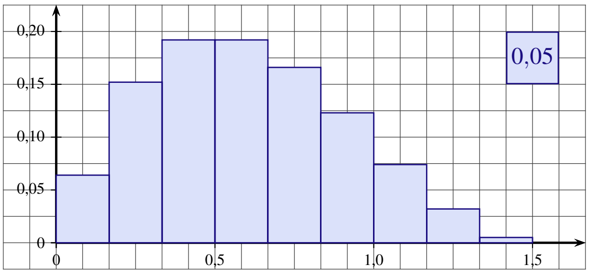
I INTRODUCTION

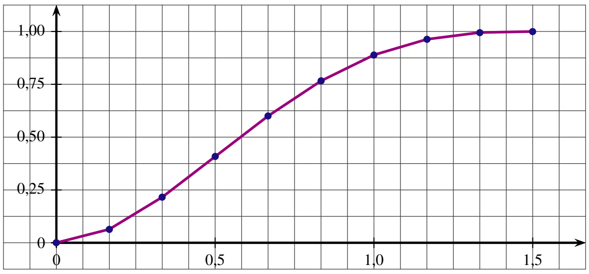
Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont dites continues.
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$	$[80;90]$
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.

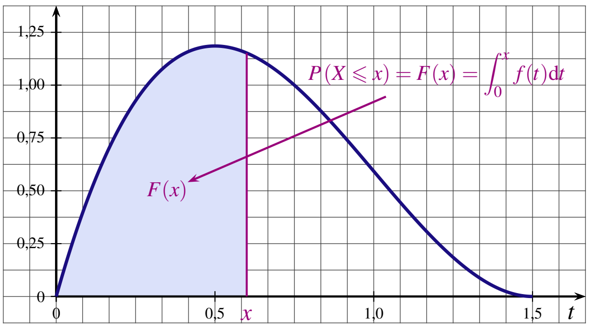


Histogramme

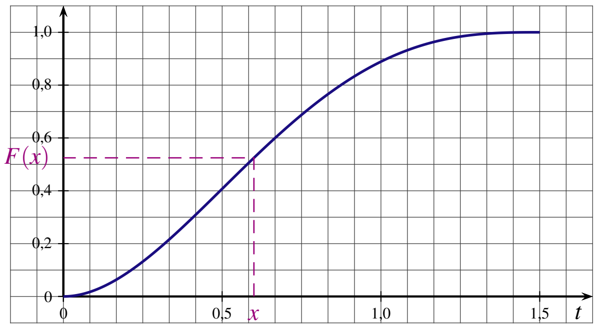


Polygone des fréquences cumulées

On modélise la situation à l'aide d'une variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations de cet hôpital avec $X \in [0;1,5]$.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements étudiés sont ceux qui correspondent à des intervalles du type $X \in [0;0,3]$, $0,5 \leqslant X \leqslant 1$ ou $X > 0,5$.
Le calcul de la probabilité $P(X = 0,345)$ que le temps d'attente soit exactement de 20 minutes et 42 secondes n'a pas de sens.
Dans le cas d'une variable aléatoire continue le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe représentative de la fonction de répartition F permettant de calculer des probabilités.
On suppose que la fonction F est définie sur l'intervalle $[0;1,5]$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ où f est la fonction définie sur $[0;1,5]$ par $f(t) = \frac{64t^3}{27} - \frac{64t^2}{9} + \frac{16t}{3}$. On dit que f est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X.



Fonction de densité



Fonction de répartition

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1,5]$, $F(x)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction de densité f, les axes du repère et la droite d'équation $t = x$.
On en déduit que :

— $P(X \leqslant 0,3) = F(0,3) = \int_0^{0,3} f(t)\mathrm{d}t = 0,1808$.

— $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(0,5) = \int_{0,5}^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{13}{27}$.

— $P(X > 0,5) = 1 - P(X \leqslant 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \int_0^{0,5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{16}{27}$.

II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2 FONCTION DE DENSITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$ est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$.

— La fonction f est dérivable sur $[0;1{,}5]$ donc continue.

— Pour tout réel t, $\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}=\dfrac{16t\left(4t^2-12t+9\right)}{27}=\dfrac{16t\,(2t-3)^2}{27}$.
Par conséquent, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;1{,}5]$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur sur $[0;1{,}5]$ par $F(t)=\dfrac{16t^4}{27}-\dfrac{64t^3}{27}+\dfrac{8t^2}{3}$ d'où

$$\int_0^{1,5} f(t)\mathrm{d}t = F(1{,}5)-F(0)=1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$

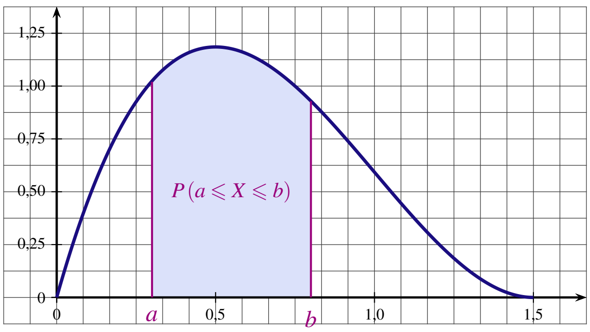
3 LOI DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X\in[a;b]$ est :

$$P(X\in[a;b])=P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

REMARQUE

$P(a\leqslant X\leqslant b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité étudiée dans l'exemple précédent.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0;1{,}5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X=a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$
2. $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$
3. $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X)=\int_a^b t\times f(t)\mathrm{d}t$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations dont la fonction de densité f est définie sur $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{1,5}\frac{64t^4}{27}-\frac{64t^3}{9}+\frac{16t^2}{3}\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{64t^5}{135}-\frac{16t^4}{9}+\frac{16t^3}{9}\right]_0^{1,5}\\&=3{,}6-9+6\\&=0{,}6\end{aligned}$$

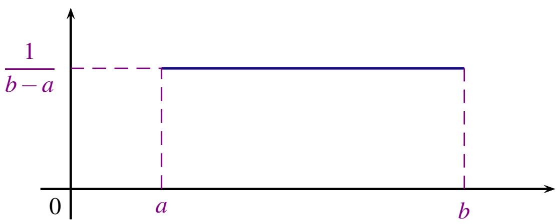
Le temps d'attente moyen aux consultations est de 0,6 h soit 36 minutes.

