 600 - 100 \times 1{,}05^n$.
   b) Étudier la monotonie de la suite u_n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   d) À l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant 250$.
3. On suppose dans cette question, que $u_0 = 800$
   a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = 600 + 200 \times 1{,}05^n$.
   b) Étudier la monotonie de la suite u_n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   d) À l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant 1000$.

EXERCICE 8

Au 31 décembre 2014, Pierre n'a réussi à économiser que 40 euros. Ses parents lui versent 50 euros tous les premiers du mois.
Pierre décide que pour s'offrir un smartphone qui coûte 180 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé.
Le premier versement lui a été fait au 1^er^ janvier 2015.
Soit u_n le montant des économies de Pierre à la fin du mois après le n-ième versement. Ainsi $u_0 = 40$ et u_1 correspond au montant des économies de Pierre au soir du 31 janvier 2015.

1. Montrer que $u_2 = 97{,}60$.
2. Au terme de quel mois, Pierre aura-t-il économisé la somme nécessaire à l'achat du smartphone ?