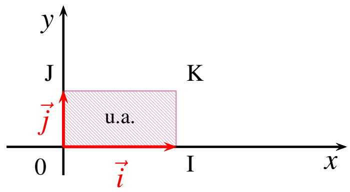
I INTÉGRALE ET AIRE

1 UNITÉ D'AIRE

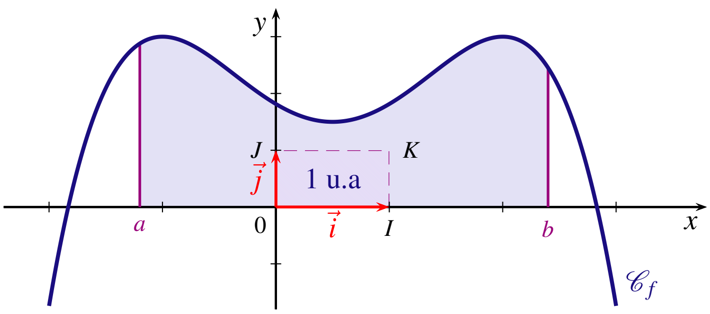


Soit $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $\text{I}(0;1)$, $\text{J}(0;1)$ et $\text{K}(1;1)$.

2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$
Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



REMARQUES

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$

— $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

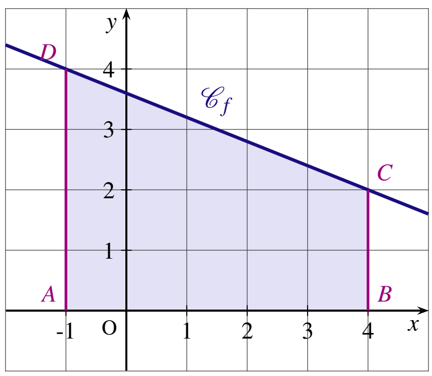
EXEMPLES

1. Calculons $\displaystyle\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$.

   La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x)=-0{,}4x+3{,}6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

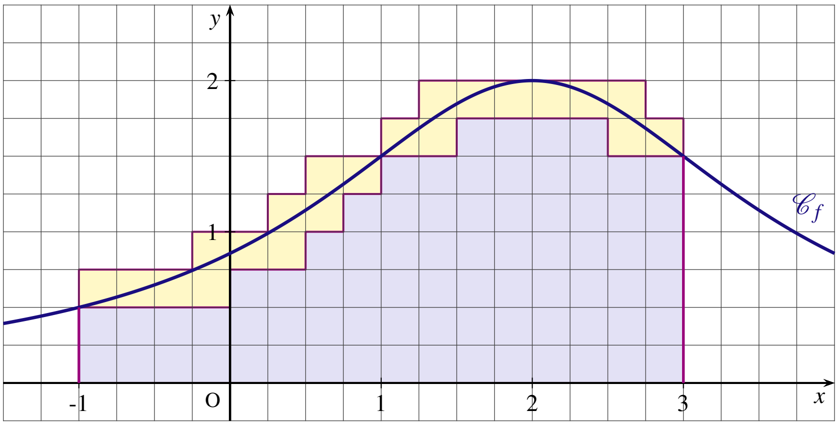
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$



2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4x+7}$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.

   Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

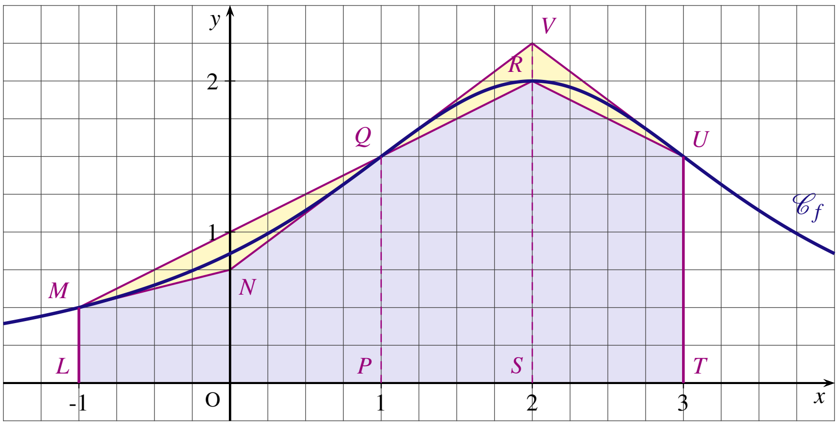


Sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=3$.

On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement

$$\frac{75}{16}\leqslant\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 6$$

Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites (MN) , (NV) et (VU) étant les tangentes respectives à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 1 et 3.



L'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ est comprise entre la somme des aires des trapèzes $LMNO$, $NOPQ$, $PQRS$ et $RSTU$ et, la somme des aires des trapèzes $LMPQ$, $PQVS$ et $VSTU$. Soit

$$0{,}625+1{,}25+1{,}75+1{,}75\leqslant\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2+1{,}875++1{,}875 \iff 5{,}375\leqslant\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 5{,}75$$

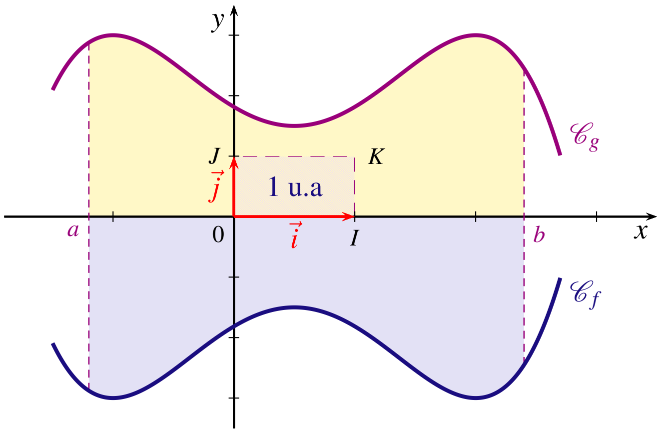
Remarque :

