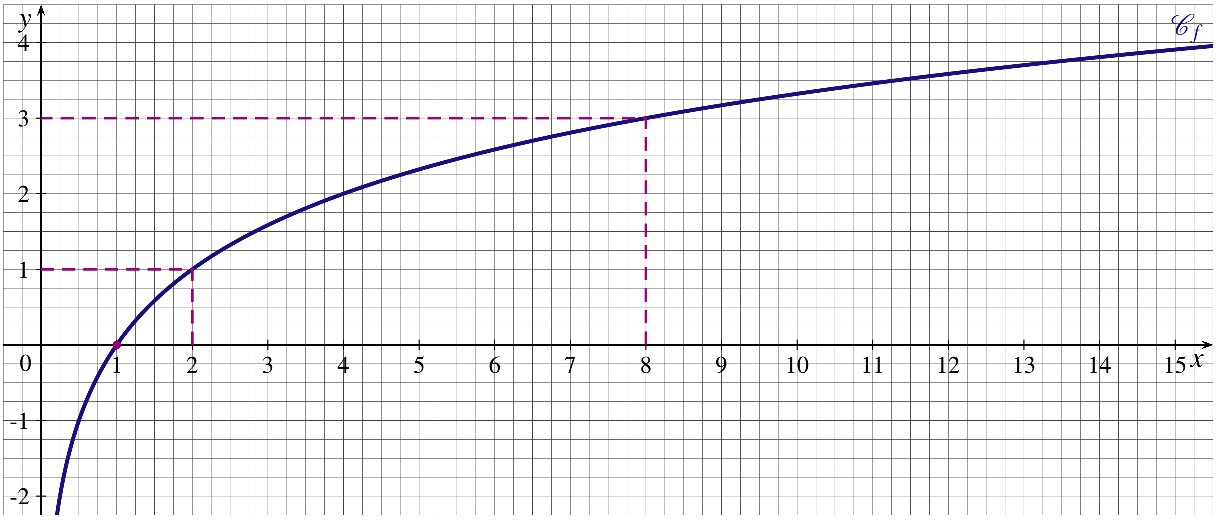
TRANSFORMER LES PRODUITS EN SOMME

Le but de cette activité est de déterminer les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telles que, pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

PARTIE A

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que, pour tous réels a et b strictement positifs $f(ab) = f(a) + f(b)$.



On sait que $f(2) = 1$ et $f(8) = 3$

1. Déterminer les valeurs exactes des images de $16\,;\,32\,;\,0{,}5\,;\,0{,}125$.
2. Déterminer les antécédents par f de 2 et de 0,5.
3. Déterminer $f\left(\sqrt{8}\right)$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

PARTIE B

1. Supposons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que, pour tous réels a et b strictement positifs :
$$f(ab) = f(a) + f(b)$$
   a) Justifier que f n'est pas définie en 0.
   b) Quelle égalité obtient-on lorsque $a = b = 1$? En déduire la valeur de $f(1)$.
   c) Soit x un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel $y > 0$, $f'(xy) = \dfrac{f'(y)}{x}$.
   En posant $k = f'(1)$, déduire que f est la primive qui s'annule pour $x = 1$ de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{k}{x}$.

2. Réciproquement, soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{k}{x}$ avec k un réel fixé.
   a) Justifier que la fonction g admet des primitives sur $]0;+\infty[$.
   b) Soit f la primive qui s'annule pour $x = 1$ de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
   Montrer que les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(ax)$ ont des dérivées égales.
   En déduire alors, que pour tout réel $a > 0$, $f(ax) = f(a) + f(x)$.

I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est dérivable donc continue. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x=1$.
Pour tout réel x strictement positif $\ln x$ est le logarithme népérien de x.