III LOI UNIFORME

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ si la densité de probabilité de X est la fonction constante f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

— f est continue et positive sur $[a;b]$.

— $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1.$

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

❊ DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} P(c \leqslant X \leqslant d) &= \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d \\ &= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

❊ DÉMONSTRATION

Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0,5;9,5]$ par $f(t) = \dfrac{1}{9,5-0,5} = \dfrac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

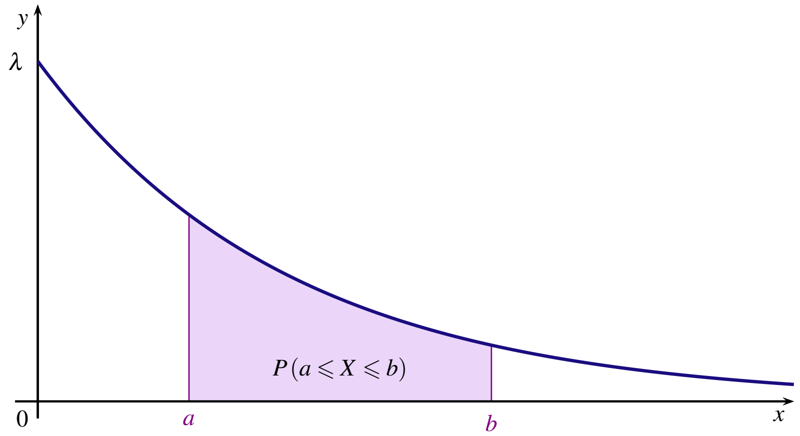
1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X \leqslant 2) = \dfrac{2-0,5}{9} = \dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X \geqslant 3) = \dfrac{9,5-3}{9} = \dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \dfrac{0,5+9,5}{2} = 5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

IV LOI EXPONENTIELLE

1 DÉFINITION

Soit λ un nombre réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[0;+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ si la densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

REMARQUE



La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ si, pour tout intervalle fermé $I=[a;b]$ inclus dans $[0;+\infty[$, la probabilité de l'évènement « $X \in I$ » est l'aire du domaine $\{M(x;y)\,;x\in I \text{ et } 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$, où f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

2 PROPRIÉTÉS

Soit X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Pour tout intervalle $I=[a;b]$ avec $0\leqslant a\leqslant b$, $P(a\leqslant X\leqslant b)=\mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$.
2. Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$.
3. Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$.

✼ DÉMONSTRATION

X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, a et b deux réels tels que $0\leqslant a\leqslant b$

1. $P(a\leqslant X\leqslant b)=\displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_a^b=\mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$.
2. $P(X\leqslant a)=P(0\leqslant X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda\times 0}-\mathrm{e}^{-\lambda a}=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$.

REMARQUE

L'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction de densité de la loi exponentielle est égale à 1 :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}P(X\leqslant x)=\lim_{x\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}=1$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ est le réel

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

EXEMPLE

La durée de vie en heures, d'une ampoule led est une variable aléatoire D, qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,00005.

1. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit inférieure à 20 000 heures ?
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit comprise entre 20 000 et 30 000 heures ?
3. Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?

Solution
La durée de vie en heures D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}00005$.

1. La probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit inférieure à 20 000 heures est :
$$P(D \leqslant 20000) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}00005 \times 20000} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$$
2. La probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit comprise entre 20 000 et 30 000 heures est :
$$P(20000 \leqslant D \leqslant 30000) = \mathrm{e}^{-0{,}00005 \times 20000} - \mathrm{e}^{-0{,}00005 \times 30000} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0{,}145$$
3. La durée de vie moyenne d'une ampoule est $\dfrac{1}{0{,}00005} = 20000$ heures.

V LOI NORMALE

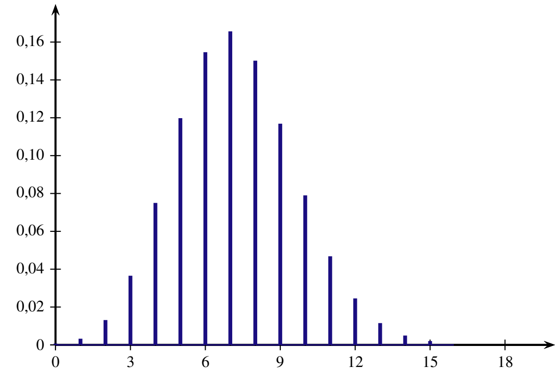
1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE

RAPPEL

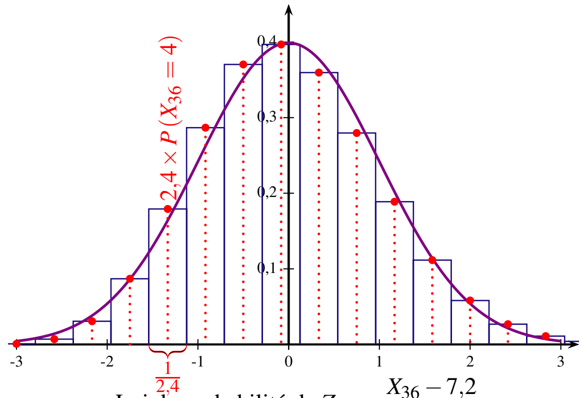
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.
L'espérance mathématique est $E(X) = np$; l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

LA FONCTION DE GAUSS

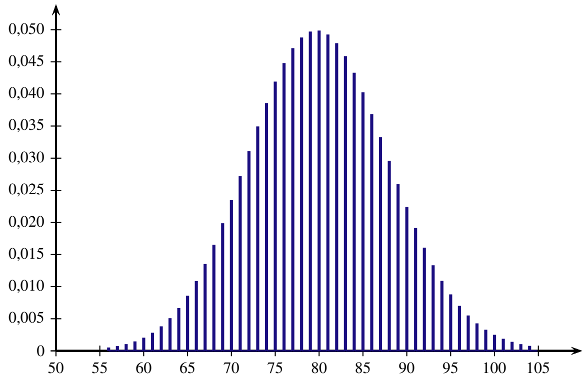
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p.
On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes :
$$z_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :
$$P(Z_n = z_k) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(X_n = k) = p_k$$
Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k, alors Z_n prend la valeur $\dfrac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k.
On a représenté graphiquement ci-dessous, pour $X_n \in [E(X_n) - 3\sigma_n ; E(X_n) + 3\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n = 36$ et $n = 400$ avec $p = 0{,}2$.
La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n = z_k) = p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n \times P(X_n = k)$ et $\dfrac{1}{\sigma_n}$.



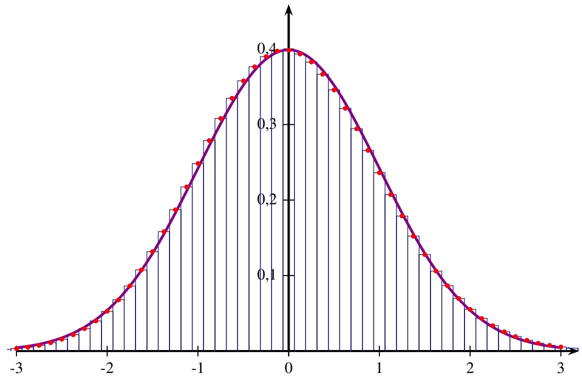
Loi binomiale de paramètres $n=36$ et $p=0,2$



Loi de probabilité de $Z_{36}=\dfrac{X_{36}-7,2}{2,4}$



Loi binomiale de paramètres $n=400$ et $p=0,2$



Loi de probabilité de $Z_{400}=\dfrac{X_{400}-80}{8}$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction la fonction de Gauss :

$$P\left(a\leqslant Z_n\leqslant b\right)\approx\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

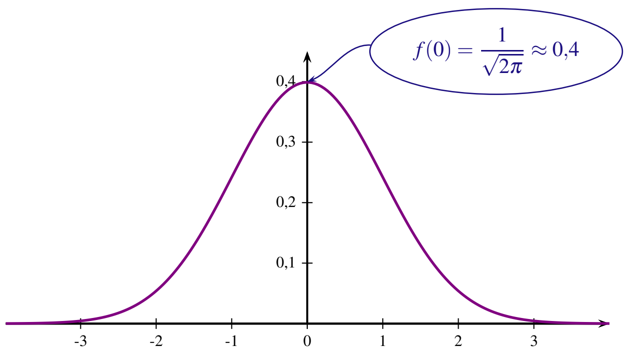
2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



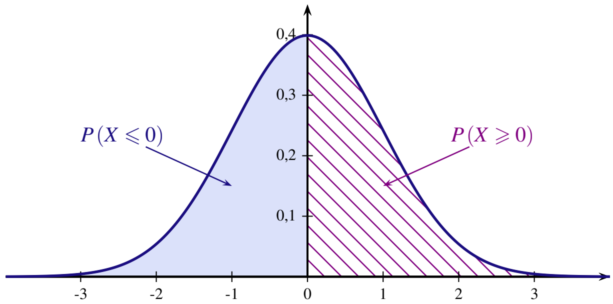
ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $E(X)=0$ et $\sigma(X)=1$.

PROPRIÉTÉ

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X\leqslant 0)$ et $P(X\geqslant 0)$ sont égales, d'où $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)$.
Comme $P(X\leqslant 0)+P(X>0)=1$, on en déduit que

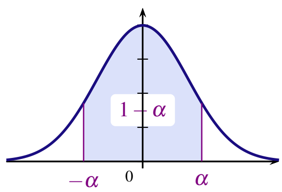
$$P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)=\frac{1}{2}$$



Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)=\dfrac{1}{2}$.

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

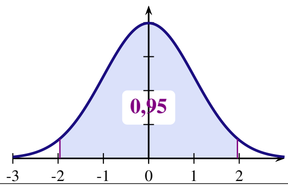
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout réel $\alpha\in]0;1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$.