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{6}{x^2-4x+7}\right)\mathrm{d}x\approx 5{,}44$.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{6}{x^2-4x+7}\right)\mathrm{d}x=\pi\sqrt{3}$.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

4 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET PRIMITIVE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

THÉORÈME (*admis*)

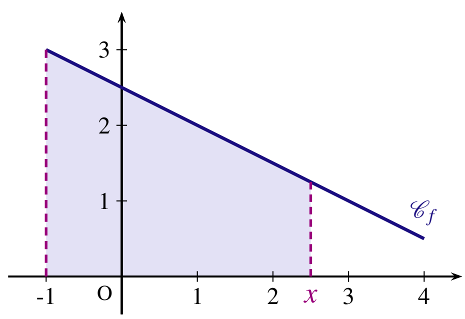
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.
Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.

On a donc $F(x)=\dfrac{(3+(-0{,}5x+2{,}5))\times(x+1)}{2}=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{11}{4}$

La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $F'(x)=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}=f(x)$.



II INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a à b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b)-F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$; ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.
En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x)=F(x)+k$ d'où

$$G(b)-G(a) = (F(b)+k)-(F(a)+k) = F(b)-F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \left(x-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}-\ln(x)-\frac{\mathrm{e}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\ln(\mathrm{e})-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\ln(1)-\frac{\mathrm{e}}{1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a)-F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$$

III PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.
Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$.
On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}\left(-x^2+3x+1\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3}\\ &= \left(-9+\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+6-2\right)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.
On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

✻ DÉMONSTRATION

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a))\\ &= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(t)\mathrm{d}t &= \alpha F(b) - \alpha F(a)\\ &= \alpha\,(F(b)-F(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

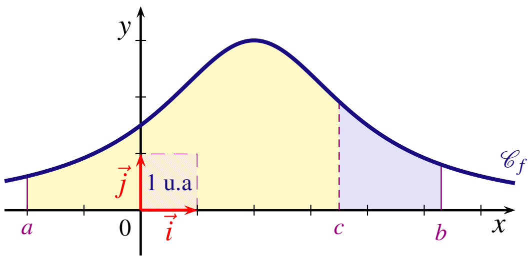
DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= (F(c)-F(a)) + (F(b)-F(c))\\ &= F(b)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$. L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$.



4 ORDRE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x)-g(x) \leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f-g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a \leqslant b$ et $f-g \leqslant 0$ alors

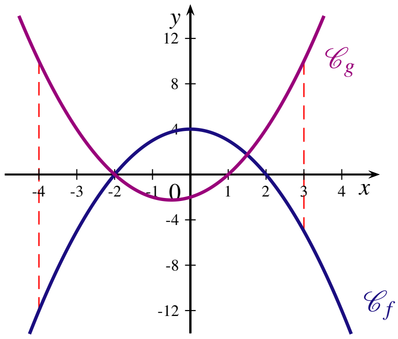
$$\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Attention la réciproque est fausse :
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$ et $g(x)=x^2+x-2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x &= \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}\\ &= \left(12-\frac{27}{3}\right)-\left(-16+\frac{64}{3}\right)\\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-4}^{3}\\ &= \left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}-6\right)-\left(-\frac{64}{3}+\frac{16}{2}+8\right)\\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



IV INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

✻ DÉMONSTRATION

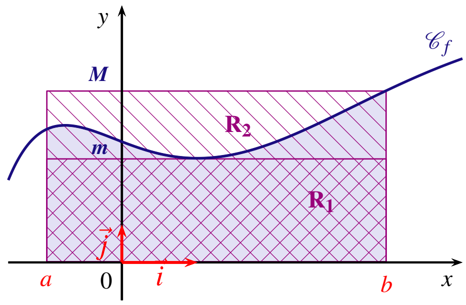
Les fonctions définies sur $[a;b]$ par $x \longmapsto m$ et $x \longmapsto M$ sont constantes donc continues.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$ ($a < b$), $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow m\int_a^b \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
R_1 de côtés m et $b-a$;
R_2 de côtés M et $b-a$.



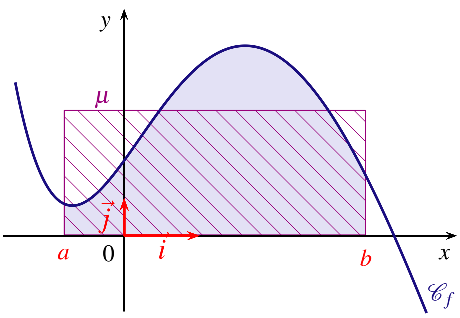
2 VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

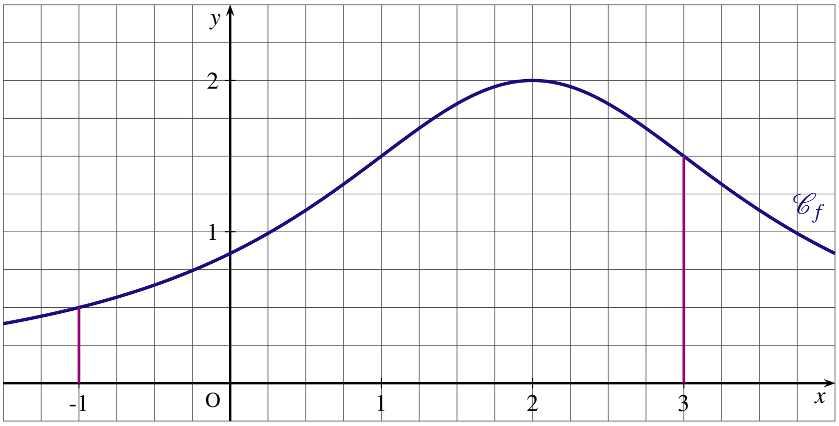
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$.



