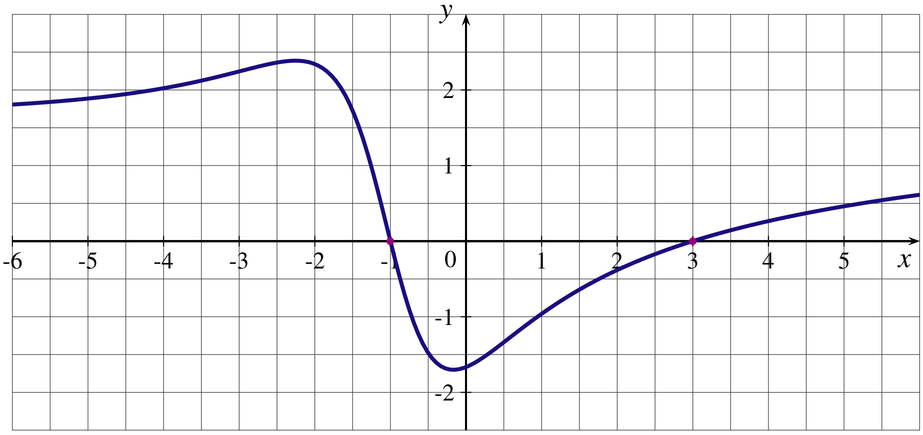
ACTIVITÉS

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = -2x + 3$.
   Vérifier que g est la dérivée de f. Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
2. À l'aide du tableau des dérivées, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :

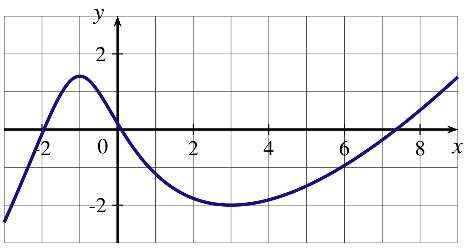
   a) $f(x) = \dfrac{1}{2}$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = 3x - 2$

   d) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ e) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ f) $f(x) = (2x-1)^2$

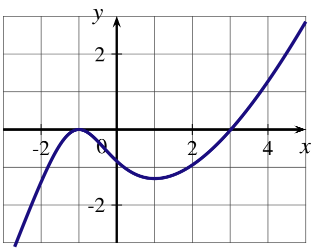
3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



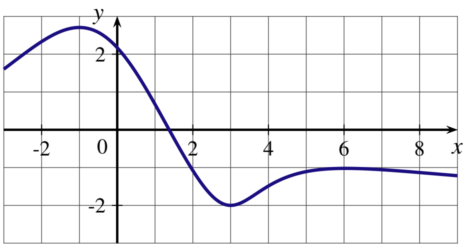
Parmi les cinq courbes suivantes, quelles sont celles susceptibles de représenter une fonction F ayant pour dérivée la fonction f ?



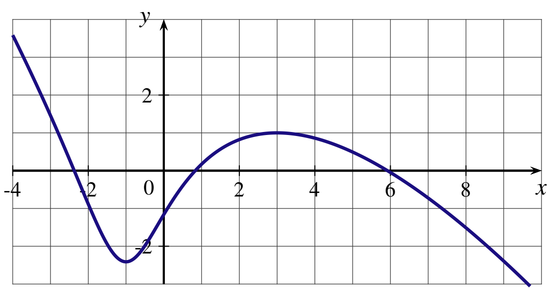
Courbe C_1



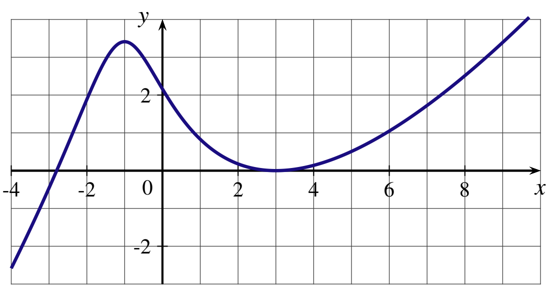
Courbe C_2



Courbe C_3



Courbe C_4



Courbe C_5

I PRIMITIVES

1 DÉFINITION

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$
Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

✻ DÉMONSTRATION

— Soit F une primitive de la fonction f sur I et G une fonction définie pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.
Alors, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

— Soient G et F deux primitives de f sur I montrons qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F(x) + k$.
On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$ alors,

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I.
Ainsi, pour tout réel x de I, $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

