I DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on en déduit que pour tout réel k l'équation $\ln(x)=k$ admet une solution unique a dans l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		a		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	k	$\nearrow$	$+\infty$

Cette propriété, permet de définir une nouvelle fonction « réciproque » de la fonction logarithme népérien.

1 DÉFINITION

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe associe le réel y strictement positif tel que :

$$y=\exp(x) \iff x=\ln(y)$$

NOTATION

Pour tout entier relatif n, $\ln\left(\mathrm{e}^n\right)=n$. Ainsi, pour tout entier relatif n, $\exp(n)=\mathrm{e}^n$. On convient d'étendre cette écriture à tout réel x.
C'est à dire que pour tout réel x, on écrit $\exp(x)=\mathrm{e}^x$. e^x se lit donc « exponentielle de x ».

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition :

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$.
- Pour tout réel x et pour tout réel $y>0$, $y=\mathrm{e}^x \iff x=\ln(y)$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=x$.
- Pour tout réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$.

EXEMPLES

$\ln(1)=0 \iff \mathrm{e}^0=1$; $\mathrm{e}^x=3 \iff x=\ln 3$; L'équation $\mathrm{e}^x=0$ n'a pas de solution.

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 EXPONENTIELLE D'UNE SOMME

Pour tout réel a et pour tout réel b

$$\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b$$

✻ DÉMONSTRATION

Pour tout réel a et pour tout réel b, e^{a+b}, e^a et e^b sont des réels strictement positifs.
Nous avons, d'une part, $\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)=a+b$.
D'autre part, $\ln\left(\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b\right)=\ln\left(\mathrm{e}^a\right)+\ln\left(\mathrm{e}^b\right)=a+b$
Donc $\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b\right) \iff \mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b$

2 AUTRES PROPRIÉTÉS

1. Pour tout réel a, $\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$
2. Pour tout réel a et pour tout réel b, $\mathrm{e}^{a-b}=\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\mathrm{e}^{na}=\left(\mathrm{e}^{a}\right)^{n}$

Démonstrations

1. Pour tout réel a, $\mathrm{e}^{a}\times\mathrm{e}^{-a}=\mathrm{e}^{0}=1$ donc $\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$
2. Pour tout réel a et pour tout réel b, $\mathrm{e}^{a-b}=\mathrm{e}^{a}\times\mathrm{e}^{-b}=\mathrm{e}^{a}\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^{b}}=\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\ln\left(\mathrm{e}^{na}\right)=na$ et $\ln\left(\mathrm{e}^{a}\right)^{n}=n\ln\left(\mathrm{e}^{a}\right)=na$
   Donc $\ln\left(\mathrm{e}^{na}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^{a}\right)^{n}\iff\mathrm{e}^{na}=\left(\mathrm{e}^{a}\right)^{n}$

EXEMPLES

$\mathrm{e}^{2+\ln 3}=\mathrm{e}^{2}\times\mathrm{e}^{\ln 3}=3\mathrm{e}^{2}$; $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x-2}}=\mathrm{e}^{-(x-2)}=\mathrm{e}^{2-x}$; $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x}}=\mathrm{e}^{2x+1-x}=\mathrm{e}^{x+1}$; $\mathrm{e}^{2x}\times\mathrm{e}^{2}=\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)^{2}$

III ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

DÉRIVÉE

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x)=\exp(x)$

Preuve :
On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
e^{x} étant strictement positif, la fonction composée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(\exp(x))$ est dérivable et pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}$.
Or $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)=x$, donc $f'(x)=1$.
Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}=1$ donc $\exp'(x)=\exp(x)=\mathrm{e}^{x}$.

VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✼ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

Pour tout réel x et pour tout réel y,

$$\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{y}\iff x=y\qquad\text{et}\qquad\mathrm{e}^{x}<\mathrm{e}^{y}\iff x<y$$

2 LIMITES

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstrations

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$. Donc si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant 1$.
   On en déduit le signe de f' ainsi que le tableau des variations de la fonction f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		1		↗

   Le minimum de la fonction f est égal à 1. Donc pour tout réel x, $f(x) > 0$. C'est à dire pour tout réel x, $\mathrm{e}^x - x > 0 \iff \mathrm{e}^x > x$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. La limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ se déduit de sa limite en $+\infty$
   Si x tend vers $+\infty$, alors $-x$ tend vers $-\infty$. Par conséquent

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. Soit $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

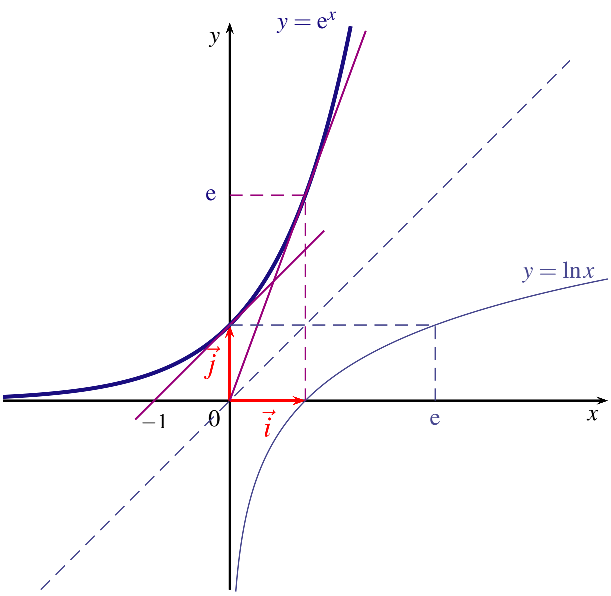
3 COURBE REPRÉSENTATIVE

— $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

— $\mathrm{e}^0 = 1$ et la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

— La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \mathrm{e}x$.

— La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



4 CROISSANCES COMPARÉES

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x=0$$

Pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x=0$.

Démonstrations

1. Pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\ln(x)}}=\mathrm{e}^{x-\ln(x)}=\mathrm{e}^{x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)}$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)}=+\infty$. Soit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$, on en déduit par passage à l'inverse que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. C'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x=0$.

3. Soit n un entier naturel non nul quelconque.
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n$

   Donc pour tout réel x non nul, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n\times\dfrac{x}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{n^n}\times\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\dfrac{x}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{n^n}\times\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\dfrac{x}{n}}\right)^n$

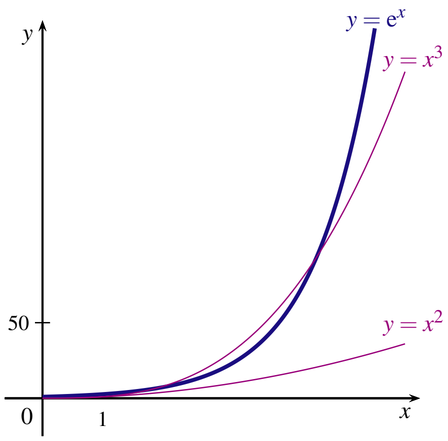
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X}=+\infty$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n=+\infty$ d'où, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^n}\times\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n=+\infty$.

   C'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$.
   Ce résultat est vrai pour un entier naturel n non nul quelconque, ce qui signifie qu'il est vrai pour tout entier naturel n non nul.

   REMARQUE :

   On peut résumer cette propriété à l'aide de la règle opératoire :
   En $+\infty$, l'exponentielle de x l'emporte sur toutes les puissances de x



IV EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.
La fonction $f = \exp(u)$ est la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle notée également $f = \mathrm{e}^u$.

1 LIMITES

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. α désigne soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)} = 0$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)} = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = b$ avec b réel alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^b$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}}$.

1. $\lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to1^+} x - \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}} = 0}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}} = +\infty}$

2 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$.
La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}}$

3 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur l'intervalle I.