EXERCICE 1

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

   Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.



2. La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4x + 7}$.

   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement au centième près, de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

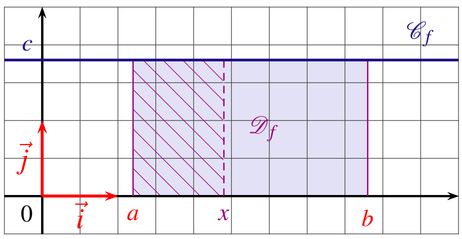
EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm. a et b sont deux réels tels que $a < b$.
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie et positive sur l'intervalle $[a;b]$.
$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\mathscr{D}_f$ le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

FONCTION CONSTANTE :

Soit c un réel positif. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c$.

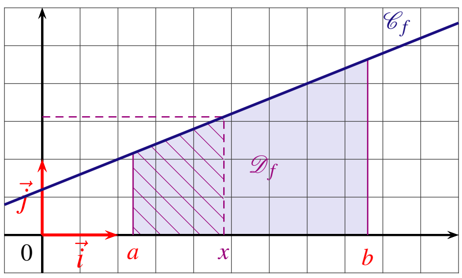
1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on ?



FONCTION AFFINE :

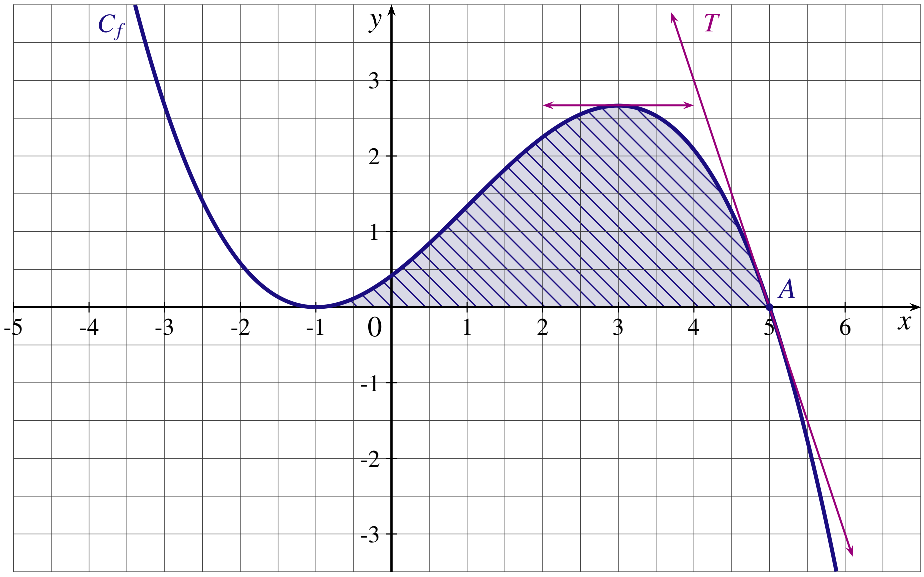
f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont des réels fixés avec m non nul. f est supposée positive sur $[a;b]$.

1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on ?

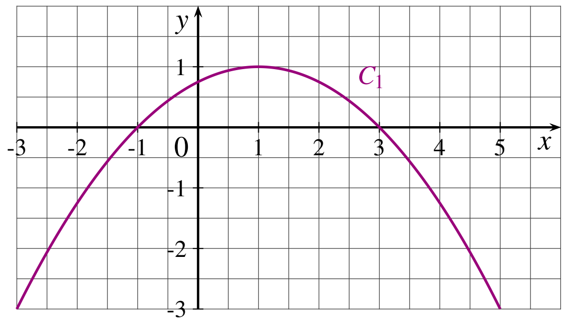


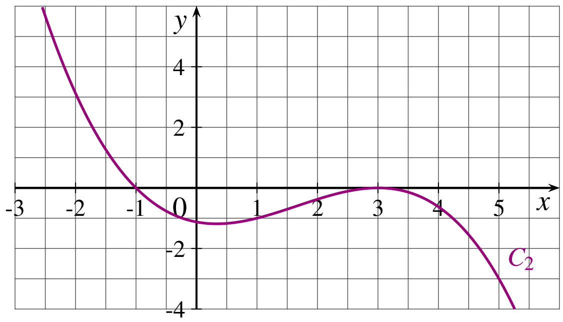
EXERCICE 3

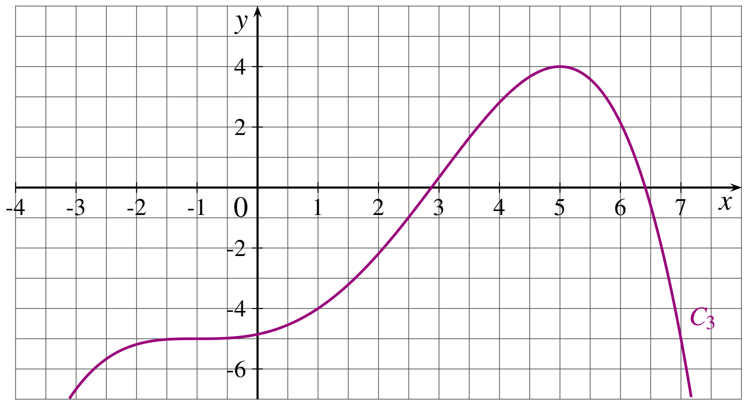
La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4;3)$.
On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.



1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F.
   a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.







   b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.