On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

$$P(-1{,}96\leqslant X\leqslant 1{,}96)\approx 0{,}95$$

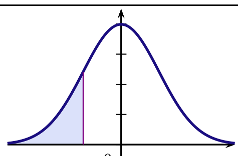
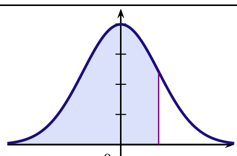
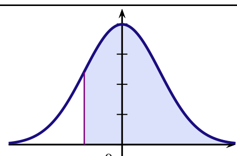
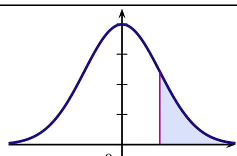


CALCULS

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X\leqslant a)$ ou $P(X\geqslant a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a > 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X \leqslant a)$	$0{,}5 + P(a \leqslant X < 0)$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

3 LOI NORMALE

DÉFINITION

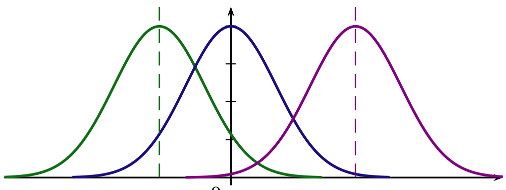
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

REMARQUES :

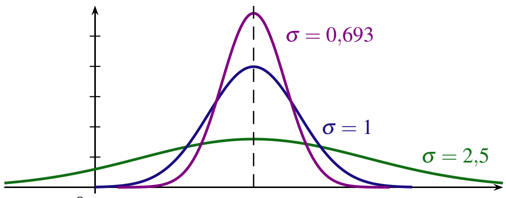
— Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors sa variance $V(X) = \sigma^2$.

— La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

— L'espérance μ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.



— L'écart-type $\sigma > 0$ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.



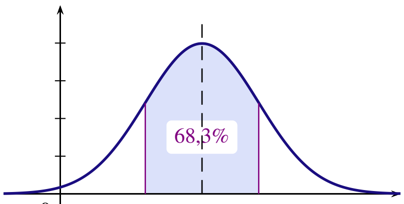
INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors :

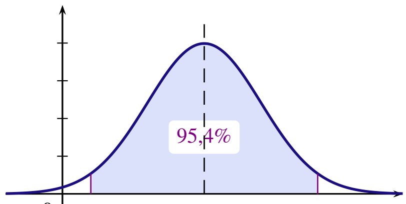
— $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}683$.

— $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$.

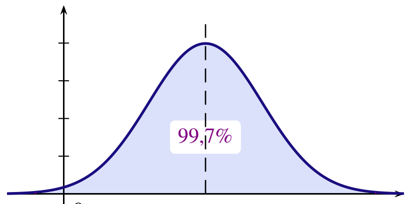
— $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.



$X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$



$X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$



$X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

LOI NORMALE ET CALCULATRICES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a \leqslant X \leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	`normalFrep`(a,b,μ,σ) ou `normalCdf`(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd `normCD` (a,b,σ,μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leqslant k) = \alpha$	`FracNormale`(α,μ,σ) ou `invNorm`(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN `InvNormCD`(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

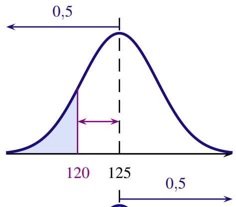
EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;4,5)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

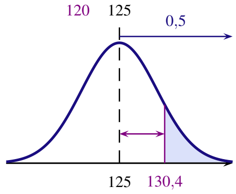
1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \geqslant 130,4)$; $P(X \geqslant 118,7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0,871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0,02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0,81$.

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0,495$.

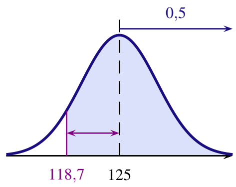
   b)
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0,5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0,133 \end{aligned}$$



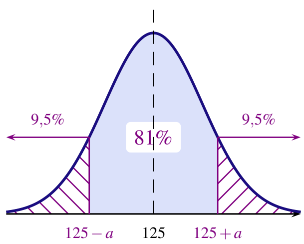
   c)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130,4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130,4) \\ &= 0,5 - P(125 \leqslant X < 130,4) \\ &\approx 0,115 \end{aligned}$$



   d)
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118,7) &= P(118,7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0,5 + P(118,7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0,919 \end{aligned}$$



2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0,871$ pour $a \approx 130,09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or
$$P(X \geqslant b) = 0,02 \iff 1 - P(X < b) = 0,02 \iff P(X < b) = 0,98$$
   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134,242$.
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0,81$.
   La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(125;4,5)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
   On en déduit que :



$$\begin{aligned} P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0,81 &\iff 1 - 2 \times P(X < 125 - a) = 0,81 \\ &\iff P(X < 125 - a) = \frac{1 - 0,81}{2} = 0,095 \end{aligned}$$

   Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119,102$ d'où $a \approx 8,898$ et $125 + a \approx 130,898$.
   Donc $I = [119,102; 130,898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119,1; 130,9]$)

VI APPLICATION À LA PRISE DE DÉCISION

1 INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE AU SEUIL DE 95%

On s'intéresse à un caractère de proportion p connue au sein d'une population. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère étudié.
La variable aléatoire X_n qui à chaque échantillon aléatoire de taille n associe le nombre d'individus ayant le caractère étudié suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. La fréquence F_n du caractère est $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on admet que X_n suit approximativement la loi normale d'espérance $\mu = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
On a alors,

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \leqslant X_n \leqslant \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95 \iff P\left(p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 0{,}95$$

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire F_n, l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

EXEMPLE

En première partie de soirée une série a attiré près de 5,7 millions de téléspectateurs soit 28% de part d'audience.
On interroge 120 personnes ayant regardé la télévision en première partie de soirée.
Avec $p = 0{,}28$ et $n = 120$ on a $np = 33{,}6$ et $n(1-p) = 86{,}4$, les critères d'approximation étant vérifiés, un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence f des téléspectateurs qui ont regardé cette série est :

$$I_{120} = \left[0{,}28 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{120}} ; 0{,}28 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{120}}\right]$$

Soit en arrondissant les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près, $I_{120} \approx [0{,}199 ; 0{,}361]$.