Démonstration

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par composée :

- si la fonction u est croissante sur I, alors la fonction e^u est croissante sur I ;
- si la fonction u est décroissante sur I, alors la fonction e^u est décroissante sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-2x}$.
f est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1-2x$ suivie de la fonction exp.
Or la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 PRIMITIVES

Soit u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet des primitives sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions F définies par $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + k$.

EXERCICE 1

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$; $B=\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}$; $C=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$; $D=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$.

$E=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^{2}}{\mathrm{e}^{2x-1}}$; $F=\ln\left(\mathrm{e}^{2x+1}\times\mathrm{e}^{2-x}\right)$; $G=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+\ln 2}}{\mathrm{e}^{-x}}$; $H=\dfrac{\mathrm{e}^{x+\ln 8}}{\mathrm{e}^{x-\ln 2}}$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $\mathrm{e}^{x^{2}+x-1}=1$ b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}}=\mathrm{e}^{2x^{2}-1}$ c) $2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1=0$

   d) $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)=\mathrm{e}^{x+1}+x$ e) $\mathrm{e}^{\ln\left(x^{2}+1\right)}-\ln\left(\mathrm{e}^{1-x^{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$ f) $\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)+\mathrm{e}^{-\ln x}=0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a) $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\geqslant\mathrm{e}$ b) $\mathrm{e}^{2x}\leqslant\mathrm{e}^{x}$ c) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^{2}}<1$

EXERCICE 3

(D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2016)

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré $\left(\mathrm{W/m^2}\right)$, le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Échelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique $\left(\mathrm{W/m^2}\right)$	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^{6}	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^{2}	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?
2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $\left[10^{-12};10^{6}\right]$ et le niveau sonore est donnée par :

   $$f(x)=\frac{10}{\ln 10}\times\ln(x)+120.$$

   On pourra prendre $\dfrac{10}{\ln 10}\approx 4{,}34$.

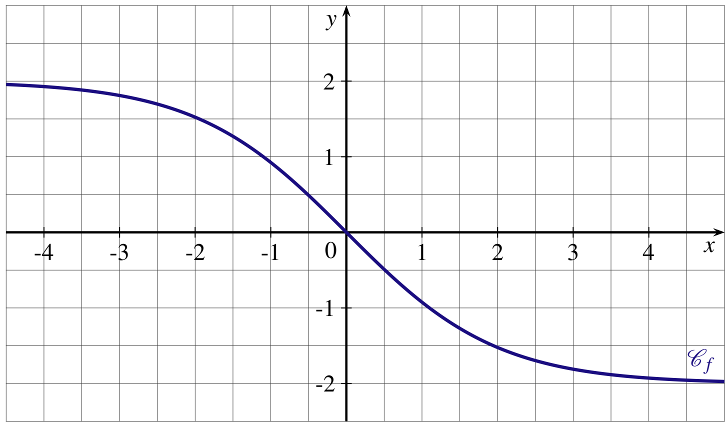
   a) Vérifier la conjecture émise à la question 1.

   b) Quel serait le niveau sonore de deux motos ?
3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.

   Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

EXERCICE 4

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{x}}-2$.



1. a) Calculer $f(-\ln 7)$ et $f(\ln 3)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
3. a) On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\ln 3$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3-2x}{\mathrm{e}^x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (2x-5) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