EXERCICE 4

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

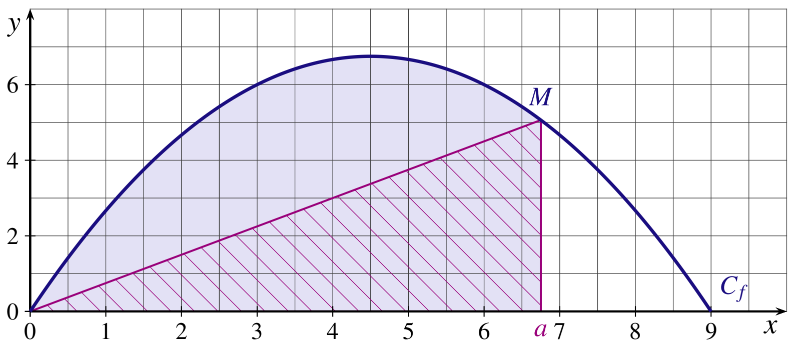
1. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right)\,\mathrm{d}x$
2. $B = \displaystyle\int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\,\mathrm{d}x$
3. $C = \displaystyle\int_{-2}^{1} 2\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $D = \displaystyle\int_{0}^{\ln 2} 2\mathrm{e}^{x} \times \left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)\,\mathrm{d}x$
5. $E = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
6. $F = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$
7. $G = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t$
8. $H = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2t + \pi\right)\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 5

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
2. Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2;2]$?

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = 3x - \dfrac{x^2}{3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

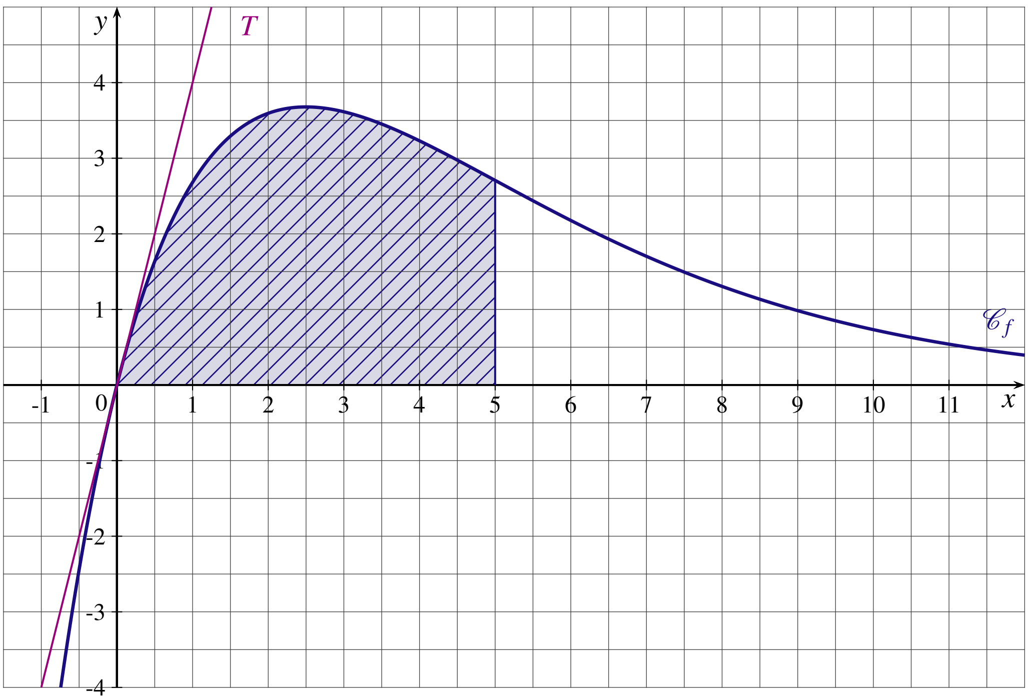


L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire A en fonction de a du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
3. Déterminer a pour que $A = 2T$.

EXERCICE 7

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1) \leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12 \leqslant F(5) - F(0) \leqslant 18$.

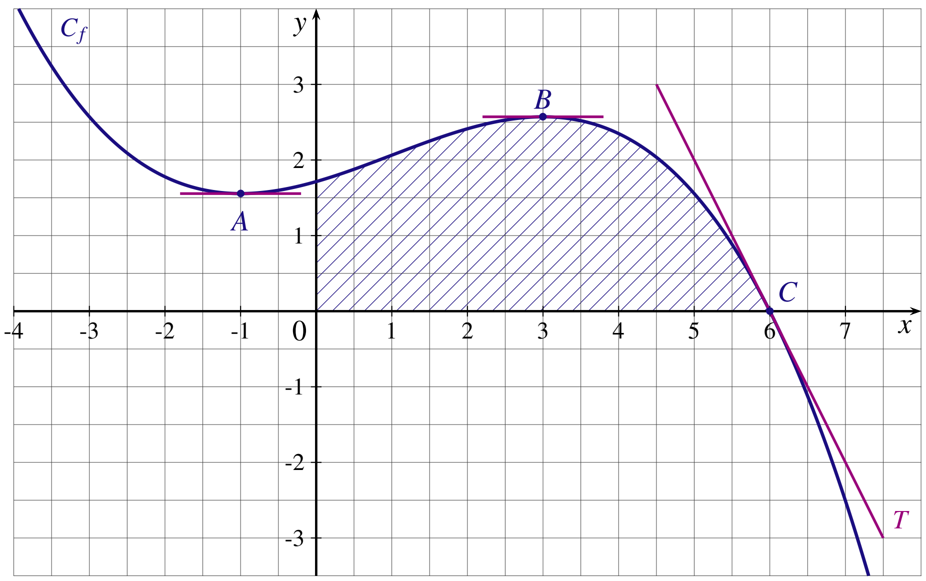
PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.

1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.
   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} -0,4a & = & 4 \\ a - 0,4b & = & 0 \end{cases}$
   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
2. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de A.