2 CONSÉQUENCES

1. La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. $\ln 1 = 0$
3. La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

DÉMONSTRATION

a étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(ax)-\ln x$
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
Pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$$

La dérivée de la fonction f est toujours nulle, donc f est une fonction constante sur $]0;+\infty[$.
En particulier $f(1)=\ln a-\ln 1=\ln a$, donc pour tout réel $x>0$, $f(x)=\ln a$.
Ainsi, pour tout réel $x>0$, $\ln(ax)-\ln x=\ln a$.
Soit finalement pour tout réel $x>0$, $\ln(ax)=\ln a+\ln x$

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
3. $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln a$

DÉMONSTRATION

1. Soit $a>0$ alors $\dfrac{1}{a}>0$. Or $a\times\dfrac{1}{a}=1$ donc
$$\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln 1 \Leftrightarrow \ln a+\ln\frac{1}{a}=0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{a}=-\ln a$$
2. Soit $a>0$ et $b>0$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$$
3. Si $n=0$, l'égalité est évidente :
$$\ln\left(a^0\right)=\ln 1=0=0\times\ln a$$
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x^n\right)-n\ln x$ avec n entier relatif non nul.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Pour tout réel $x>0$,
$$f'(x)=\frac{1}{x^n}\times n\times x^{n-1}-\frac{n}{x}=\frac{n}{x}-\frac{n}{x}=0$$
La dérivée de la fonction f est toujours nulle, donc f est une fonction constante sur $]0;+\infty[$.
En particulier $f(1)=\ln 1^n-n\ln 1=0$, donc pour tout réel $x>0$, $f(x)=0$. Soit $\ln\left(x^n\right)-n\ln x=0$.
Ainsi, pour tout réel $x>0$ et pour tout entier n, $\ln\left(x^n\right)=n\ln x$.
4. Soit $a>0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ donc
$$\ln a=\ln\left(\sqrt{a}\right)^2=2\ln\sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 VARIATION

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

✳ DÉMONSTRATION

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. Or si $x>0$ alors, $\dfrac{1}{x}>0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

PROPRIÉTÉS

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a=\ln b$ si, et seulement si, $a=b$

$\ln a>\ln b$ si, et seulement si, $a>b$

Puisque $\ln 1=0$:

Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x=0$ si, et seulement si, $x=1$

$\ln x>0$ si, et seulement si, $x>1$

$\ln x<0$ si, et seulement si, $0<x<1$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(5-x^2)=0$

L'équation est définie pour $5-x^2>0$. Soit pour $x\in\left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$

Pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$,

$$\ln(5-x^2)=0 \Leftrightarrow 5-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=4$$

L'équation $x^2=4$ admet deux solutions -2 et 2. Or ces deux solutions sont dans l'intervalle $\left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$.
L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(5-x^2)=0$ est $S=\{-2;2\}$

2 LIMITES

ÉTUDE DE LA LIMITE EN $+\infty$

Soit A un réel strictement positif.

Comme $\ln 2>0$, nous pouvons choisir un entier n tel que $n>\dfrac{A}{\ln 2}$. Soit

$$n\ln 2>A \Leftrightarrow \ln 2^n>A$$

Puisque la fonction ln est strictement croissante, pour tout réel x de l'intervalle $[2^n;+\infty[$:

$$\ln x>\ln 2^n>A$$

Ainsi, $\ln x$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition de choisir x suffisamment grand. D'où

La fonction ln a pour limite $+\infty$ en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

ÉTUDE DE LA LIMITE EN 0

Pour tout réel $x>0$, $\ln x=-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to 0^+}-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$. D'où

La fonction ln a pour limite $-\infty$ en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.
L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe d'équation $y=\ln x$

3 LE NOMBRE e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>1$, $\ln x\in]0;+\infty[$.
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\ln x=1$ admet une solution unique notée e.

DÉFINITION

Le nombre e est le nombre dont le logarithme népérien est égal à 1 : $\ln \mathrm{e}=1$.

APPLICATION

Pour tout entier relatif n,

$$\ln \mathrm{e}^n=n\ln \mathrm{e}=n$$

Pour tout entier relatif n, e^n est le réel solution de l'équation $\ln x=n$.