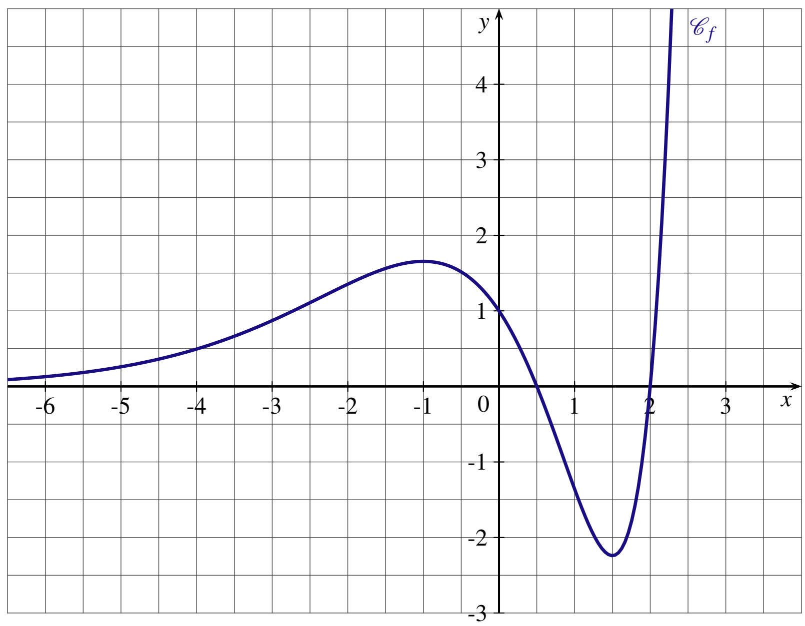
EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)\mathrm{e}^x - 2$.

1. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^x$.
Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Tracer la droite T sur le graphique précédent.

EXERCICE 9

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - (\mathrm{e}^x)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \times \mathrm{e}^{x^2-2x+1}$

EXERCICE 10 (*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2016*)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en minutes.
Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300 °C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26 °C par un système de ventilation.
La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre 10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont les suivantes :

- Sans couture.
- Très doux et confortables.
- Température maximale d'utilisation : 240 °C.

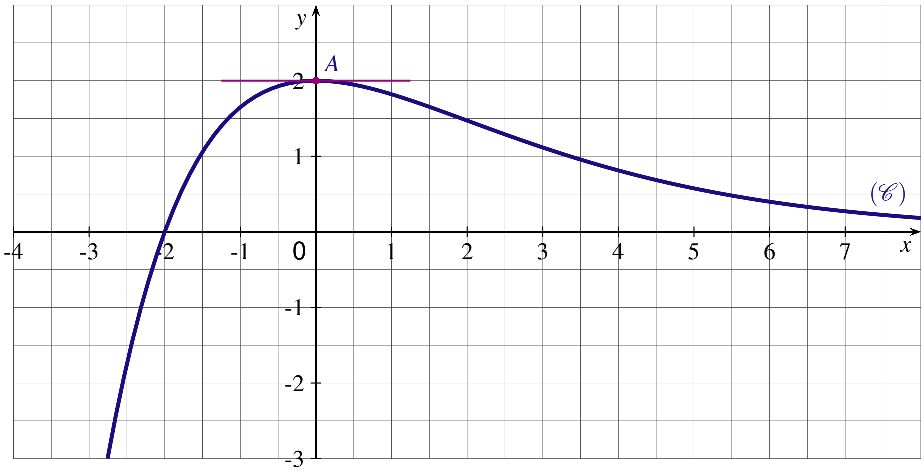
1. Dans cette question, on ne demande pas de justification.
   a) Quelle est, à la sortie du four, la température des plaques ?
   b) Comment varie, à la sortie du four, la température des plaques au cours du temps ?
   c) Vers quelle valeur la température des plaques devrait-elle se stabiliser ?

2. La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en minutes, par une fonction g.
   On admet que cette fonction g est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(t) = 274\mathrm{e}^{at} + 26$ où a est un nombre réel.
   a) Calculer $g(0)$. Ce résultat est-il conforme aux données ?
   b) D'après la question 1, quel doit être le signe du nombre réel a ?
   c) On sait que 3 minutes après sa sortie du four la température de la plaque, arrondie à l'unité, est de 262 °C. Montrer que la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient a est $-0{,}05$.
3. Dans cette question on considère que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$: $g(t) = 274\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 26$.
   a) Avec les gants actuellement utilisés, à quelle température l'ouvrier pourra-t-il manipuler les plaques après leur sortie du four, en respectant les caractéristiques techniques de la commission de sécurité ?
   b) Si le directeur décidait d'équiper les ouvriers avec les nouveaux gants, quel délai d'attente minimal serait requis avant que les ouvriers puissent manipuler les plaques ?
   c) En déduire le gain de temps, en pourcentage, dû à l'utilisation de ces nouveaux gants.