2 DÉCISION À PARTIR DE LA FRÉQUENCE D'UN ÉCHANTILLON

Quand les critères d'approximation sont vérifiés, l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n permet de déterminer des seuils de décision :

— pour accepter ou rejeter l'hypothèse selon laquelle p est la proportion d'un caractère dans la population ;
— pour déterminer si un échantillon issu de la population est représentatif.

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p.
On prélève dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.
Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on pose :

$$I_n = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

— Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I_n, alors on rejette l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.
— Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I_n, alors l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population est acceptée.

EXEMPLE

Dans un forum on a constaté que 42 personnes sur 120 ont regardé la série dont la part d'audience a été estimée à 28%. Ce résultat remet-il en question l'estimation de la part d'audience de la série ?
La fréquence observée de la part d'audience dans l'échantillon de taille 120 est : $f = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la part d'audience de la série dans les échantillons de taille 120 est $I_{120} = [0{,}199;0{,}361]$.
Comme $0{,}35 \in [0{,}199;0{,}361]$, l'estimation d'une part d'audience de 28 % pour la série n'est pas remise en cause.

3 INTERVALLE DE CONFIANCE

On cherche à estimer avec un certain niveau de confiance, la proportion p **inconnue** d'un caractère au sein d'une population à partir d'un échantillon de taille n.

DÉFINITION

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n.
Sous les conditions d'approximation $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion inconnue p dans la population est l'intervalle

$$I = \left[f - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right].$$

REMARQUES

— En pratique, les conditions de validité de la formule peuvent être vérifiées à posteriori.

— La différence entre deux fréquences f_1 et f_2 observées sur deux échantillons est considérée comme significative quand les intervalles de confiance correspondants sont disjoints.
Dans ce cas, on considère que les deux proportions p_1 et p_2 sont différentes. Dans le cas contraire, on ne peut pas conclure.

EXEMPLE

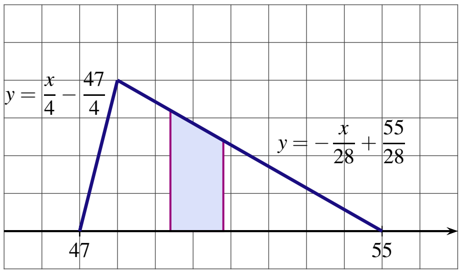
On interroge au hasard 100 clients ayant effectué des achats à la sortie d'une grande surface. Le temps d'attente aux caisses a été jugé raisonnable par 52 personnes interrogées.
Peut-on considérer que plus de la moitié des clients de cette grande surface estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable ?
Soit $f = \dfrac{52}{100} = 0{,}52$ la fréquence des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.
L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable est :

$$I = \left[0{,}52 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}52 \times 0{,}48}{100}} ; 0{,}52 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}52 \times 0{,}48}{100}} \right] \approx [0{,}42;0{,}62]$$

On a : $n = 100$, $0{,}42 \leqslant p \leqslant 0{,}62$, $100 \times 0{,}42 \leqslant np \leqslant 0{,}62$ et $100 \times (1 - 0{,}62) \leqslant n(1-p) \leqslant 100 \times (1 - 0{,}42)$.
Soit $n \geqslant 30$, $42 \leqslant np \leqslant 62$ et $38 \leqslant n(1-p) \leqslant 58$. Les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % sont vérifiées.
Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion de clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable est $[0{,}42;0{,}62]$.
La borne inférieure de l'intervalle de confiance est 0,42, il est donc possible que moins de 50% des clients trouvent que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47;55]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{47}{4} & \text{si } 47 \leqslant x < 48 \\ -\dfrac{x}{28} + \dfrac{55}{28} & \text{si } 48 \leqslant x \leqslant 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47;55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
   On a $C \in [47;55]$.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49{,}4;50{,}8]$.
   b) Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum ?
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable C. Interpréter le résultat.

EXERCICE 2

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{e^{0,5x}}{2}\,dx$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{e^{0,5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1{,}2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

EXERCICE 3

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

EXERCICE 4

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

EXERCICE 5

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?

2. Calculer la probabilité que le point M :
   a) soit le milieu I du segment $[AB]$;
   b) soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;
   c) soit plus près du point B que du milieu I.

EXERCICE 6

(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015)

Un sismologue déclare en janvier 2014 : « Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les vingt prochaines années est supérieur à 70 % ».

On s'intéresse au temps, exprimé en années, écoulé entre deux séismes majeurs le long de cette faille en Californie. On admet que ce temps est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

DOCUMENT 1

La faille de San Andreas, en Californie : séismes majeurs de magnitude supérieure ou égale à 5.