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

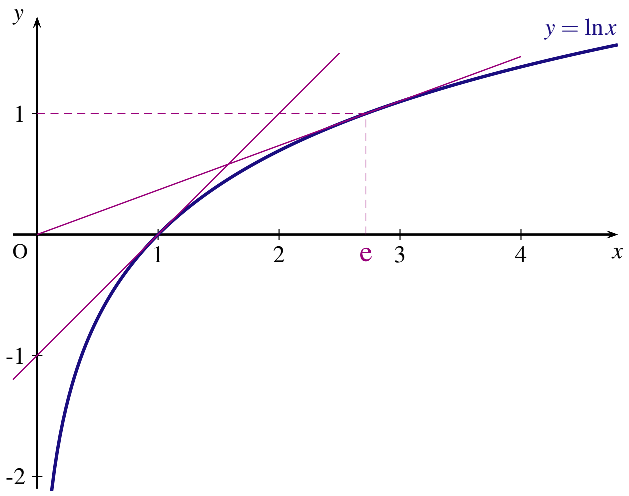
Tangentes remarquables :

La tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point $(1;0)$ a pour équation :

$$y = x - 1$$

La tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point $(\mathrm{e};1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$$



5 LIMITES IMPORTANTES

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0.$$

✼ DÉMONSTRATION

1. *Un résultat préliminaire* : Montrons que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant x$
   Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$. f est dérivable et pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1-x}{x}$$

   Or, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\dfrac{1-x}{x} \leqslant 0$, donc f est décroissante.
   D'autre part, $f(1) = -1$, donc pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant f(1) \leqslant 0$.
   Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant x$.
   Remarque : lorsque $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ donc $\ln x < x$

   Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x$.
   Graphiquement, la courbe représentative de la fonction ln est au dessous de la droite d'équation $y = x$

2. Limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x}$
   Nous avons établi que pour tout réel $X \geqslant 1$, $\ln X \leqslant X$.
   Pour tout réel $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \geqslant 1$ et $\ln\sqrt{x} \geqslant 0$. Donc pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \ln\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2}\ln x \leqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes , $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$
   Conséquence :
   Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$
   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ donc par produit des limites $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$

3. Limite en 0 de $x\ln x$
   Le théorème sur la limite d'un produit de permet pas de calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.
   Pour tout réel $x>0$, nous avons :
$$x\ln x = \frac{1}{\frac{1}{x}} \times \left(-\ln\frac{1}{x}\right) = \frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$
   Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0}$

IV ÉTUDE D'UNE FONCTION $\ln(u)$

1 DÉFINITION

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I.
La composée de la fonction u suivie de la fonction ln est notée $\ln(u)$.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$.
f est la composée de la fonction u définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $u(x)=x^2-1$ suivie de la fonction ln.

2 LIMITES

Pour étudier une limite d'une fonction $\ln(u)$, on utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1=0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(x^2-1\right) = -\infty}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x^2-1\right) = +\infty}$

3 VARIATIONS

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations sur I.

✳ DÉMONSTRATION

Pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$. Or la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
D'après le théorème sur les variations des fonctions composées, u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations sur I.

4 DÉRIVÉE

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

✳ DÉMONSTRATION

La fonction u est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$. Or la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Donc la fonction composée $f = \ln u$ est dérivable sur I.
D'après la formule de dérivation d'une fonction composée

$$f' = \ln'(u) \times u' \quad \text{soit} \quad f' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$.
La fonction u définie sur $]1;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]1;+\infty[$; $u'(x) = 2x$.
f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

PRIMITIVES

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $\ln u$.

EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln(16)-7\ln(2)+4\ln(32)+3\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$

$B=3\ln(125)-2\ln(25)+6\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

$C=2\ln\sqrt{8}-3\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

$D=\dfrac{\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$

$E=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{4}\right)+\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$F=7\ln\left(2\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+5\ln(9)-\ln\left(6\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$G=\dfrac{\ln 5-\ln 10}{2\ln\left(\sqrt{2}\right)}$

$H=\dfrac{\ln 36}{\ln 3+\ln 2}$

$I=\dfrac{\frac{1}{3}\ln 9-4\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{3}}{\ln 3}$

$J=\dfrac{\ln(12)-\ln(9)}{\ln\left(\dfrac{1}{27}\right)+\ln(64)}$

EXERCICE 2

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel $x>1$, $\ln\left(x^2+x-2\right)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$
2. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
3. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2;2[$, $\ln\sqrt{2-x}+\ln\sqrt{2+x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)$

EXERCICE 3

Résoudre les équations suivantes après avoir précisé l'ensemble des valeurs du réel x pour lesquelles l'équation est définie.