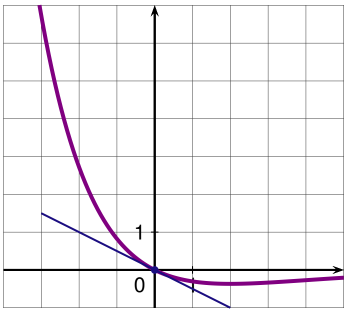
EXERCICE 11

PARTIE A

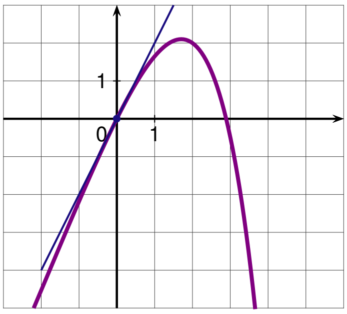
La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



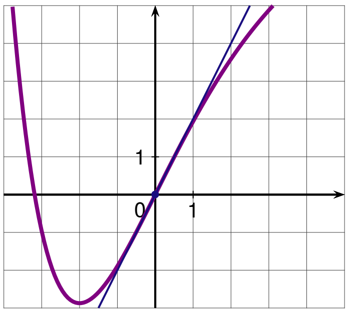
1. Au point $A(0;2)$, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction f' dérivée de la fonction f et une autre une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.

PARTIE B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) La courbe $(\mathscr{C})$ a-t-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles ?
2. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation complet de f.
3. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(0)=0$. On note (Γ) sa courbe représentative.
   Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

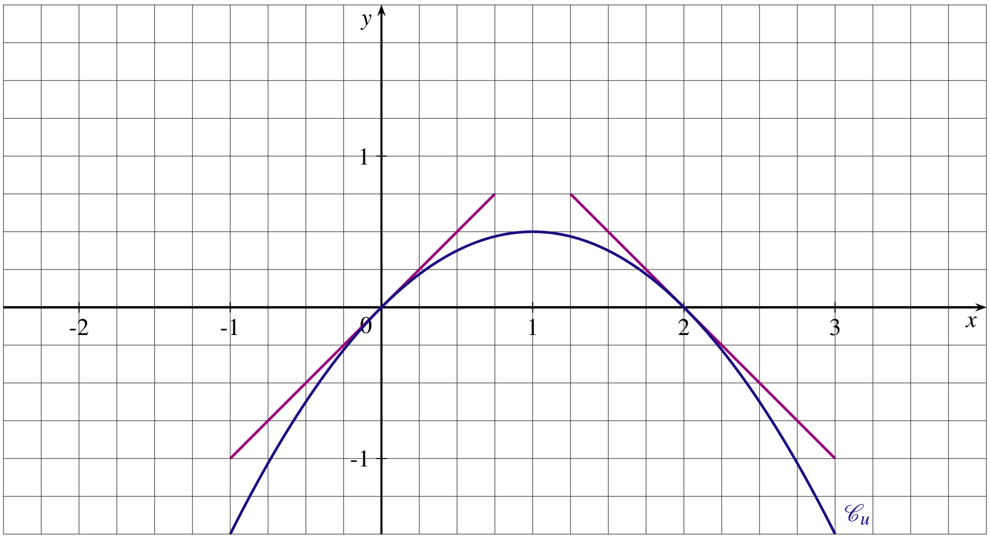
EXERCICE 12

PARTIE A

Soit u la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_u$ est donnée en annexe ci-dessous.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$. On note f' sa fonction dérivée.
À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

1. La proposition « L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions. » est-elle vraie ou fausse ?
2. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.

ANNEXE



PARTIE B

On considère dans cette partie, que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^{x-0,5x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=1$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Représentation graphique de la fonction f.
   a) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
   b) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
   c) Déterminer une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2.
   d) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
   On placera les points d'abscisses 0, 1, 2 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.