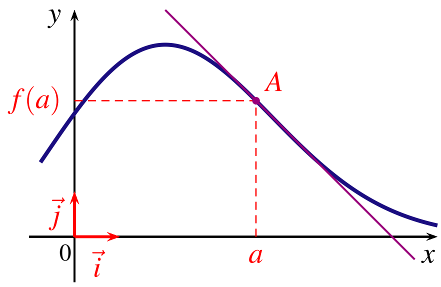
# I Tangente à une courbe

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, dérivable en $a$ où $a$ est un réel de $I$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite passant par le point $A\,(a; f(a))$ de la courbe $C_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $a$.




Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, dérivable en $a$ où $a$ est un réel de $I$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe $C_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

# II Dérivées des fonctions de référence

| $f$ définie sur ... | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f$ dérivable sur ... |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ pour $n$ entier $n \geqslant 2$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{1}{x^n}$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ pour $n$ entier $n \geqslant 1$ |
| $[0;+\infty[$ | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |

# III Dérivées et opérations

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ :

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = k \times u'$
- $(uv)' = u'v + uv'$

- $\left(u^2\right)' = 2uu'$
- Si $n$ est un entier non nul, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Si la fonction $v$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$ (si $v(x) \neq 0$ sur $I$)

- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

# IV DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

## 1 THÉORÈME 1

Soit $f$ une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

— Si $f$ est constante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x) = 0$.

— Si $f$ est croissante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x) \geqslant 0$.

— Si $f$ est décroissante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x) \leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

## 2 THÉORÈME 2

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $f'$ la dérivée de $f$ sur $I$.

— Si $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.

— Si $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

— Si $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

## 3 THÉORÈME 3

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et $x_0$ un réel appartenant à $I$.

1. Si $f$ admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée $f'$ s'annule en $x_0$ **en changeant de signe**, alors $f$ admet un extremum local en $x_0$.

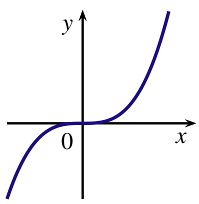
| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | *minimum* | $\nearrow$ | |

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | *maximum* | $\searrow$ | |

REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel $x$ non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.

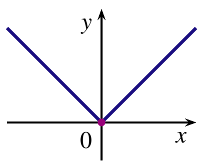



2. Une fonction peut admettre un extremum local en $x_0$ sans être nécessairement dérivable.

   Considérons la fonction valeur absolue $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

   $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   $f$ admet un minimum $f(0) = 0$ or $f$ n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Étude des limites.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{4x-3}{x^2+1} = 1$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

2. Calcul de la dérivée $f'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ la fonction $f$ est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f = 1 - \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x-3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

3. Étude des variations de la fonction $f$

Les variations de la fonction $f$ se déduisent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$ :

Pour tout réel $x$, $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a = 4$, $b = -6$ et $c = -4$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2$$

Un polynôme du second degré est du signe de $a$ sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel $x$ ainsi que les variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

## EXERCICE 1

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=8x^2-2x-\frac{9}{2x+3}$. On note $C_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe $C_f$ ?

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8x\left(8x^2+23x+15\right)}{(2x+3)^2}$.

3. Étudier les variations de la fonction $f$.

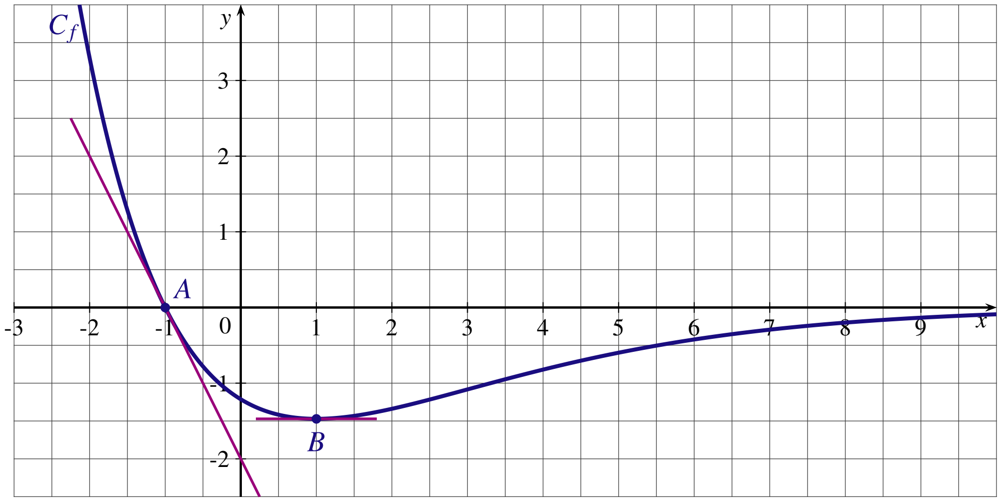
## EXERCICE 2

La courbe $C_f$ ci-dessous représente une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des abscisses au point $A$ et la tangente à la courbe au point $A$ passe par le point de coordonnées $(0;-2)$ ;

— la courbe admet au point $B$ d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

— la courbe admet pour asymptote l'axe des abscisses.