1. $\ln(1-2x)=\ln(x+2)+\ln 3$
2. $\ln\left(1-x^2\right)=\ln(2x-1)$
3. $\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln(3x+2)$
4. $\ln\sqrt{2x-2}=\ln(4-x)-\dfrac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x-2)\leqslant\ln(2x+1)$
2. $\ln(3x+2)\geqslant\ln\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)$
3. $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\leqslant\ln x$

EXERCICE 5

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln\left(e^3\right)+\left(e^2\right)$; $B=\dfrac{\ln e}{\ln\left(e^2\right)}-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$; $C=\ln\left(4e^2\right)+\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$; $D=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{e^3}\right)}{\ln 3}\times\dfrac{\ln 9}{e^2}$

EXERCICE 6

1. Résoudre les équations suivantes :
   a) $\ln\dfrac{x+2}{x}=1$; b) $\ln\dfrac{x-1}{2x+1}=-1$; c) $2(\ln x)^2+3\ln x=2$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a) $\ln\dfrac{x}{x+1}\leqslant -1$; b) $\ln(2x+1)-\ln(x-1)\leqslant 1$; c) $(\ln x)^2-\ln x\leqslant 6$

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

a) $1{,}05^n\geqslant 1{,}5$; b) $0{,}92^n\leqslant 0{,}75$; c) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^n\geqslant 2$; d) $0{,}2\geqslant\left(1-\dfrac{9}{100}\right)^n$

EXERCICE 8

1. Actuellement, le taux du livret A d'épargne est égal à 0,75%.
   En supposant que ce taux reste inchangé sur le long terme, au bout de combien d'années, un capital placé sur le livret A aura-t-il augmenté d'au moins 75% ?
2. Le gouvernement d'un pays envisage de baisser l'impôt de 2% par an. Au bout de combien d'années, l'impôt aura-t-il baissé de 20% ?
3. D'une année sur l'autre, un produit perd 5% de sa valeur. Au bout de combien d'années ce produit aura-t-il a perdu plus de 40% de sa valeur initiale ?
4. En 2014, la population mondiale était d'environ 7,25 milliards de personnes. Avec un taux de croissance annuel de 1,14% , en quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 9 milliards ?

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x)=x\ln x-x$; b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; c) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; d) $f(x)=\ln\sqrt{x}$; e) $f(x)=(\ln x)^2+\ln\left(x^2\right)$

EXERCICE 10

Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x)=3x+2-\ln x$; b) $f(x)=\dfrac{2x+\ln x}{x}$; c) $f(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f.