EXERCICE 8

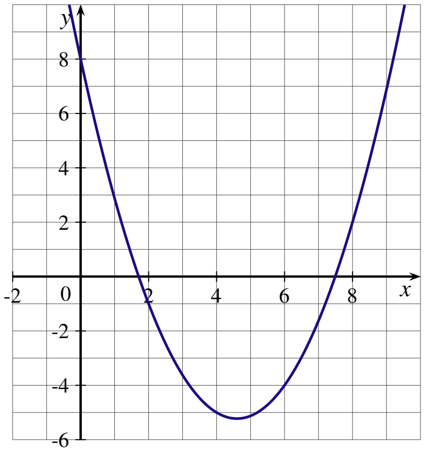
La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $C(6;0)$ passe par le point de coordonnées $(5;2)$

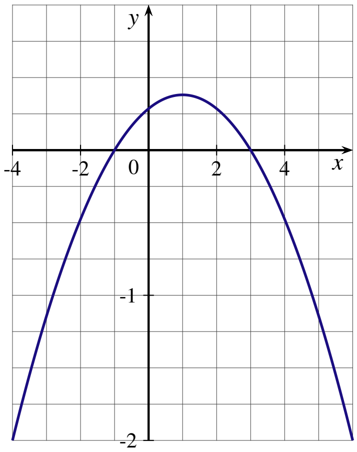


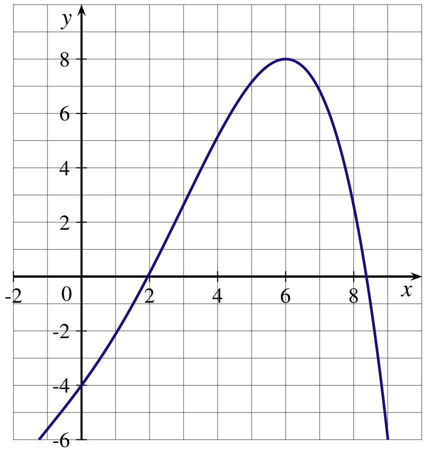
On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.
À partir du graphique et des renseignements fournis, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(6)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' et une autre de la primitive F.

   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.


Courbe C_1


Courbe C_2


Courbe C_3

4. Donner une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré.

EXERCICE 9 (*D'après sujet bac Antilles Guyane 2015*)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien.

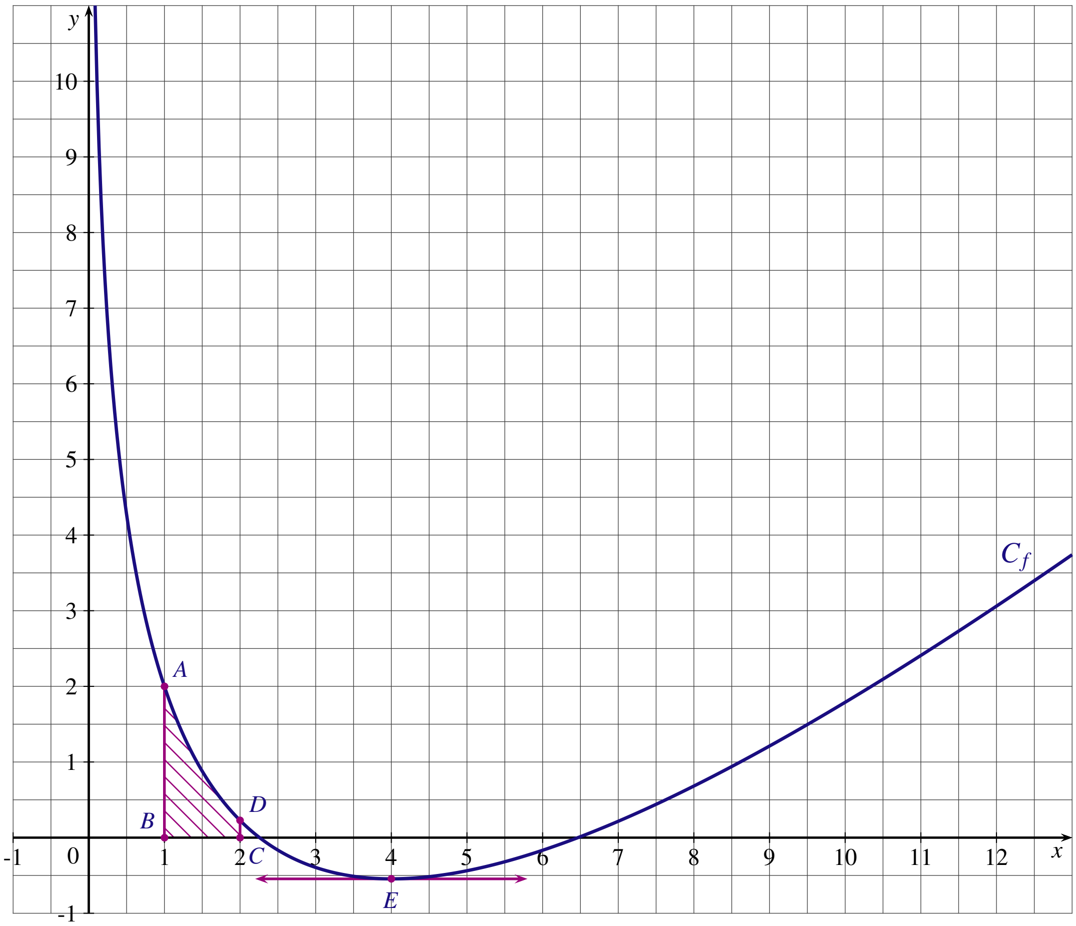
PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b\ln(x) + 1$$

où a et b sont deux nombres réels.

C_f est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.
Les points A et E sont deux points de la courbe C_f.
Le point A a pour coordonnées $(1;2)$ et le point E a pour abscisse 4.
La tangente à C_f au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

PARTIE B

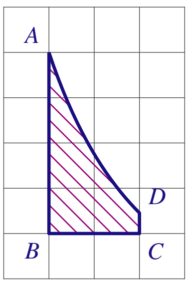
Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4\ln(x) + 1$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en justifiant la réponse. Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en justifiant la réponse (on pourra factoriser l'expression de $f(x)$ par x).
3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau des variations de f.