Ville	Année	Magnitude
Comté d'Orange	1769	6
San Diego	1800	6,5
San Francisco	1808	6
Fort Tejon	1857	8,3
Monts Santa Cruz	1865	6,5
Hayward	1868	6,9
San Francisco	1906	8,2
Santa Barbara	1925	6,3
Santa Barbara	1927	7,3
Long Beach	1933	6,3
Comté de Kern	1952	7,7
San Francisco	1957	5,3
San Fernando	1971	6,6
LomaPrieta	1989	7,1
Parkfield	2004	6,0
Los Angeles	2008	5,5
Mexicali	2010	7,2
Napa	2014	6,0

DOCUMENT 2

Rappels sur la loi exponentielle

— λ est un nombre réel strictement positif.
Une variable aléatoire suit **la loi exponentielle de paramètre** λ si sa densité de probabilité est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

— L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

1. Pour illustrer la situation un élève utilise un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Année	1769	1800	1808	1857	1865	1868	1906	1925	1927	1933	1952	1957	1971	1989	2004	2008	2010	2014	Total
2			31	8	49	8	3	38	19	2	6	19	5	14	18	15	4	2	4	245

   a) Proposer un titre pour la cellule A2 grisée.

b) Quelle formule a saisi l'élève dans la cellule C2 afin de compléter ce tableau jusqu'à la colonne S par « recopie automatique vers la droite » ?

2. a) Calculer en années la moyenne m, arrondie à 10^{-2} près, du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie.

   b) Justifier qu'une approximation du paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la variable aléatoire X est 0,069 4.

3. a) Calculer $P(X \leqslant 20)$ à 10^{-2} près.

   b) L'affirmation du sismologue paraît-elle cohérente avec cette modélisation par une loi exponentielle ?

4. Le dernier séisme majeur a eu lieu en 2014 à Napa. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres séismes majeurs le long de la faille de San Andreas, en Californie, avant 2050. On arrondira à 10^{-2} près.

5. a) Résoudre l'équation $1 - \mathrm{e}^{-0{,}0694t} = 0{,}95$.

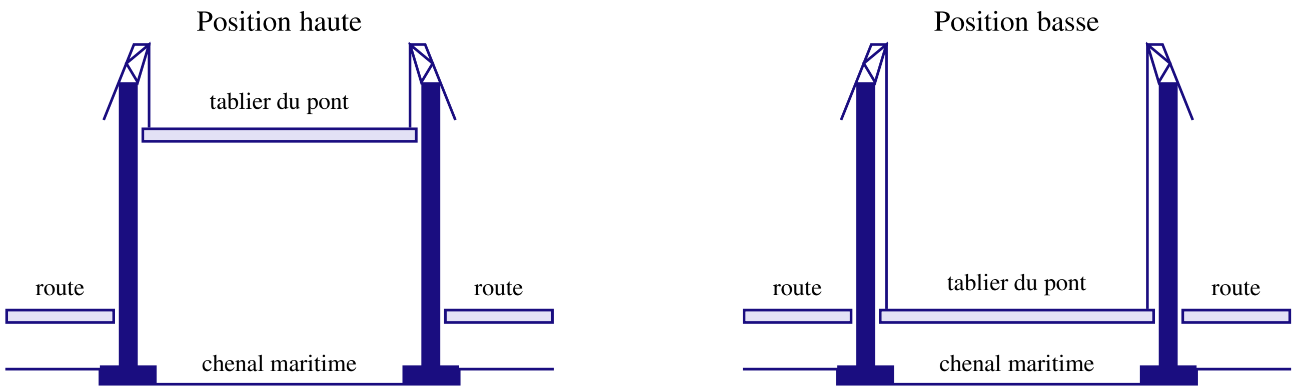
   b) Interpréter ce résultat.

EXERCICE 7

(*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2016*)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
Longueur du tablier : 30 mètres
Temps de montée du tablier : 2 minutes
Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
Temps de descente du tablier : 2 minutes

PARTIE A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. On s'intéresse ici au temps d'attente D, exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

1. Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?
2. On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2; 10]$.
   Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.
3. Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

PARTIE B - Sur l'eau

Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}05$. Ce temps est appelé temps de latence.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.
2. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}05\mathrm{e}^{-0{,}05x}$.
   a) Montrer que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = -\mathrm{e}^{-0{,}05x}$ est une primitive de f.
   b) On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0;+\infty[$, $P(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}05t}$.
3. a) Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.
   b) Calculer la probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour.
   c) Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 24)$.

EXERCICE 8

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2014*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux types A et B de téléviseurs à écran plat.
Les réponses aux questions 1. a., 1. b. et 1. c. seront arrondies au centième.

1. La durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un téléviseur du type A, avant que survienne la première panne, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-5}$.
   a) Calculer la probabilité que la première panne survienne avant la 32 000^e^ heure de fonctionnement.
   b) On s'intéresse à un téléviseur de type A fonctionnant chaque jour pendant 4 heures. Calculer la probabilité que la première panne d'écran ne survienne pas avant 10 ans.
   On prendra 1 *année* = 365 *jours*.
   c) Calculer la probabilité que la première panne survienne après 10 000 heures et avant 40 000 heures de fonctionnement.
   d) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.
2. La durée de fonctionnement avant la première panne d'un téléviseur de type B est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ'.
   Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leqslant 32\,000) = 0{,}8$.
   Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de λ'.

EXERCICE 9

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X. Quelle est son espérance mathématique ?
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-240}{12}$ par la loi normale centrée réduite.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $P(225 \leqslant X \leqslant 270) = P(-1{,}25 \leqslant Z \leqslant 2{,}5)$.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270 ?
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

EXERCICE 10

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près*

Un produit est conditionné en paquets dont la masse théorique est de 250 grammes.

PARTIE A

La machine en charge du remplissage automatique des paquets est régulièrement calibrée.
On considère que la durée T de fonctionnement, exprimée en heures, entre deux calibrages, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.

1. Calculer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer $P(T \geqslant 200)$.

PARTIE B

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque paquet pris au hasard, associe sa masse exprimée en grammes.
On considère que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 2{,}7$.