EXERCICE 12

PARTIE A

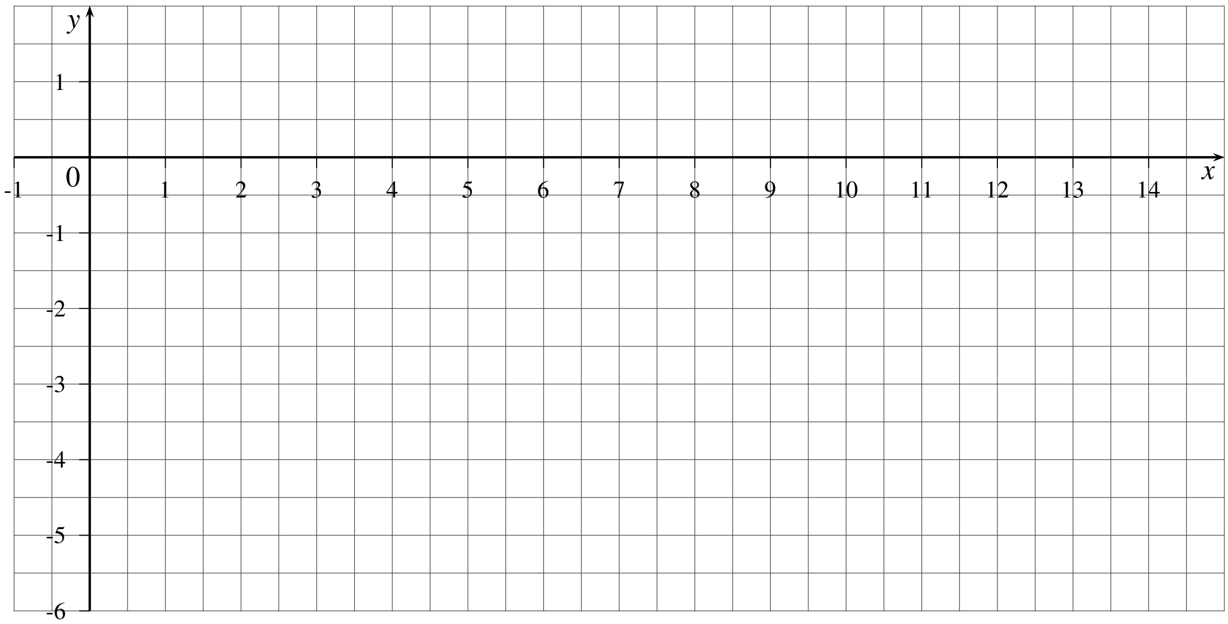
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}-\dfrac{x}{2}+1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   c) Montrer que la droite D d'équation $y=-\dfrac{x}{2}+1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.
   d) Calculer les coordonnées du point A, intersection de la droite D et de la courbe C_f.
2. a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
3. Tracer la droite D et la courbe C_f dans le repère ci-dessous.



EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. a) Étudier les limites de f aux bornes son intervalle de définition.
   b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?
2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 14 *(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015)*

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Un smartphone est équipé d'une batterie Li-ion qui débite en usage normal un courant d'intensité moyenne I de 0,03 ampère (A).
La capacité C de cette batterie, exprimée en ampères-heures (Ah), est la quantité maximale d'électricité qu'elle peut emmagasiner.
On dit que la batterie a effectué un cycle de charge lorsque la quantité d'électricité absorbée, éventuellement en plusieurs fois, est égale à sa capacité.
Lors des 300 premiers cycles de charge de la batterie, sa capacité reste égale à 1,8 Ah.

1. L'autonomie T de ce smartphone, en heures, est fonction de la capacité C de sa batterie et de l'intensité moyenne I du courant qu'elle débite en usage normal.

   On estime que $T = 0{,}7 \times \dfrac{C}{I}$.

   Calculer l'autonomie T, en heures, de ce smartphone au cours de l'un des 300 premiers cycles de charge.
2. On considère qu'après 300 cycles de charge, l'autonomie de la batterie diminue de 1% à chaque nouveau cycle de charge.

   Pour tout entier naturel n, on note T_n l'autonomie, en heures, de la batterie au bout de « $300+n$ » cycles de charge.

   On admet que $T_0 = 42$.

   a) Calculer T_1 et T_2. Interpréter les résultats.

   b) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

   c) Justifier que $T_n = 42 \times 0{,}99^n$.
3. Un utilisateur souhaite déterminer à partir de combien de cycles de charge l'autonomie de la batterie aura diminué de moitié par rapport à son état initial.

   a) On propose l'algorithme suivant pour déterminer le nombre de cycles de charge correspondant.

   ```
   Variables
       n : nombre entier naturel
       T : nombre réel
       q : nombre réel
   Initialisation
       n prend la valeur 0
       T prend la valeur 42
       q prend la valeur 0,99
   Traitement
       Tant que ...
           T prend la valeur ...
           n prend la valeur ...
       Fin Tant que
   Sortie
       Afficher n+300
   ```