PARTIE C

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.
La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique précédent.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe C_f d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$ et $(2;0)$.



Soit la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$G(x) = x\ln(x) - x.$$

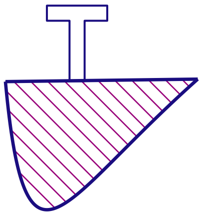
1. Calculer la dérivée G' de G.
2. En déduire une primitive F de la fonction f donnée dans la partie B sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la pièce en unité d'aire ; puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 10 (*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2015*)

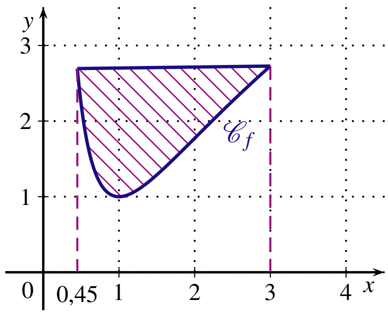
Une entreprise fabriquant des planches de surf conçoit un nouveau modèle d'aileron. Cet aileron est composé de deux parties :

— la partie supérieure ou « boîtier » permettant de fixer l'aileron à la planche,

— la partie inférieure destinée à être immergée dans l'eau.



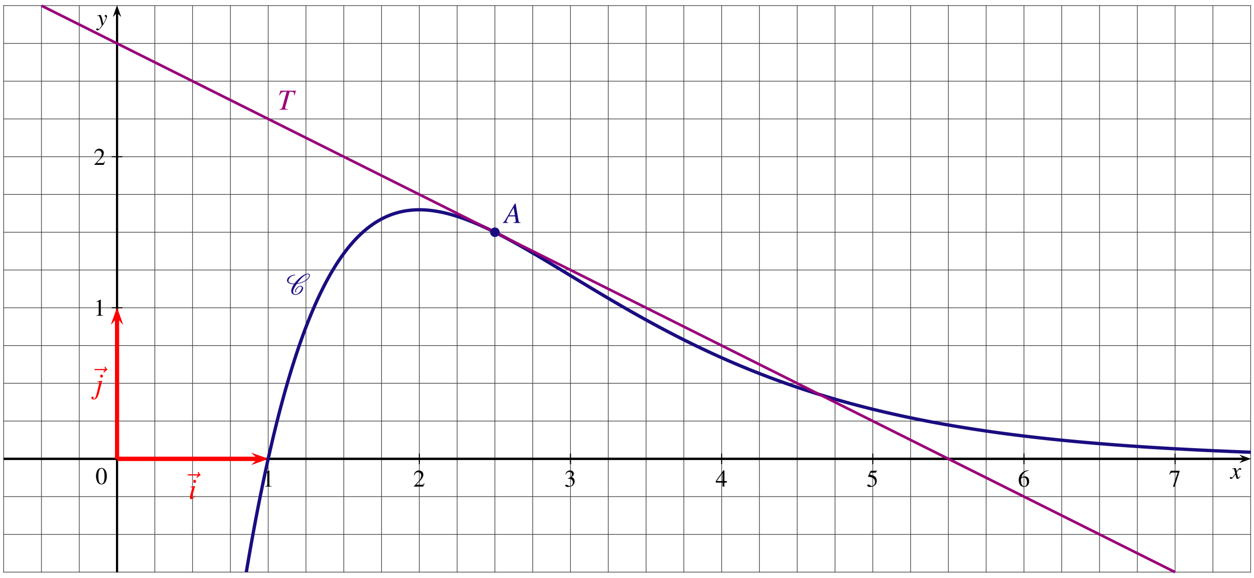
Pour estimer la quantité de matière nécessaire à la fabrication de la partie inférieure de l'aileron, l'entreprise souhaite connaître le mieux possible l'aire A du domaine hachuré.
Pour modéliser le profil latéral de la partie inférieure on se place dans un repère orthonormé avec une échelle de 1 carreau pour 10 cm et on se propose d'utiliser, pour des abscisses comprises entre 0,45 et 3, la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{a}{x} + b + 4\ln(x)$ où a et b sont des constantes réelles qui restent à déterminer.



1. Évaluer l'aire A en nombre entier de carreaux en expliquant votre démarche.
2. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
3. Vérifier que le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.
4. Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = (4x+4)\ln(x) - 7x$.
   Montrer que F est une primitive de f.
5. Déterminer en cm^2 près une valeur approchée de l'aire A.

EXERCICE 11 (*D'après sujet bac Antilles Guyane 2016*)

Sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



PARTIE A - Étude graphique

La droite T est tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(2{,}5;1{,}5)$ et d'ordonnée à l'origine 2,75.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$;
2. $f'(2{,}5)$;
3. Une équation de la tangente T ;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

PARTIE B - Modélisation

On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+2,5}$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants $f(1)$; $f'(2{,}5)$.
3. Déduire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b.
4. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

PARTIE C - Étude algébrique

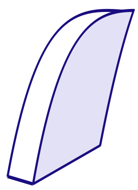
On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2,5}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
4. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

PARTIE D - Application

On souhaite déterminer l'aire S en unité d'aire de la surface d'une des faces principales du boîtier plastique de l'appareil auditif schématisé ci-contre.
Une modélisation mathématique a permis de représenter cette surface.



Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ cette surface correspond à la partie du plan limitée par :

— l'axe des abscisses ;
— les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2{,}5$;
— la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f étudiée précédemment ;
— la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = -2x^2 + 12x - 16.$$

1. Sur l'annexe fournie, hachurer la surface décrite précédemment.

Pour déterminer l'aire S de cette surface, on décompose le calcul en deux parties.