1. Calculer la probabilité $P(245 \leqslant X \leqslant 260)$.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette tout paquet dont la masse est inférieure à 245 grammes.
   Quelle est la probabilité qu'un paquet pris au hasard ne soit pas conforme ?

EXERCICE 11

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

La compagnie aérienne Truc-Air utilise pour ses vols moyen-courriers des avions pouvant transporter 200 passagers.
Suite à une étude qui a permis d'établir que 10% des clients qui ont réservé un vol ne se présentent pas à l'embarquement, la direction commerciale a décidé de pratiquer le « surbooking ».

PARTIE A

La compagnie accepte pour un vol donné, 210 réservations.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$.
2. On choisit d'approcher la loi binomiale de X par une loi normale d'espérance $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X)$. Soit Y l'approximation normale de X.
   a) Déterminer $P(Y \leqslant 200)$.
   b) Déterminer un intervalle I de centre 189 tel que $P(Y \in I) \approx 0{,}95$.
3. La compagnie prend-elle un risque important en acceptant 210 réservations pour ce vol ?

PARTIE B

La compagnie accepte pour un vol donné n réservations.
On note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;0{,}9)$.
On cherche à déterminer le nombre maximal de réservations pour que la probabilité de l'évènement « $X_n \leqslant 200$ » soit supérieure à 0,95.
On admet que la loi de probabilité de X_n peut être approchée par une loi normale d'espérance $\mu = E(X_n) = 0{,}9n$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X_n) = 0{,}3\sqrt{n}$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$ qui suit la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $X_n \leqslant 200$ équivaut à $Z_n \leqslant \dfrac{200 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$.
   b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-3} près, du réel k tel que $P(Z_n \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.

c) En déduire que n est solution de l'inéquation $0{,}9n+0{,}4935\sqrt{n}-200 \leqslant 0$.

2. a) On pose $x=\sqrt{n}$ avec $x \geqslant 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $0{,}9x^2+0{,}4935x-200 \leqslant 0$.

   b) En acceptant le risque maximum de 5% de voir plus de 200 passagers se présenter à l'embarquement, quel est le nombre maximal de réservations que cette compagnie peut prendre pour ce vol ?

EXERCICE 12

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245 ; 255]$.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité $P(X=3)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres.
   Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité ?

EXERCICE 13

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2016*)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*
Un manufacturier de pneumatiques produit des pneus d'avions en grande quantité.
Il s'engage à livrer des produits spécifiques aux avionneurs de masse maximum garantie de 124 kg. Ces pneus doivent supporter une charge nominale de 10 tonnes, des vitesses pouvant aller jusqu'à 420 km.h^{-1} et des températures instables allant de -40 °C (en altitude) à 250 °C (au moment du décollage).

PARTIE A

On note M la variable aléatoire qui, à chaque pneu prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en kilogramme. On admet que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu=121{,}37$ et d'écart type $\sigma=0{,}42$.

1. Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg comprise entre 120,95 et 121,79.
2. Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg supérieure à 122,63.

PARTIE B

Un pneu trop lourd entraîne une augmentation de la consommation du kérosène.
Lorsque la masse d'un pneu reçu par une compagnie aérienne dépasse 121,9 kg cela entraîne des pénalités financières pour le manufacturier.
Sur la chaîne de fabrication, on prélève de façon aléatoire un échantillon de 36 pneus et on constate que 2 d'entre eux ont une masse qui dépasse 121,9 kg.

1. Quelle est la fréquence des pneus dans l'échantillon prélevé dont la masse dépasse 121,9 kg ?
2. Déterminer l'intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion de pneus dont la masse dépasse 121,9 kg dans la production.
   On rappelle que lorsqu'une fréquence f est mesurée dans un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion dans la population est donné par :
   $$I = \left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$
3. Donner une interprétation du résultat précédent.

EXERCICE 14

(*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2016*)

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes.
La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est 0,04.
Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est livré à une entreprise spécialisée dans le conditionnement des légumes. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine métallurgique est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise de 200 boîtes.

PARTIE A

La variable aléatoire X désigne le nombre de boîtes non conformes dans un tel lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'un tel lot contienne exactement quatre boîtes non conformes.

PARTIE B

On décide d'approcher la loi binomiale suivie par X par la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2{,}77$.

1. Justifier le choix de ces paramètres.
2. À l'aide de la loi normale ainsi définie :
   a) calculer $P(6 \leqslant X \leqslant 10)$ et interpréter le résultat trouvé ;
   b) déterminer une approximation de la probabilité qu'il y ait au maximum 4 boîtes non conformes.

PARTIE C

Dans le lot livré de 200 boîtes, on compte 11 boîtes non conformes. Le fabricant des boîtes est averti. Doit-il s'inquiéter ?
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.

EXERCICE 15

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2016*)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une usine fabrique des batteries au lithium-ion pour des vélos électriques. Le cahier des charges indique qu'une batterie mesure 15 cm de large.
Lors de la fabrication, on modélise la largeur des batteries par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}02$. L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité de la production dans cette usine.

PARTIE A

Une batterie est jugée conforme lorsque sa largeur, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[14{,}95 ; 15{,}05]$.

1. Calculer la probabilité qu'une batterie prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

L'usine vend ses batteries au lithium-ion par lots de 2 000 aux fabricants de vélos électriques. En moyenne, chaque lot de 2 000 batteries en contient 24 non conformes.
On note p la probabilité qu'une batterie soit non conforme. On prélève au hasard 2 000 batteries dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On modélise le nombre de batteries non conformes dans un lot de 2 000 par une variable aléatoire Y.