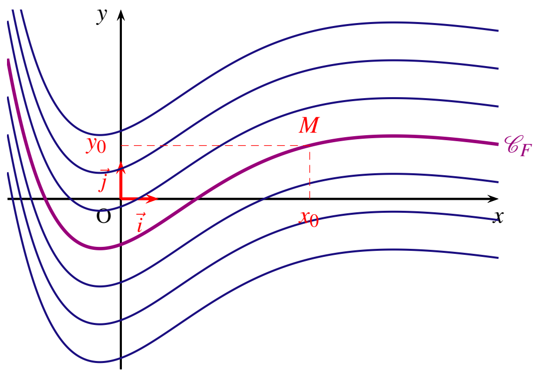
✻ DÉMONSTRATION

Si G est une primitive de f sur I, alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel.
La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.
Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on connaît la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une primitive de f sur I, alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0;y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathscr{C}_F$ de la famille passant par ce point.



II CALCULS DE PRIMITIVES

Nous admettons la propriété suivante :
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

— Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

— Si F est une primitives de la fonction f sur un intervalle I et k un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x)=a$ (a est un réel)	$F(x)=ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	*prochain cours*	sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n>1$)	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(ax+b)$ $(a\neq 0)$	$F(x)=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(ax+b)$ $(a\neq 0)$	$F(x)=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	sur $\mathbb{R}$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel t par $f(t)=-3\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Les primitives de la fonction f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\frac{3}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+c$ où c est un réel quelconque.

2. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - x + \frac{3}{x^2} - 1$ telle que $F(1) = \frac{5}{6}$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} - x + c$$

où c est un réel à déterminer.

— Comme $F(1) = \frac{5}{6}$, on en déduit que :

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 3 - 1 + c = \frac{5}{6} \iff -\frac{23}{6} + c = \frac{5}{6}$$
$$\iff c = -3$$

Ainsi, la primitive F de la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} - x - 3$

2 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
On obtient le tableau suivant à partir de la dérivation d'une fonction composée.

conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
n entier, $n > 0$	$f = u'u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I n entier, $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$
	$f = u'\cos(u)$	$F = \sin(u)$
	$f = u'\sin(u)$	$F = -\cos(u)$

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$ telle que $F(-1) = 0$.

Le carré au dénominateur incite à mettre en évidence la forme $\frac{u'}{u^2}$.

$f(x) = 2 \times \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ soit $f = 2 \times \frac{u'}{u^2}$ avec pour tout réel x, $u(x) = x^2+x+1$ et $u'(x) = 2x+1$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -2 \times \frac{1}{u} + c$ où c est un réel à déterminer. Soit pour tout réel x,

$$F(x) = \frac{-2}{x^2+x+1} + c$$

Or $F(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$. Ainsi, la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{-2}{x^2+x+1} + 2$$

EXERCICE 1

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

   a) $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{2}$ b) $f(x)=x^3-4x+\sqrt{2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}+1$

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

   a) $f(x)=3x+\dfrac{3}{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-5x-1$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-5x+\dfrac{1}{2}$ et $F(1)=0$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}+1$ et $F(1)=2$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^3+\dfrac{2}{x^2}$ et $F(1)=-\dfrac{1}{4}$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x^3-1-\dfrac{1}{x^2}$ et $F(1)=1$.

EXERCICE 3

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$
Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{(2x^2+x-1)^2}$

1. Montrer que la fonction G définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $G(x)=\dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.
2. a) Déterminer la primitive F de f sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ telle que $F(1)=0$

   b) Étudier les variations de la fonction F.

   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1.

EXERCICE 5

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

   a) f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^3}$.

   b) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)(x^2+2x-3)^3$.

   c) f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.

2. Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

   a) f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{4}{(1-2x)^2}$ et $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