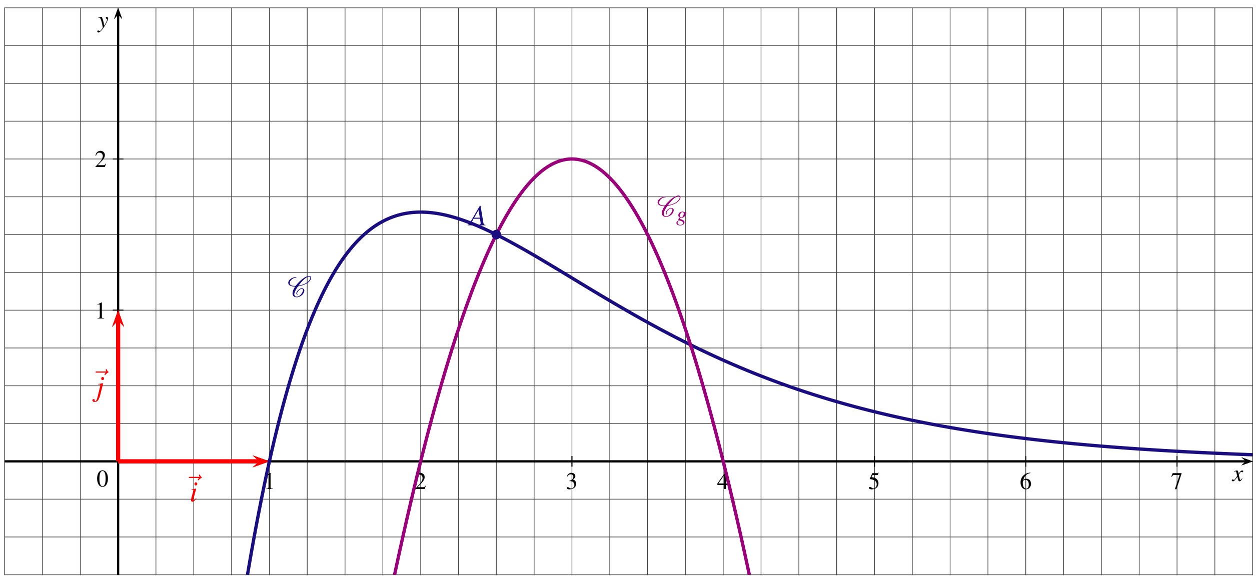
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_2^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. on souhaite calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_1^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction dont une expression est donnée dans la partie C.
   a) Vérifier qu'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par :

   $$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = -x\mathrm{e}^{-x+2,5}.$$

   b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire S en unité d'aire.
5. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire S en unité d'aire.

ANNEXE

À rendre avec la copie



EXERCICE 12 (*D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015*)

« Avec une centaine de décès en moyenne par an, le monoxyde de carbone (CO) est la première cause de mortalité accidentelle par intoxication en France. [...] Pourtant certains symptômes annonciateurs d'une intoxication au monoxyde de carbone existent. Maux de tête, nausées et vomissements sont notamment les premiers signes qui doivent alerter. Bien identifiés, ils permettent de réagir rapidement et d'éviter le pire. »

Source Ministère des Affaires Sociales et de la Santé. (octobre 2012)

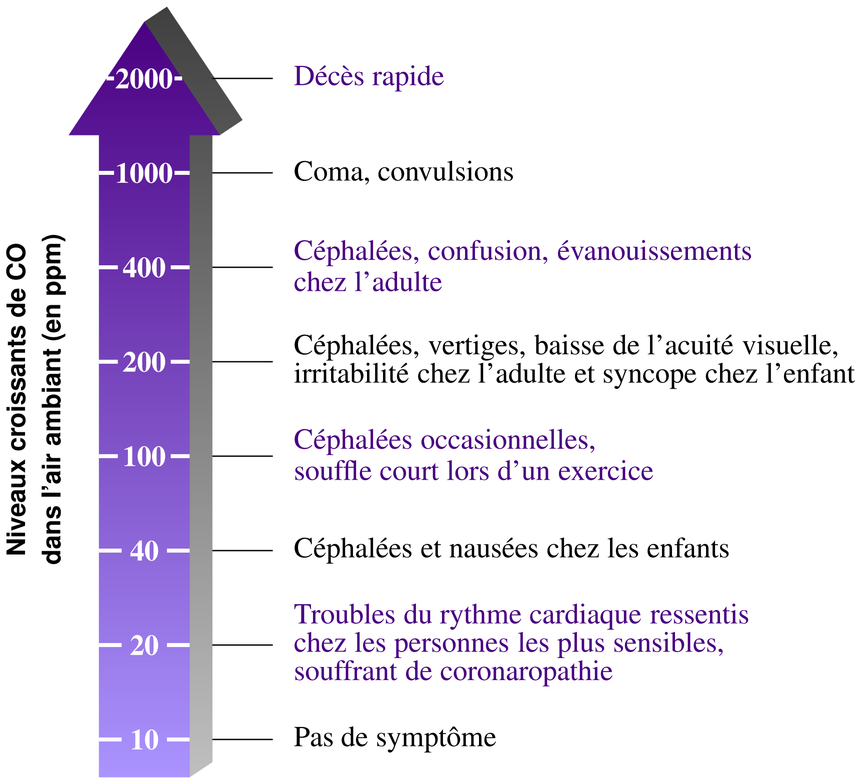
DOCUMENT 1

La société COalerte fabrique un modèle de détecteurs qui enregistre en temps réel la concentration de monoxyde de carbone en parties par million (ppm).
Un tel détecteur produit un signal d'alarme respectant les modalités fixées par la norme européenne EN 50 291 ci-dessous.
Il déclenche un signal d'alarme :

— si la concentration est supérieure à 30 ppm pendant au moins 120 minutes ;
— si la concentration est supérieure à 50 ppm pendant au moins 60 minutes ;
— si la concentration est supérieure à 100 ppm pendant au moins 10 minutes ;
— si la concentration est supérieure à 300 ppm pendant au moins 3 minutes.