2. Quelle loi suit la variable aléatoire Y ? Préciser ses paramètres.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 30 batteries non conformes dans un lot de 2 000 batteries.

PARTIE B

Dans le cadre d'un fonctionnement correct des machines de la chaîne de production, on admet que la proportion p de batteries non conformes est 1,2 %.
Le responsable de l'usine affirme qu'il ne vend pas de lot de 2 000 batteries qui en contienne plus de 40 non conformes. Quelle est la fiabilité de cette affirmation ? Justifier.

EXERCICE 16

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondis à 10^{-4} près.

Une usine fabrique en grande quantité des lames de parquet en chêne.

PARTIE A

On prélève au hasard 40 lames dans le stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une lame prélevée au hasard dans ce stock ait un défaut est égale à 0,1.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 lames à un tirage avec remise de 40 lames.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre lames qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux lames ont un défaut.

PARTIE B

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard dans le stock 400 lames.
On admet que la loi de la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 400 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut peut être approchée par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

1. Déterminer, la probabilité que dans un prélèvement de 400 lames, il y ait plus de 50 lames ayant un défaut.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de lames ayant un défaut. En déduire le nombre de lames ayant un défaut que le client peut trouver avec une probabilité proche de 0,95.

PARTIE C

Le fabriquant souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients satisfaits par son produit. Pour cela, il effectue un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. Sa clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage aléatoire avec remise.
Lors de ce sondage, 156 clients se sont déclarés satisfaits par son produit.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p de clients satisfaits.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
3. Ce fabriquant peut-il être certain que plus de 70% de sa clientèle est satisfaite par son produit ?

EXERCICE 17 (*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2015*)

Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

L'usine OCEFRAIS embouteille des jus de fruits. L'étiquette de la bouteille indique 1,5 litre de jus de fruits. Le volume de la bouteille est de 1,55 litre.
À l'embouteillage, le volume de jus de fruits versé dans une bouteille est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}015$.

1. a) L'une des trois figures donne la courbe représentative C_f de la densité f de cette loi normale. Indiquer sur la copie le numéro de la figure correspondante en expliquant votre choix.

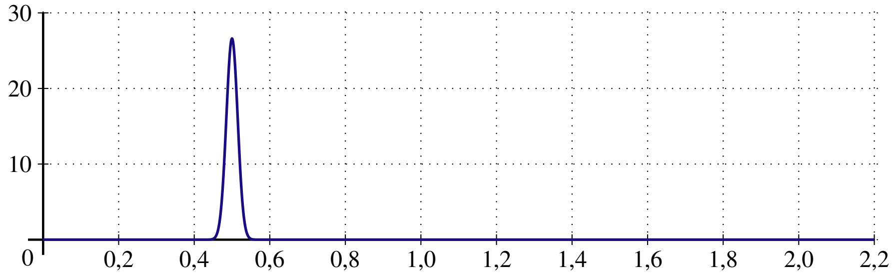


Figure 1

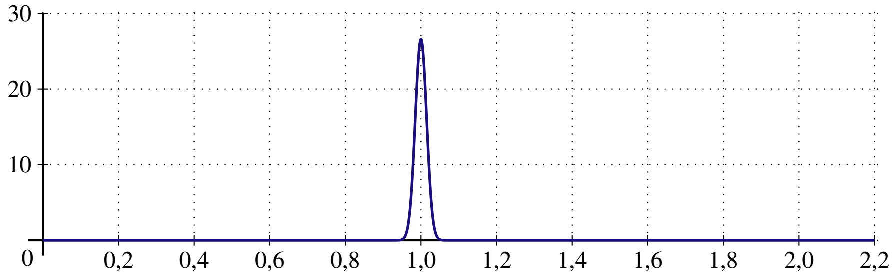


Figure 2

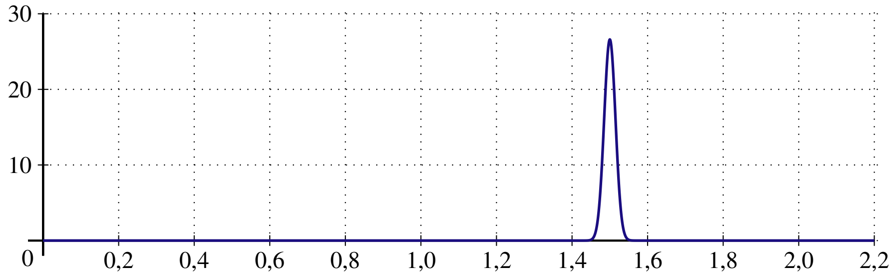


Figure 3

   b) Déterminer $P(1{,}485 \leqslant X \leqslant 1{,}515)$.

2. On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits.
   a) Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement 1,48 litre de jus de fruits ?
   b) Calculer la probabilité que cette bouteille contienne entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.
   c) Quelle est la probabilité que cette bouteille déborde sur la chaîne d'embouteillage ?
   On rappelle que toutes les bouteilles utilisées ont un volume de 1,55 litre.
3. Une bouteille est dite conforme si elle contient entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.
   Selon l'usine OCEFRAIS, la probabilité qu'une bouteille soit non conforme est 0,0077.
   Un supermarché achète un lot de 10 000 bouteilles.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence observée de bouteilles non conformes dans un tel lot.
   b) Dans le lot de 10 000 bouteilles, on a compté 90 bouteilles non conformes. Le gérant du supermarché trouve le nombre de bouteilles non conformes anormalement élevé.
   L'usine OCEFRAIS a-t-elle des raisons de s'inquiéter ?