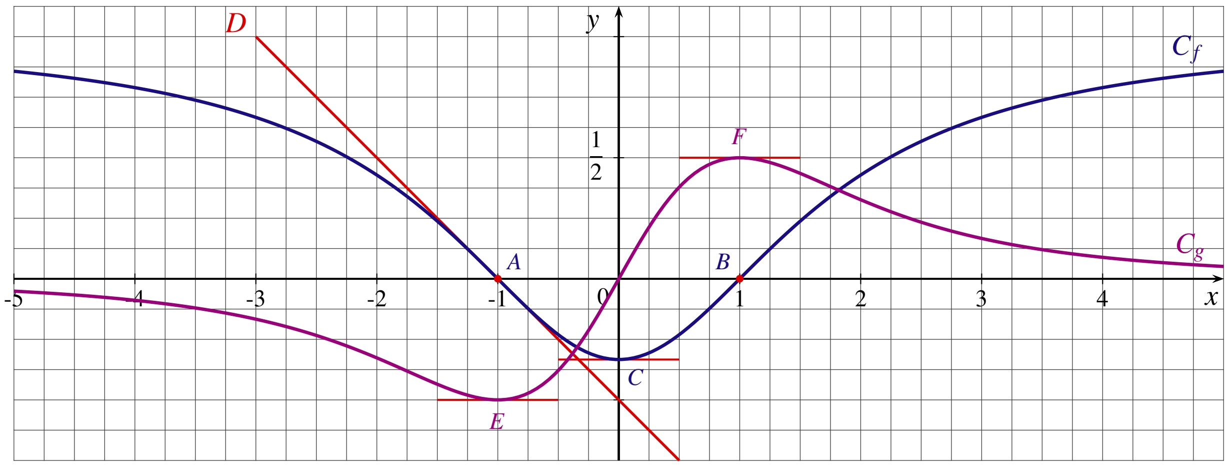
   b) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\sin(2t)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

EXERCICE 6

1. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 6\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
2. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -2\sin(2t)$ est-elle une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$?

EXERCICE 7

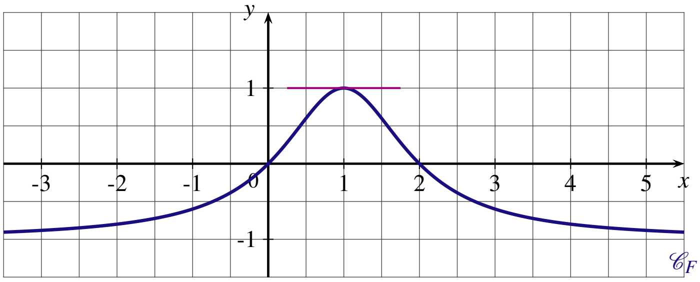
On a tracé ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
La droite D est tangente à la courbe C_f au point $A(-1;0)$ et passe par le point de coordonnées $(-3;1)$.



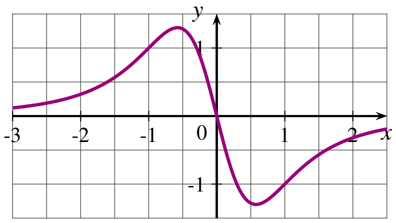
1. Par lecture graphique :
   a) Déterminer $g'(-1)$ et $f'(-1)$.
   b) Une des deux fonctions est la dérivée de l'autre, déterminez laquelle en justifiant votre choix.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$.
   a) Déterminer une primitive de la fonction g.
   b) En déduire que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2+3}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
4. Étudier les variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point B. La tracer sur le graphique précédent.

EXERCICE 8

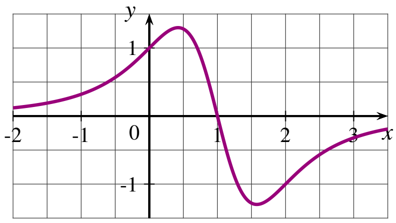
La courbe $\mathscr{C}_F$ suivante, est la courbe représentative d'une primitive F sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f.



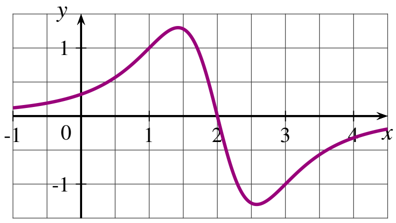
1. Une des trois courbes ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f. Déterminer laquelle.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

2. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2x + 2}$ est une primitive de la fonction f.

   a) Donner l'expression de $F(x)$.

   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_F$ au point A d'abscisse 2. La tracer sur le graphique précédent.

EXERCICE 9

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On sait que $f(2) = -4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		$+\infty$
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

PARTIE A

1. Soit F la primitive de la fonction fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4) = \dfrac{1}{2}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F.

   a) Donner le tableau de variations de la fonction F.

   b) On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;3)$.
   Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

2. Tracer la courbe représentative d'une fonction qui satisfait les conditions obtenues à la question précédente, dans un repère orthonormé du plan. (*Unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)
   Placer le point A ainsi que le point d'abscisse 4 et tracer les tangentes à la courbe en ces points.

PARTIE B

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{12}{x^2} - \dfrac{16}{x^3}$

1. a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4) = \dfrac{1}{2}$.

   b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -4x + 11$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

   b) Montrer que la courbe représentative de la fonction F admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - 7$.