DOCUMENT 2

Symptômes et effets sur la santé du monoxyde de carbone

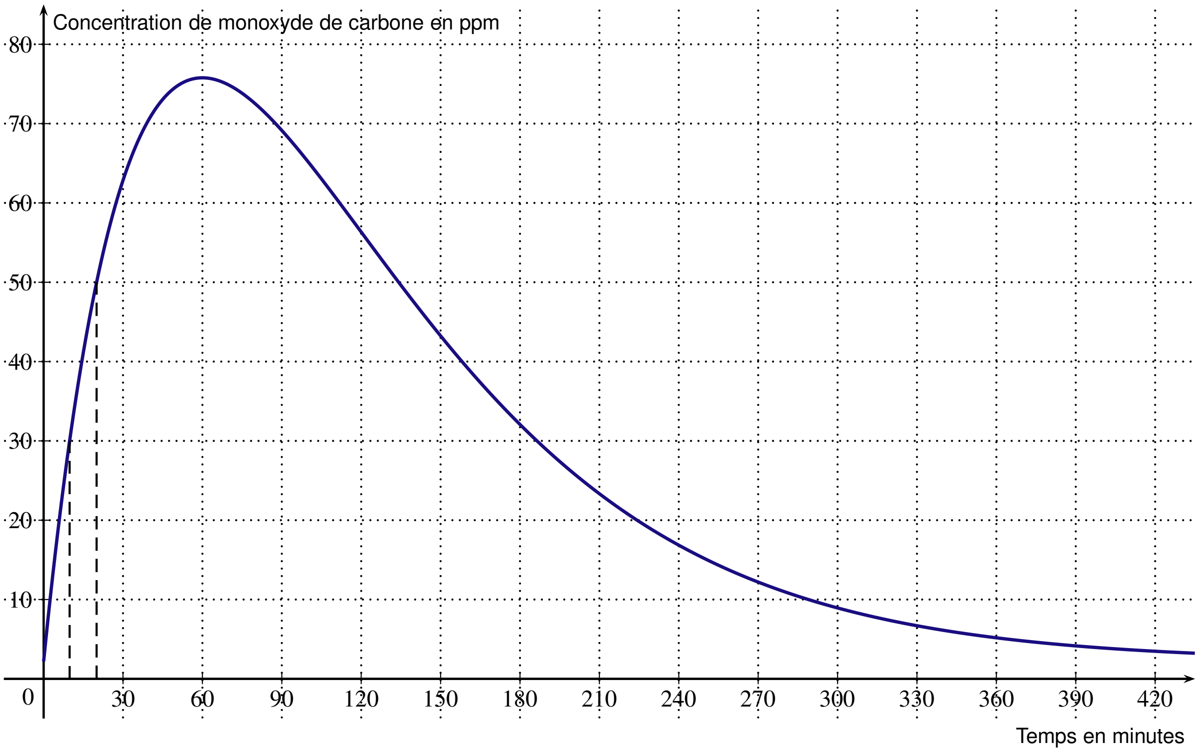


Source : Commission européenne 2014.

Un laboratoire d'essais procède à des tests sur un détecteur produit par la société COalerte en simulant un accident qui provoque une concentration anormale de monoxyde de carbone dans une pièce.

PARTIE A

Le laboratoire relève la concentration de monoxyde de carbone en fonction du temps, exprimé en heures. Les enregistrements effectués sur une période de 8 heures se traduisent par la représentation graphique ci-dessous.



1. Estimer au bout de combien de temps devrait retentir un signal d'alarme.
2. Une personne présente dans la pièce depuis le début d'un tel accident risquerait-elle de présenter des symptômes ? Si oui, lesquels ?

PARTIE B

Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
La concentration de monoxyde de carbone exprimée en ppm dans la pièce en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisée par la fonction f définie sur $[0;8]$ par

$$f(t) = 2{,}2 + 200t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Calculer la concentration de monoxyde de carbone en ppm dans la pièce :
   a) au moment de l'accident ;
   b) 30 minutes après.
2. À l'aide du graphique de la partie A, conjecturer les variations de la concentration de monoxyde de carbone dans la pièce en fonction du temps.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
   a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;8]$, $f'(t) = 200(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
   b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0;8]$.
   c) Valider ou invalider la conjecture émise à la question 2.
4. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $F(t) = 2{,}2t - 200(t+1)\mathrm{e}^{-t}$. On admet que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
   a) On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre réel défini par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la valeur moyenne de la concentration de monoxyde de carbone lors des 8 heures qui ont suivi l'accident.

b) Pour des raisons de sécurité, le ministère du travail fixe un seuil pour la concentration moyenne de monoxyde de carbone. Ce seuil est de 50 ppm pour une période de 8 heures.
La sécurité des personnes présentes dans la pièce aurait-elle été remise en cause lors de l'accident simulé ?

EXERCICE 13

(*D'après sujet bac Polynésie 2016*)

PARTIE A : Lecture graphique

On considère la courbe C associée à une fonction f représentée en annexe 2 avec la droite T, tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1;1{,}5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :
   a) $f(x) \geqslant 1$.
   b) $f'(x) \geqslant 0$.
2. a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point de coordonnées $(0;1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2;7)$.
   b) En déduire le nombre dérivé $f'(0)$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 5x$.

1. Déterminer, en la justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. a) Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   b) Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

PARTIE C : Calcul d'aire

On admet :

— que la courbe C de la partie A est la représentation de la fonction f définie dans la partie B ;

— que la courbe C se situe « au-dessus » de la droite tangente T sur $\mathbb{R}$.

L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe C, la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1{,}5$.

1. Hachurer sur le dessin, en annexe 2, l'aire $\mathscr{A}$ que l'on veut déterminer.
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\text{pour tout réel } x, g(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1.$$
   b) Justifier que l'aire $\mathscr{A}$ recherchée vaut, en unité d'aire : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{1{,}5} g(x)\mathrm{d}x$.
   c) En déduire la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de $\mathscr{A}$.

ANNEXE 2
à rendre avec la copie