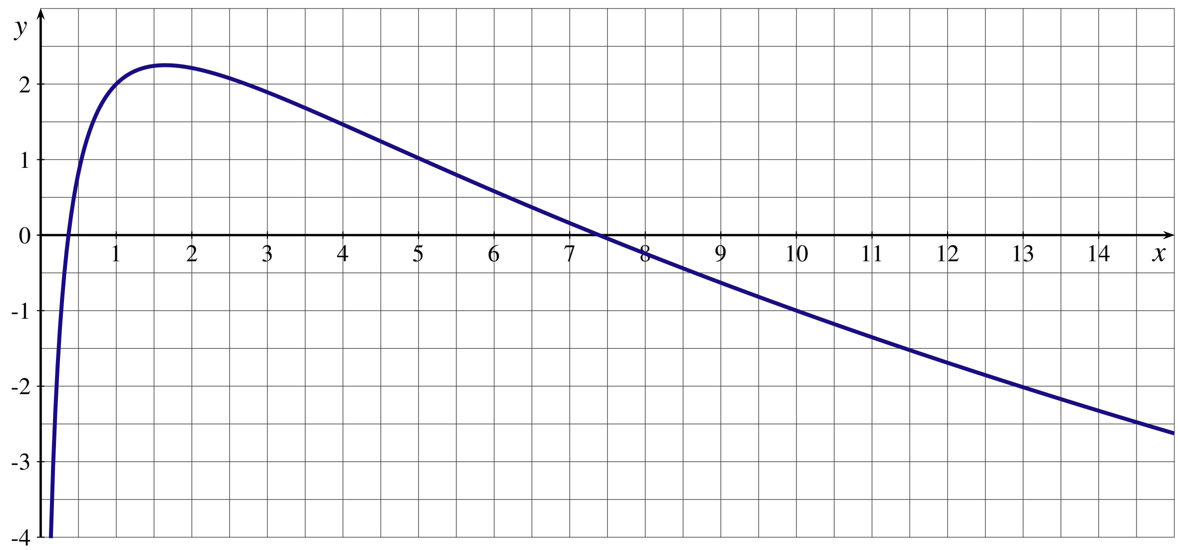
   Recopier et compléter la partie relative au traitement.

   b) Déterminer à partir de combien de cycles de charge l'autonomie de la batterie aura diminué de moitié par rapport à son état initial.
4. Lorsque l'autonomie de la batterie devient inférieure à 5 heures, on estime qu'elle ne permet plus un usage normal du smartphone. Le nombre de cycles de charge correspondant est alors appelé durée de vie de la batterie.

   Déterminer la durée de vie de cette batterie.

EXERCICE 15

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) Résoudre l'équation $f(x)=0$. Les valeurs exactes sont demandées.
   b) Montrer que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		e^2		$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
3. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
5. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1+X)(2-X)=2$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x)=2$.

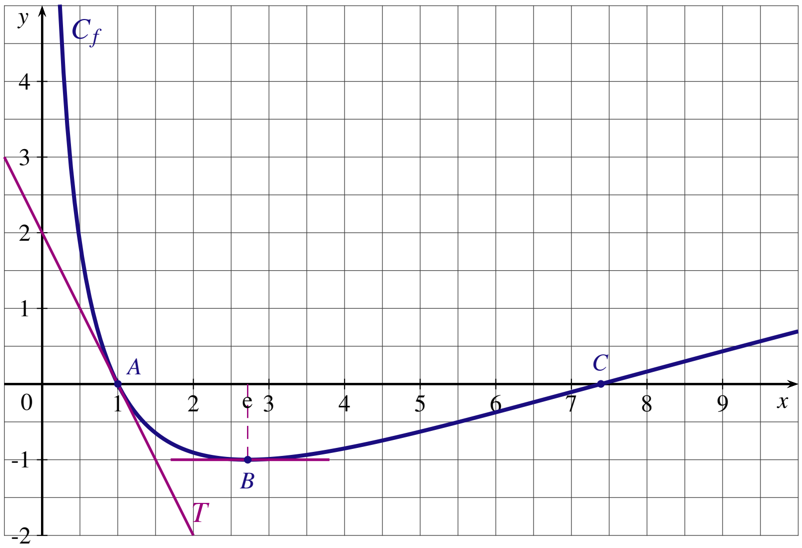
EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ et $F(1)=2$.
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ et $F(1)=2$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x}$ et $F(1)=-1$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$ et $F(\mathrm{e})=0$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$ et $F(1)=2$.

EXERCICE 17

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique C_f dans le repère ci-dessous.