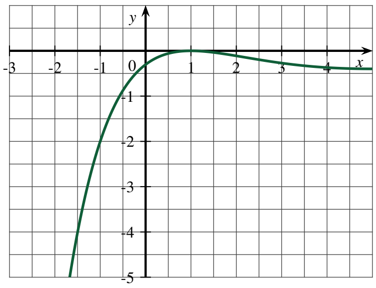



1. À partir du graphique et des renseignements fournis :

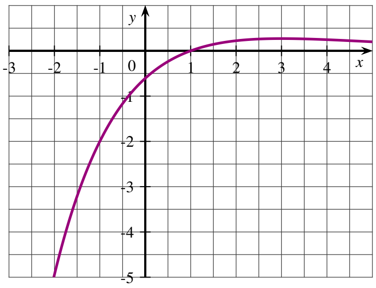
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.

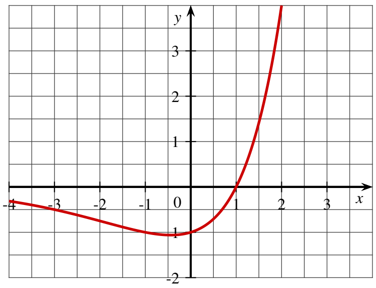
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f'$ . Déterminer laquelle.



courbe $C_1$



courbe $C_2$



courbe $C_3$

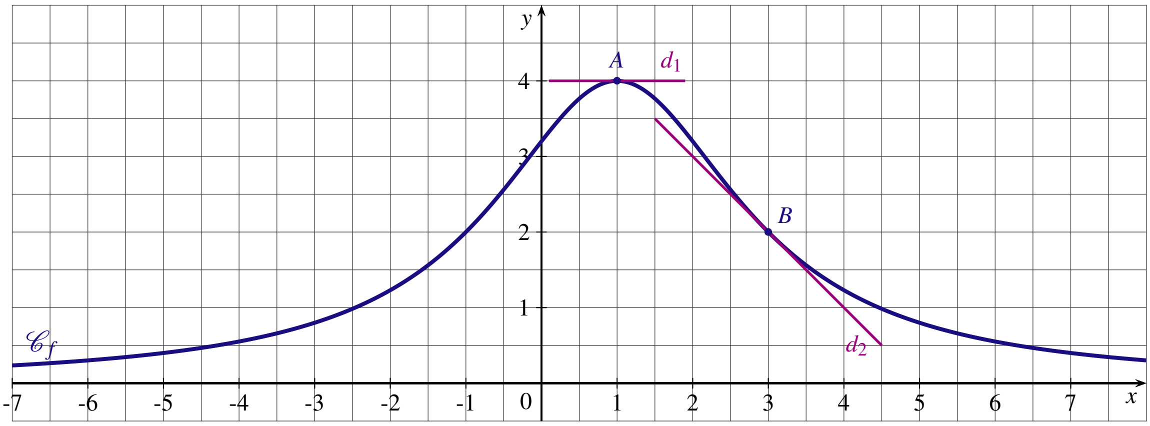
## EXERCICE 3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2+3}$. On note $C_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) La courbe représentative de la fonction $f$ admet-elle des asymptotes ?
2. Calculer la dérivée de la fonction $f$.
3. Étudier les variations de $f$.
4. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 1.

## EXERCICE 4

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction $f$ strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.




On sait que :

— la courbe admet pour asymptote l'axe des abscisses en $-\infty$ et en $+\infty$.

— Les droites $d_1$ et $d_2$ sont tangentes à la courbe aux points $A$ et $B$ d'abscisses respectives 1 et 3 ;

— La tangente $T$ à la courbe au point d'abscisse $-1$ a pour équation $y=x+3$.

On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$.

1. Tracer la droite $T$ puis, déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(1)$ et $f'(3)$.
3. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction $g$.
   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g$ au point d'abscisse $-1$.

## EXERCICE 5

Soit $f$ la fonction définie $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-2x-1}{2x+1}$. On note $f'$ sa dérivée.

1. Étudier les limites de la fonction $f$ aux bornes de son intervalle de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe $C_f$ ?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction $f$.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à $10^{-3}$ près, des solutions de l'équation $f(x)=0$.