PARTIE A

Dans cette partie , on admet que :

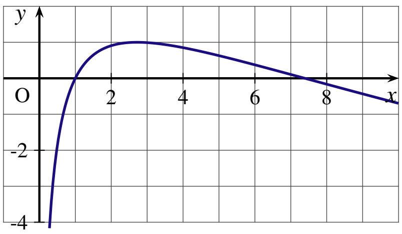
— la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points A et C ;

— la droite T est tangente en A à la courbe C_f ;

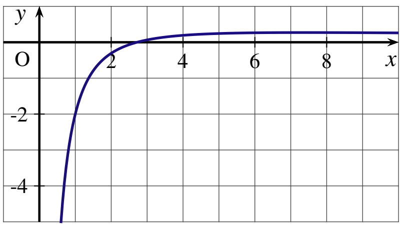
— la courbe C_f admet une tangente horizontale au point B d'abscisse e.

1. Avec la précision permise par le graphique, donner les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$, et $f'(\mathrm{e})$, où f' est la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre d'une primitive F de la fonction f. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.

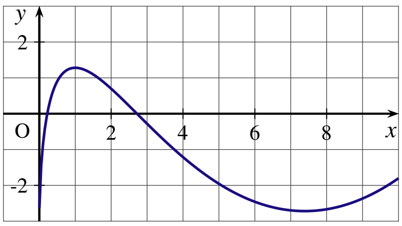
Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3



PARTIE B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2 - 2\ln(x)$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.
3. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse e.

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2\right) - \sqrt{x}$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f.
3. Existe-t-il un entier M tel que pour tout réel $x \geqslant M$, $\ln\left(x^2\right) \geqslant \sqrt{x}$?

EXERCICE 19

PARTIE A

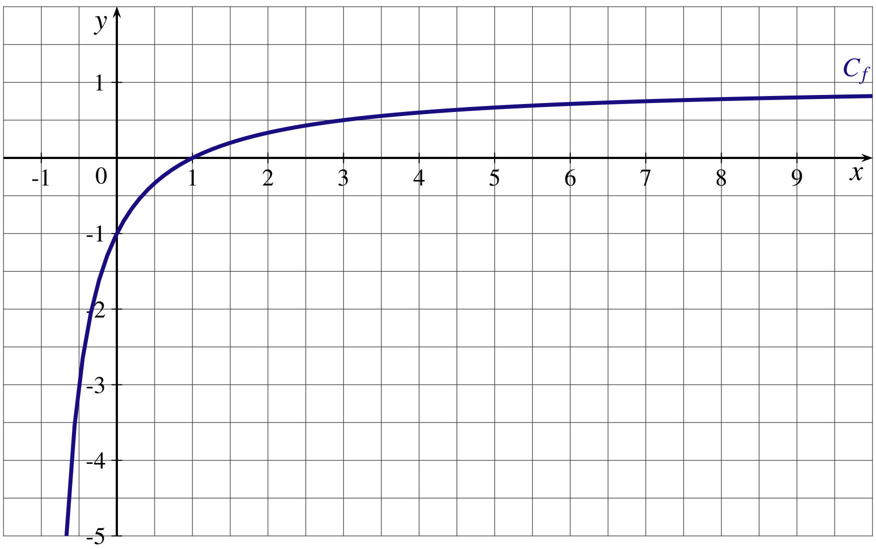
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ et C_g sa représentation graphique.

1. Déterminer l'intervalle I de définition de g.
2. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en 1.
   En déduire les asymptotes à la courbe C_g en précisant une équation pour chacune d'elles.
3. Exprimer $g'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 2.
5. Ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal a été tracée. Tracer la courbe C_g dans le même repère.



EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+\mathrm{e}}$ et $F(0) = \dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3x-2}$ et $F(1) = \dfrac{1}{3}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ et $F(0) = \ln 2$.
4. f est définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ et $F(1) = \ln 4$.

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;\pi[$ par $f(t)=\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
   En déduire les asymptotes à la courbe C_f en précisant une équation pour chacune d'elles.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer la dérivée $f'(t)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
4. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.
   a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{6}$.
   b) Étudier les variations de la fonction F.
   c) Calculer $F(t)$.
   d) En déduire la valeur exacte du maximum de la fonction F.